Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 11

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti   Kevin Emanuel Wiegand

11-1 Es sei M eine orientierte kompakte Fläche mit Rand und es seien $M_1, M_2 \subset M$ zwei kompakte Subflächen mit Rand, sodass

- $M = M_1 \cup M_2$;
- $M_1 \cap M_2$ eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von ∂M_1 (auf äquivalenter Weise von M_2) ist;
- $M_1 \cap \partial M$ und $M_2 \cap \partial M$ eine Vereinigung von Zusammenhangskomponenten von ∂M sind.

Siehe das Bild unten für ein Beispiel von M, M_1, M_2. Zeigen Sie, dass

$$\chi(M) = \chi(M_1) + \chi(M_2).$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass M_1 und M_2 Triangulierungen mit den gleichen Kanten und Ecken auf $\partial M_1 \cap \partial M_2$ besitzen.

Benutzen Sie diese Formel und die Identität $\chi(D^2) = 1$, um $\chi(S^2)$, $\chi([0,1] \times S^1)$ und $\chi(\mathbb{T}^2)$ zu berechnen. Finden Sie eine orientierte Fläche mit Rand, sodass $\chi(M) = -1$. Es sei M_k eine kompakte Fläche ohne Rand von Geschlecht k (siehe Bild). Zeigen Sie, dass $\chi(M_k) = 2 - 2k$.

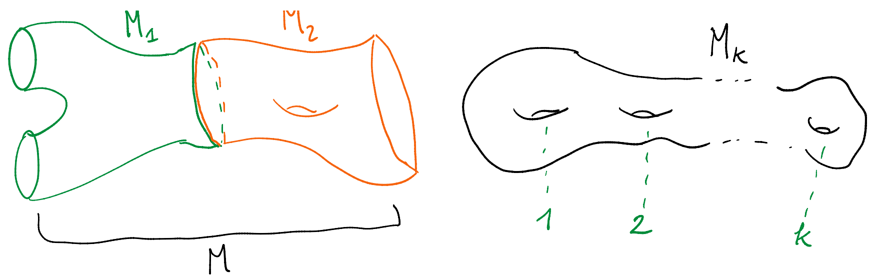

Bild: links ein Beispiel von $M = M_1 \cup M_2$; rechts die Fläche M_k.

11-2 Es sei M eine Fläche diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$ mit negativer Gauß-Krümmung. Zeigen Sie, dass kein m-Eck $N \subset M$ für $m \leq 2$ existiert, sodass der Rand stückweise geodätisch ist. Zeigen Sie weiter, dass kein 3-Eck mit einem konkavem Eck und stückweise geodätischem Rand existiert.

Zeigen Sie dazu, dass jede maximale nicht-konstante Geodätische $\gamma : I_v \to M$ injektiv ist.

Hinweis: Sie dürfen die folgende Version des Kurvensatzes von Jordan benutzen: eine stückweise Immersion $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall\, t, s \in [0,1], \qquad \delta(t) = \delta(s) \quad \Longrightarrow \quad t = s \quad \text{oder} \quad \{t, s\} = \{0, 1\},$$

ist der Rand eines m-Eckes bis auf Umkehrung der Orientierung.

11-3 Es sei (M, g) eine n-dimensionale, zusammenhängende PR-Mannigfaltigkeit und $\mathrm{Kil}(M, g)$ der Vektorraum der Killingvektorfelder für (M, g). Zeigen Sie, dass für alle $X \in \mathrm{Kil}(M, g)$ und alle Geodätische $\gamma : [0, 1] \to M$ die Einschränkung $X \circ \gamma$ ein Jacobi-Vektorfeld entlang γ ist.

Es sei weiter $p \in M$ beliebig und betrachten Sie die Abbildung

$$F : \mathrm{Kil}(M, g) \to T_pM \oplus \Lambda^2(T_p^*M), \quad F(X) := \Big(X(p), g_p(\nabla_\cdot X, \cdot)\Big).$$

Zeigen Sie, dass F injektiv ist und folgern Sie daraus, dass $\dim \mathrm{Kil}(M, g) \leq n(n + 1)/2$.

11-4 Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung $c \in \mathbb{R}$. Es sei $\gamma : [0, T] \to M$ eine Geodätische, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Zeigen Sie, dass J ein normales Jacobi-Vektorfeld entlang γ genau dann ist, wenn

$$\ddot{J} + cJ = 0, \qquad J(0), \dot{J}(0) \perp \dot{\gamma}(0). \tag{$\star$}$$

Zeigen Sie, dass J mit $J(0) = 0$ die Bedingung $(\star)$ genau dann erfüllt, wenn $J(t) = \mathrm{sn}_c(t)e(t)$, wobei $e \in \Gamma({}^\gamma TM)$ ein paralleles Vektorfeld entlang γ mit $e \perp \dot{\gamma}$ ist. Siehe Beispiel 4.42 für die Definition von sn_c.