Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 12

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti   Urs Fuchs

Abgabe bis 11.7.2019 um 16 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

12-1 Es sei ∇ eine beliebige kovariante Ableitung auf dem trivialen Bündel $M \times \mathbb{R} \to M$ und $a : M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ ein Bündelisomorphismus über M. Wir betrachten die transformierte kovariante Ableitung $\nabla^a_v \sigma := a^{-1}(\nabla_v(a\sigma))$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es $b_a \in C^\infty(M)$ gibt, sodass

$$\nabla^a_v \sigma = \nabla_v \sigma + (\mathrm{d}b_a \cdot v)\sigma.$$

(b) (2 Punkte) Es sei umgekehrt $b \in C^\infty(M)$. Finden Sie ein Bündelisomorphismus a_b, sodass

$$\nabla^{a_b}_v \sigma = \nabla_v \sigma + (\mathrm{d}b \cdot v)\sigma.$$

(c) (1 Punkt) Schließen Sie daraus: der Quotientenraum der kovarianten Ableitungen auf $M \times \mathbb{R}$ durch die Wirkung von Bündelisomorphismen ist ein affiner Raum über den Vektorraum

$$\frac{\Gamma(T^*M)}{\{\mathrm{d}b \mid b \in C^\infty(M)\}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie $\Gamma(T^*M \otimes (M \times \mathbb{R})^* \otimes (M \times \mathbb{R})) \cong \Gamma(T^*M)$ *und Satz 9.6.*

12-2 Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir definieren die orthogonale Projektion $\mathrm{Pr}^\perp : M \times \mathbb{R}^n \to TM$ bezüglich der euklidischen Metrik. Das heißt: für alle $p \in M$ ist $\mathrm{Pr}^\perp(p, v) \in T_pM$ die orthogonale Projektion von $v \in \mathbb{R}^n$ auf T_pM, wobei wir T_pM dank dem Satz 5.25 als Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ betrachten. Sie können ohne Beweis annehmen, dass $\mathrm{Pr}^\perp$ ein Bündelhomomorphismus ist.

Wir definieren nun die Abbildung $\nabla^M : \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^*M \otimes TM)$

$$\nabla^M_v X := \mathrm{Pr}^\perp(\mathrm{d}_p \tilde{X} \cdot v), \qquad \forall\, p \in M,\ v \in T_pM,$$

$\tilde{X} : U \to U \times \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in U$ und

$$\tilde{X}(p') = X(p') \in T_{p'}M \subset T_{p'}\mathbb{R}^n \quad \forall p' \in M \cap U.$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\nabla^M_v X = \mathrm{Pr}^\perp \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} X \circ \gamma(t) \right),$$

wobei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine beliebige glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v$ ist. Schließen Sie daraus, dass ∇^M nicht von der spezifischen Erweiterung $\tilde{X}$ abhängt und daher wohldefiniert ist.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie: ∇^M ist eine kovariante Ableitung auf TM.

12-3 Es sei $\gamma : (\theta_0, \theta_1) \to (0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine eingebettete Kurve mit Koordinaten $\gamma = (r, z)$, sodass $\dot{r}^2(\theta) + \dot{z}^2(\theta) = 1$ für alle $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$. Wir definieren die Einbettung

$$\psi : (\theta_0, \theta_1) \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(\theta, \phi) := \Big(r(\theta)\cos\phi, r(\theta)\sin\phi, z(\theta)\Big).$$

Dann ist $M := \psi\big((\theta_0, \theta_1) \times \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}\big)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. (Skizzieren Sie diese).

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie $\mathrm{d}\psi \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}$ und $\mathrm{d}\psi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}$. Zeigen Sie, dass in den durch die Karte ψ^{-1} gegebenen Koordinaten auf M gilt:

$$\mathrm{Pr}^{\perp}(\psi(\theta, \phi), v) = \Big\langle v, \mathrm{d}\psi \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\Big\rangle \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\langle v, \mathrm{d}\psi \cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\rangle}{r^2(\theta)} \frac{\partial}{\partial\phi},$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) (2 Punkte) Benutzen Sie Teilaufgabe 12-2a) um zu zeigen, dass

$$\nabla^M \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\dot{r}}{r}\mathrm{d}\phi \otimes \frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad \nabla^M \frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{\dot{r}}{r}\mathrm{d}\theta \otimes \frac{\partial}{\partial\phi} - r\dot{r}\mathrm{d}\phi \otimes \frac{\partial}{\partial\theta}.$$

12-4 Zusatz: (2 Punkte) Ist die Lie-Klammer $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ eine kovariante Ableitung im Sinne der Bemerkung 9.2?