Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 8

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 13.6.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

8-1 Es sei M das Möbiusband aus Aufgabe 3.2.

(2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Projektion

$$\pi : M \to \mathbb{T}^1, \quad \pi([x, y]) = [x], \quad \forall\, [x, y] \in M$$

ein Vektorbündel über $\mathbb{T}^1$ vom Rang 1 ist.

(2 Punkte) Zeigen Sie weiter, dass $M \setminus 0_M(\mathbb{T}^1)$ zusammenhängend ist. Schließen Sie daraus, dass das Vektorbündel π nicht trivial ist.

(3 Punkte) Zeigen Sie schließlich, dass $M \oplus M \cong \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$ als Vektorbündel. *Hint: Betrachten Sie zuerst $M \oplus M$ als ein Quotient von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Konstruieren Sie dann den gewünschten Isomorphismus als Quotient von einem Isomorphismus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ der Form $(x, y) \mapsto (x, R_{\theta(x)} \cdot y)$, wobei $R_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Rotation von Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ ist und die Funktion $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist zu finden.*

8-2 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $T\mathbb{T}^n$ ein triviales Vektorbündel ist.

8-3 (3 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und $c \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir setzen $M := f^{-1}(c)$. Es sei angenommen, dass f eine Submersion ist bei allen $p \in M$. Zeigen Sie, dass $TM \oplus (M \times \mathbb{R}) \cong M \times \mathbb{R}^n$ (als Vektorbündel). *Hinweis: Betrachten Sie den Gradienten*

$$\nabla f(p) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \Big).$$