Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 13

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti   Urs Fuchs

Abgabe bis 18.7.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

13-1 Es sei $\alpha \in (0, \pi/2)$ und $\gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)^2$ die Kurve

$$\gamma(\theta) = (\theta \sin\alpha, \theta\cos\alpha).$$

Die entsprechende Einbettung ψ von Aufgabe 12-3 parametrisiert dann den Kegel K_α von Winkel 2α. Wir benutzen unten die Notation $\partial_\theta := \frac{\partial}{\partial\theta}$ und $\partial_\phi := \frac{\partial}{\partial\phi}$.

Es sei nun $\theta_* \in (0,\infty)$ fest und betrachten Sie die Kurve $\delta : [0, 2\pi] \to (0,\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $t \mapsto (\theta_*, t)$, welche in den ψ-Koordinaten die Schnittmenge zwischen dem Kegel und der Ebene $\{z = \theta_* \cos\alpha\}$ parametrisiert.

(a) (2 Punkte) Finden Sie die Matrix der Zusammenhangsformen für die kovariante Ableitung $\delta^*\nabla^{K_\alpha}$ bezüglich des Rahmens $\delta^*\partial_\theta, \delta^*\partial_\phi$ des Vektorbündels δ^*TK_α.

(b) (2 Punkte) Es sei $\sigma = a\delta^*\partial_\theta + \frac{b}{r}\delta^*\partial_\phi$ mit $a, b \in C^\infty([t_0, t_1])$ ein Schnitt von δ^*TK_α. Geben Sie an, welche Differentialgleichungen a und b erfüllen müssen, sodass σ parallel ist entlang δ, und lösen Sie diese Gleichungen explizit. *Hinweis: In Aufgabe 12-3 haben wir* $\dot r := \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ *geschrieben. Verwechseln Sie diese Ableitung nicht mit einer Ableitung bezüglich* t.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $P^\delta_{2\pi,0} : T_{\psi(\theta_*,0)}K_\alpha \to T_{\psi(\theta_*,0)}K_\alpha$ eine Drehung um den Winkel $2\pi\sin\alpha$ ist, wenn wir $T_{\psi(\theta_*,0)}K_\alpha$ als Unterverktorraum von $\mathbb{R}^3$ interpretieren.

13-2 (3 Punkte) Sei $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Sphäre in $\mathbb{R}^3$ und $\delta : [0, 2\pi] \to S^2$ eine Kurve mit konstanter z-Koordinate $z \in (-1, 1)$ und konstanter Winkelgeschwindigkeit. Wir setzen $p = \delta(0) = \delta(2\pi)$. Beweisen Sie, dass die Parallelverschiebung $P^\delta_{2\pi,0} : T_pS^2 \to T_pS^2$ eine Drehung um den Winkel $2\pi z$ ist. *Hinweis: finden Sie einen Kegel, der beim Bild von* δ *tangential zu der Sphäre ist. Benutzen Sie Übung 12-2 zu zeigen, dass ein Vektorfeld entlang* δ *parallel ist für den Kegel, genau wenn es parallel ist für die Sphäre.*

13-3 Es sei $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ eine 1-Form. Wir definieren die bilineare Abbildung $F_\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$

$$F_\alpha(X, Y) := \mathcal{L}_X(\alpha(Y)) - \mathcal{L}_Y(\alpha(X)) - \alpha\big([X, Y]\big).$$

(a) (2 Punkte)Zeigen Sie: F_α ist antisymmetrisch und $C^\infty(M)$-bilinear, nämlich

$$F_\alpha(f \cdot X, Y) = f \cdot F_\alpha(X, Y) = F_\alpha(X, f \cdot Y), \qquad \forall\, f \in C^\infty(M);$$

(b) (1 Punkte) Schließen Sie daraus, dass F_α von einer 2-form $\mathrm{d}\alpha \in \Gamma(\Lambda^2 M)$ induziert ist, nämlich

$$F_\alpha(X,Y)(p) = (\mathrm{d}\alpha)_p(X(p), Y(p)), \qquad \forall\, p \in M.$$

(c) (1 Punkt) Es sei $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathrm{d}x^i$, die Darstellung von α in einer Karte. Berechnen Sie die Koeffizienten $(\mathrm{d}\alpha)_{ij}$ der Darstellung

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{i<j} (\mathrm{d}\alpha)_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

in derselben Karte.

(d) (1 Punkt) Wenn $M = \mathbb{R}^2$ berechnen Sie $\mathrm{d}\alpha$ für $\alpha = \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$.

13-4 Zusatzaufgabe: Es sei $\nabla^\omega = \mathrm{d} + \omega$ die kovariante Ableitung auf dem trivialen Bündel $\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, sodass die Matrix der Zusammenhangsformen $\omega \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^3 \otimes \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ durch

$$\omega = \mathrm{d}x \otimes \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + \mathrm{d}y \otimes \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} + \mathrm{d}z \otimes \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad F(u,v) = (u, v, uv), \quad \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten die kovariante Ableitung $F^*\nabla^\omega$ auf dem Pull-back Bündel $F^*(\pi) = \pi' : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(a) (3 Punkte) Finden Sie die Matrix der Zusammenhangsformen $\omega' \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^2 \otimes \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}))$ für $F^*\nabla^\omega$, sodass

$$F^*\nabla^\omega = \mathrm{d} + \omega'.$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$(F^*\nabla)_{u\partial_u + v\partial_v} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vu^2(u-v) + u \\ uv^2(u-v) - v \end{pmatrix}.$$