Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 4

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

4-1 Es sei G eine Lie-Gruppe. Wir schreiben $L_h : G \to G$ und $R_h : G \to G$ für die Links- und Rechtsmultiplikation durch $h \in G$. Wir betrachten den Vektorraum $\mathfrak{X}_L(G)$ der linksinvarianten Vektorfelder auf G. Das heißt: $X \in \mathfrak{X}_L(G)$, falls X L_h-verwandt mit sich selbst für alle $h \in G$ ist. Zeigen Sie:

(a) der Fluß Φ_X eines beliebigen $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ ist vollständig. *Hinweis: Zeigen Sie, dass es $\epsilon > 0$ gibt, sodass für jedes $h \in G$ eine Integralkurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ von X mit $\gamma(0) = h$ existiert.*

(b) für alle $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ gilt die Formel
$$R_{\Phi^t_X(e)} = \Phi^t_X, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$
wobei $e \in G$ das Identitätselement bezeichnet.

(c) wenn g eine linksinvariante PR-Metrik auf G ist (d.h. $L_h \in \mathrm{Iso}(G, g)$ für alle $h \in G$), dann ist die Funktion $g(X, Y) : G \to \mathbb{R}$ konstant für alle $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$.

4-2 Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita Ableitung ∇. Für $f : M \to \mathbb{R}$ definieren wir die Hessesche Form $\mathrm{H}(f) \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$
$$\mathrm{H}(f)_p(v_1, v_2) := g_p(\nabla_{v_1} \mathrm{grad}\, f, v_2), \qquad \forall\, p \in M,\ \forall\, v_1, v_2 \in T_pM.$$
Zeigen Sie:

(a) wenn $F : (N, h) \to (M, g)$ eine isometrische Immersion ist, gilt $\mathrm{H}(f \circ F) = F^*\mathrm{H}(f)$. *Hinweis: benutzen Sie, dass $\mathrm{grad}\,(f \circ F)$ und $\mathrm{grad}\, f$ F-verwandt sind und den Satz über LC von isometrischen Immersionen.*

(b) es gilt $\mathrm{H}(f) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f}\, g$,

Es sei nun $N := f^{-1}(0) \subset M$ und es sei angenommen, dass die Ungleichung $\pm g(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f) > 0$ für alle $p \in N$ gilt. Nach dem Satz der inversen Funktion ist die Abbildung
$$F : (-\epsilon, +\epsilon) \times U \to M, \qquad F(\theta, p) = \Phi^\theta_{\pm \mathrm{grad}\, f}(p).$$
ein Diffeomorphismus auf das Bild, wenn $U \subset N$ eine hinreichende kleine Umgebung eines Punktes in N ist. Zeigen Sie, dass, wenn die Gleichung $\pm g(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f) = 1$ auf einer Umgebung von N gilt, dann

(i) $F^*g = \pm \mathrm{d}\theta^2 + g^\theta$, wobei $\theta \mapsto g^\theta$ ein glatter Pfad von PR-Metriken auf U ist. *Hinweis: beweisen Sie erst, dass $\Phi^\theta_{\pm \mathrm{grad}\, f}(U) \subset \{f = \theta\}$ für $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$;*

(ii) $\partial_\theta = \pm \mathrm{grad}\, \theta$;

(iii) $\mathrm{H}(\theta) = \frac{1}{2}\dot{g}^\theta$, wobei $\dot{g}^\theta := \frac{\mathrm{d}g^\theta}{\mathrm{d}\theta}$.
Hinweis: berechnen Sie $(\Phi^t_{\partial_\theta})^*(\pm \mathrm{d}\theta^2 + g^\theta)$.

Bemerkung: es ist leicht die Umkehrung zu zeigen und zwar, dass die Gleichung $\pm g(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f) = 1$ auf dem Bild von F gilt, falls $F^*g = \pm \mathrm{d}\theta^2 + g^\theta$ stimmt.

Aufgabe zum Vorrechnen

4-3 Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit und $\lambda : M \to (0, \infty)$ eine Funktion. Man betrachte die PR-Metrik $g^\lambda := \lambda^2 g$. Es seien ∇ und ∇^λ die Levi-Civita Ableitungen von g und g_λ. Es sei $D^\lambda := \nabla^\lambda - \nabla \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ das Differenztensorfeld. Zeigen Sie:

$$D^\lambda(u_1, u_2) = (\mathrm{d}\varphi \cdot u_1)u_2 + (\mathrm{d}\varphi \cdot u_2)u_1 - g(u_1, u_2)\operatorname{grad}\varphi,$$

wobei $\varphi := \log \lambda$ ist und der Gradient bezüglich g zu verstehen ist.

4-4 Es sei g eine bi-invariante PR-Metrik auf einer Lie-Gruppe G. Das heißt: g ist sowohl linksinvariant als auch rechtsinvariant (siehe Aufgabe 4-1). Zeigen Sie:

(a) alle $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ sind Killing-Vektorfelder;

(b) wenn ∇ die Levi-Civita Ableitung von g darstellt, dann

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}_L(G);$$

(c) die Integralkurven von jedem $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ sind Geodätischen für g.