

## Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 3

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti    Kevin Emanuel Wiegand

- 3-1** Es sei  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  eine Riemannsche Submersion. Wir betrachten eine stückweise glatte Kurve  $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{M}$ . Zeigen Sie:  $L_{\tilde{g}}(\gamma) \geq L_g(\pi \circ \gamma)$ . Schließen Sie daraus, dass

$$d_{\tilde{g}}(p_1, p_2) \geq d_g(\pi(p_1), \pi(p_2)), \quad \forall p_1, p_2 \in \tilde{M}.$$

- 3-2** Es sei  $G$  eine glatte Linkswirkung auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , sodass

- (i) jedes  $p \in M$  besitzt eine Umgebung  $U$ , sodass  $(\gamma \cdot U) \cap U = \emptyset$  für  $\gamma \neq \text{id}$  gilt;
- (ii) für alle  $p, p' \in M$  mit  $p' \notin G \cdot p$ , Umgebungen  $U$  von  $p$  und  $U'$  von  $p'$  existieren, für die  $(\gamma \cdot U) \cap U' = \emptyset$  für alle  $\gamma \in G$  gilt.

Es sei  $\pi : M \rightarrow M/G$  die Quotientenabbildung und es sei  $M/G$  mit der Quotiententopologie versehen.

- (a) Zeigen Sie, dass  $M/G$  hausdorffsch ist und dass  $\pi : M \rightarrow M/G$  eine Überlagerung ist;
- (b) Es sei  $U$  wie in (i), sodass  $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$  ein Homöomorphismus ist. Man kann annehmen, dass  $U$  der Definitionsbereich einer Karte  $\varphi : U \rightarrow V$  ist. Dann ist  $(\pi(U), \varphi \circ (\pi|_U)^{-1})$  eine Karte auf  $M/G$ . Zeigen Sie, dass zwei solche Karten, welche von  $(U, \varphi)$  und  $(U, \varphi')$  entstehen, verträglich miteinander sind.

*Hinweis: wenn  $W$  eine Zusammenhangskomponente von  $\pi(U) \cap \pi(U')$  ist, beweisen Sie zuerst, dass es  $U'' \subset U$  und  $\gamma \in G$  gibt, sodass  $\pi(U'') = W$  und  $\gamma \cdot U'' \subset U'$  gilt.*

- (c) Zeigen Sie: es existiert eine eindeutige glatte Struktur auf  $M/G$ , sodass  $\pi$  ein lokaler Diffeomorphismus ist.

*Hinweis: Betrachten Sie eine Karte  $\psi : W \rightarrow Z$  einer glatten Struktur auf  $M/G$ , für die  $\pi : M \rightarrow M/G$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, und zeigen Sie, dass  $\psi$  und  $\varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$  verträglich für alle  $(U, \varphi)$  wie in (b) sind.*

(Bitte Satz 3.59 nicht verwenden, um (a), (b) und (c) zu zeigen.)

Es sei nun  $M = \mathbb{R}^2$  und

$$G = \left\{ \psi_{m,n} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \psi_{m,n}(x, y) = (x + m, (-1)^m \cdot y + n) \right\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}.$$

Zeigen Sie, dass die Wirkung von  $G$  die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt und dass  $\mathbb{R}^2/G$  eine Riemannsche Metrik  $g_{\mathbb{R}^2/G}$  besitzt, sodass die Quotientenabbildung  $\pi : (\mathbb{R}^2, g_{\mathbb{R}^2}) \rightarrow (\mathbb{R}^2/G, g_{\mathbb{R}^2/G})$  eine Riemannsche Überlagerung ist.

**3-3** Es seien  $\Gamma_1, \Gamma_2$  Gitter in  $\mathbb{R}^n$  (siehe Beispiel 3.62). Zeigen Sie:  $(\mathbb{R}^n/\Gamma_1, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_1})$  ist isometrisch zu  $(\mathbb{R}^n/\Gamma_2, g_{\mathbb{R}^n/\Gamma_2})$  genau dann, wenn  $A \in O(n)$  existiert mit  $A(\Gamma_1) = \Gamma_2$ .

*Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass Hochhebungen von glatten Abbildungen  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Gamma_2$  zu  $\tilde{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatt (und eindeutig bestimmt von ihrem Wert in einem Punkt) sind.*

Benutzen Sie dieses Resultat um die R-Mannigfaltigkeiten  $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_{\mathbb{R}^2/\Gamma})$  bis auf Isometrien zu klassifizieren. Es sei dazu

$$S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1/2, y > 0, x^2 + y^2 \geq 1 \right\}.$$

Für jedes  $(a, v) \in (0, \infty) \times S$  definieren wir das Gitter  $\Gamma_{(a,v)}$ , das durch  $(a, 0)$  und  $av$  aufgespannt ist. Zeigen Sie, dass für alle  $\Gamma$  genau ein  $\Gamma_{(a,v)}$  existiert, sodass  $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_{\mathbb{R}^2/\Gamma})$  und  $(\mathbb{R}^2/\Gamma_{(a,v)}, g_{\mathbb{R}^2/\Gamma_{(a,v)}})$  isometrisch sind.

*Hinweis: Für  $\Gamma$  beliebig wählen Sie  $u_1 \in \Gamma \setminus \{0\}$  mit kleinster euklidischer Norm und nehmen Sie die einzige Drehung  $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sodass  $\rho(u_1) = (a, 0)$ . Nehmen Sie nun innerhalb der Elementen von  $\rho(\Gamma)$  mit kleinster positiven  $y$ -Koordinate, das Element  $u_2$  mit kleinstem Betrag der  $x$ -Koordinate. Bis auf einer Spiegelung an der  $y$ -Achse darf man annehmen, dass  $u_2/a \in S$  liegt (warum?).*

#### AUFGABE ZUM VORRECHNEN

**3-4** Es sei  $(M, g)$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, also  $\sigma_-(g) = 1$ . Wir sagen, dass  $(M, g)$  kausal ist, wenn keine glatte, geschlossene, zeitartige Kurve  $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$  existiert (d.h.  $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ ,  $t_0 \neq t_1$  und  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$ ).

Zeigen Sie:

- (a) der Minkowski Raum  $(\mathbb{R}^{n,1}, g_{\mathbb{R}^{n,1}})$  ist kausal für alle  $n \geq 2$ ;
- (b) der anti-de-Sitter Raum  $(AdS^m, g_{AdS^m})$  ist nicht kausal für alle  $m \geq 2$ ;
- (c) wenn  $(N, g_N) \rightarrow (M, g_M)$  eine isometrische Immersion von Lorentz-Mannigfaltigkeiten ist, dann gilt die Implikation

$$(N, g_N) \text{ nicht kausal} \implies (M, g_M) \text{ nicht kausal.}$$

Schließen Sie daraus, dass für keine  $m$  und  $n$  eine isometrische Immersion  $(AdS^m, g_{AdS^m}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n,1}, g_{\mathbb{R}^{n,1}})$  existiert.