Differentialgeometrie 1 – Scheinklausur

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti   Urs Fuchs

24.7.2019

Vektorfelder

Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{D} \subset TM$ eine Distribution vom Rang d auf M. Das heißt $\mathcal{D}$ ist eine Subbündel vom Rang d von $TM \to M$. Für alle $p \in M$ definieren wir den Untervektorraum $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]_p$ von T_pM als

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}]_p := \mathrm{Spann}\Big\{[X, Y](p) \mid X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})\Big\}.$$

Wir setzen

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] := \bigsqcup_{p \in M} [\mathcal{D}, \mathcal{D}]_p.$$

Es sei $X_1, \dots X_d$ ein Rahmen von $\mathcal{D}$ auf einer offenen Menge $U \subset M$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $p \in U$

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}]_p = \mathrm{Spann}\Big\{\big\{X_i(p)\big\}_{i=1}^{d} \cup \big\{[X_i, X_j](p)\big\}_{i,j=1}^{d}\Big\}.$$

b) (2 Punkte) Es sei $d' \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass wenn für alle $p \in M$ $\dim[\mathcal{D}, \mathcal{D}]_p = d'$ gilt, dann ist $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ eine Distribution vom Rang d'.

Es sei $M = \mathbb{R}^4$ mit Koordinaten (w, x, y, z). Wir betrachten die 1-Formen

$$\alpha = \mathrm{d}z - x\mathrm{d}y, \qquad \beta = \mathrm{d}x - w\mathrm{d}y.$$

c) (2 Punkte) Finden Sie glatte Vektorfelder $X, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$, sodass für alle $p \in \mathbb{R}^4$:

$$X(p),\ W(p) \text{ linear unabhängig}, \qquad X(p), W(p) \in \ker \alpha(p) \cap \ker \beta(p).$$

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D} := \ker \alpha \cap \ker \beta$ eine Distribution vom Rang 2 ist.

e) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}' := [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ eine Distribution vom Rang 3 ist und dass $T\mathbb{R}^4 = [\mathcal{D}', \mathcal{D}']$.

f) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es keine Untermannigfaltigkeit $\iota : S \to \mathbb{R}^4$ der Dimension zwei oder drei existiert, sodass $\mathcal{D}_{\iota(s)} \subset \mathrm{d}_s\iota(T_sS)$ für alle $s \in S$.
Hinweis. Benutzen Sie Satz 7.17 und die letzte Aussage im Satz 8.21.

Beweisidee

a)

Es sei $X_1, \dots, X_d$ ein Rahmen von $\mathcal{D}$ auf U. Dann $X = \sum_{i=1}^d a^i X_i$ und $Y = \sum_{j=1}^d b^j X_j$, wobei $a^i, b^j \in C^\infty(U)$. Dann auf U gilt

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \sum_{i,j=1}^d [a^i X_i, b^j X_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^d a^i \mathcal{L}_{X_i}(b^j) X_j + b^j [a^i X_i, X_j] \\
&= \sum_{i,j=1}^d a^i \mathcal{L}_{X_i}(b^j) X_j - b^j \mathcal{L}_{X_j}(a^i) X_i + a^i b^j [X_i, X_j]
\end{aligned}$$

und wir sehen, dass $[X,Y](p)$ im Spann von $(X_i(p)$ und $([X_i, X_j](p))$ ist. Wir zeigen nun die andere Inklusion. Es sei $p \in U$ fest und sei $\rho \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion mit Träger in U, sodass $\rho = 1$ auf einer kleineren Umgebung $U_p \subset U$ von p. Dann ist $\tilde{X}_i = \rho X_i$ ein Vektorfeld auf der ganzen M, das auch in $\mathcal{D}$ enthalten ist. Es ist daher ein glatter Schnitt von $\mathcal{D}$ auf M. Wir haben dann

$$[X_i, X_j](p) = [\tilde{X}_i, \tilde{X}_j](p) \in [\mathcal{D}, \mathcal{D}]_p.$$

Wir behaupten nun, dass es eine Funktion $f_i \in C^\infty(M)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{L}_{\tilde{X}_i}(f_i)(p) = \mathrm{d}_p f_i \cdot X_i(p) = 1$ gibt. Dann ist

$$[\tilde{X}_i, f_i \tilde{X}_i](p) = \mathcal{L}_{\tilde{X}_i}(f_i)(p) \tilde{X}_i(p) + f_i(p)[\tilde{X}_i, \tilde{X}_i](p) = X_i(p) + f_i(p) \cdot 0 = X_i(p).$$

Wir nehmen dafür eine Karte $(U', \varphi = (x^1, \dots, x^m))$ um p. Dann können wir schreiben

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^m a^j \partial_j.$$

Da $\tilde{X}_i(p) = X_i(p) \neq 0$ ist der Spaltenvektor $a(p) := (a^j(p)) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Es existiert dann ein Zeilenvektor $b = (b_j) \in \mathbb{R}^m$, sodass $b \cdot a(p) = 1$. Wir setzen nun

$$f_1 \in C^\infty(U'), \qquad f_1(x) = \sum_{j=1}^m b_j x^j.$$

Dann $\mathrm{d}_p f_1 = \sum_{j=1}^m b_j \mathrm{d}x^j$ und $\mathrm{d}_p f_1 \cdot \tilde{X}_i(p) = \sum_{j=1}^m b_j a^j = 1$. Die gewünschte Funktion ist dann $f := \rho_1 f_1$, wobei $\rho_1 \in C^\infty(M)$ mit Träger in U' und $\rho_1 = 1$ in einer Umgebung von p.

b)

Es sei $p \in M$ beliebig. Wir nennen die Vektorfelder (X_i) und $[X_i, X_j]$ um p mit $Y_1, \dots, Y_{d(d+1)/2}$. Nach Voraussetzung und dem Punkt a) existieren $Y_{i_1}, \dots Y_{i_{d'}}$, die in p linear unabhängig sind. Wir behaupten, dass $Y_{i_1}, \dots Y_{i_{d'}}$ auch in einer Umgebung U' von p linear unabhängig bleiben. Daher ist $[\mathcal{D}, \mathcal{D}]_{U'} = \mathrm{Spann}\{Y_{i_1}|_{U'}, \dots, Y_{i_{d'}}|_{U'}\}$ und Punkt b) folgt aus Hilfsatz 6.31.

Jetzt zur linear Unabhängigkeit. Wir betrachten eine Karte (U'', φ) um p. Der Vektor Y_{i_j} besitzt Koordinaten $(a^k_{i_j})^m_{k=1}$ bezüglich der Basis $\partial_1, \ldots, \partial_m$. Es sei $A = (a^k_{i_j}) : U'' \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(d', m)$ die Matrix der Koeffizienten. Dann $A(p)$ hat Rang d' und daher gibt es eine Untermatrix $B :: U'' \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(d', d')$, sodass $\det B(p) \neq 0$. Da B und det glatt sind, ist $\det B \neq 0$ auch in einer Umgebung U' von p. Dort sind die Vektoren $Y_{i_1}, \ldots Y_{i_{d'}}$ noch unabhängig.

c)

Wir suchen Vektorfelder Y, sodass

$$\begin{cases} \alpha(Y) = 0, \\ \beta(Y) = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die Darstellung

$$Y = a_w \partial_w + a_x \partial_x + a_y \partial_y + a_z \partial_z.$$

benutzen, wird das Gleichungssystem zu

$$\begin{cases} a_z = x a_y, \\ a_x = w a_y. \end{cases}$$

Also sind a_y und a_w frei und wir bekommen linear unabhängige Lösungen, indem wir $a_y = 1$, $a_w = 0$ oder $a_y = 0$, $a_w = 1$ setzen. Die entsprechenden glatten Vektorfelder sind

$$X = w\partial_x + \partial_y + x\partial_z, \qquad W = \partial_w.$$

d)

Die Menge $\mathcal{D}$ ist eine Distribution vom Rang 2 nach Hilfsatz 6.31.

e)

Wir berechnen $[W, X] = \partial_x$. Dazu sind W, X und ∂_x linear unabhängig. Die Menge $\mathcal{D}'$ ist eine Distribution vom Rang 3 nach a) und Hilfsatz 6.31. Wir haben nun

$$[\partial_x, W] = 0, \qquad [\partial_x, X] = \partial_z.$$

Dazu sind W, X, ∂_x und ∂_z linear unabhängig. Die Menge $[\mathcal{D}', \mathcal{D}']$ ist dann die ganze $T\mathbb{R}^4$.

f)

Es sei per Widerspruch angenommen, dass $\iota : S \to \mathbb{R}^4$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension zwei ist, welche tangential zu $\mathcal{D}$ steht. Nach Satz 7.17 existieren glatte Vektorfelder X_S und W_S auf S die ι-verwandt zu X und W sind. Nach Satz 8.21 sollte $[W, X] = \partial_x$ ι-verwandt zu $[X_S, W_S]$ sein, aber

$$\partial_x|_s \notin \mathcal{D}_{\iota(s)} = \mathrm{d}_s\iota(T_s S).$$

Es sei per Widerspruch angenommen, dass $\iota : S \to \mathbb{R}^4$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension drei ist, sodass $\mathcal{D} \subset \mathrm{d}\iota(TS)$. Nach Satz 7.17 existieren glatte Vektorfelder X_S und W_S auf S die ι-verwandt zu X und W sind. Nach Satz 8.21 ist $[W, X] = \partial_x$ ι-verwandt zu $Y_S := [X_S, W_S]$. Nach Satz 8.21 sollte $[Y_S, X_S]$ ι-verwandt zu $[\partial_x, X] = \partial_z$. Aber dann sollte das Bild von $\mathrm{d}\iota$ die vier linear unabhängigen Vektoren $X, W, \partial_x, \partial_z$ enthalten, was ein Widerspruch ist.

Kovariante Ableitungen

Es $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Es sei

$$F : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \qquad F(u) := (u, f(u))$$

die Einbettung, deren Bild $M := F(U)$ der Graph von f ist. Dann ist $\iota : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Karte F^{-1}. Die Koordinaten Vektorfelder $(\partial_i := \frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^n$ geben eine globale Trivialisierung von TM. Unten identifizieren wir stets T_pM mit $\mathrm{d}_p\iota(T_pM) \subset T_{\iota(p)}\mathbb{R}^{n+1}$.

Es sei weiter $\mathrm{Pr}^\perp : M \times \mathbb{R}^{n+1} \to TM$ die orthogonale Projektion auf TM bezüglich dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wir definieren $\nabla^M \in \mathrm{kA}(TM)$ als $\nabla^M : \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^*M \otimes TM)$

$$\nabla^M_v X = \mathrm{Pr}^\perp \left(p, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \tilde{X}(\gamma(t)) \right), \qquad \forall\, p \in M,\ v \in T_pM,$$

wobei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine beliebige glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$ ist und $\tilde{X} : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ die Koordinatendarstellung von $\mathrm{d}_p\iota \cdot X$ in der Standardbasis von $T_{\iota(p)}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Setzen Sie

$$\nu : U \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad \nu(u) = (\mathrm{grad} f(u), -1),$$

wobei $\mathrm{grad} f(u) := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Pr}^\perp(F(u), \eta) = \mathrm{d}\iota^{-1}\Big(F(u), \eta - \frac{\langle \eta, \nu(u) \rangle}{1 + |\mathrm{grad} f(u)|^2} \nu(u) \Big), \quad \forall\, u \in U,\ \forall\, \eta \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

b) (2 Punkte) Es seien ω^i_j die 1-Formen, welche die Matrixkomponenten der Zusammenhangsform ω bezüglich des globalen Rahmens $\partial_1, \dots, \partial_n$ von TM bilden. Beweisen Sie, dass

$$\omega^k_j = \frac{\partial_k f(u)}{1 + |\mathrm{grad}\, f(u)|^2} \mathrm{d}_u(\partial_j f).$$

c) (2 Punkte) Finden Sie die Matrix-Darstellung Ω der Krümmung von ∇^M bezüglich des Rahmens $\partial_1, \dots, \partial_n$ von TM.

d) (1 Punkt) Es sei nun $u \in U$, sodass $\mathrm{grad} f(u) = 0$. Leiten Sie aus dem allgemeinen Fall Ausdrücke her für $\omega(u)$ und $\Omega(u)$ in diesem Fall.

e) (1 Punkt) Es sei nun $n = 2$ und $\mathrm{grad} f(u) = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\Omega(u) = \det(\mathrm{Hess} f(u))\, \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisidee

a)

Es sei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $g(x,z) = f(x) - z$, sodass $M = g^{-1}(0)$. Dann $\mathrm{d}g = \mathrm{d}f - \mathrm{d}z = \sum_{i=1}^n \partial_i f \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}z$ ist nie null. Es folgt, dass $T_{F(u)}M = \ker \mathrm{d}_{F(u)}g = \nu(u)^\perp$. Die orthogonale Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \to \nu(u)^\perp$ ist gegeben als

$$\eta \mapsto \eta - \frac{\langle \eta, \nu(u)\rangle}{|\nu(u)|^2}\nu(u)$$

Da $|\nu(u)|^2 = \mathrm{grad} f$, Punkt a) folgt.

b) Wir haben

$$\mathrm{d}_p\iota \cdot \partial_i = \mathrm{d}_u F \cdot \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_i f \frac{\partial}{\partial z}.$$

Also

$$\begin{aligned}
\nabla^M \partial_j &= \mathrm{Pr}^\perp\Big(p, \mathrm{d}(\partial_j f) \otimes \frac{\partial}{\partial z}\Big) \\
&= \mathrm{d}\iota^{-1}\Big(\mathrm{d}(\partial_j f) \otimes \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}(\partial_j f)}{1 + |\mathrm{grad} f|^2} \otimes \Big(\sum_{k=1}^n \partial_k f \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big) \\
&= \mathrm{d}\iota^{-1}\Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial_k f \mathrm{d}(\partial_j f)}{1 + |\mathrm{grad} f|^2} \otimes \Big(\frac{\partial}{\partial x^i} + \partial_i f \frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial_k f \mathrm{d}(\partial_j f)}{1 + |\mathrm{grad} f|^2} \otimes \partial_k.
\end{aligned}$$

Die Formel für ω_J^k folgt nun aus der Definition von Zusammenhangsformen.

c) Wir benutzen die Tatsache, dass $\mathrm{dd} = 0$:

$$\begin{aligned}
\Omega_j^k &= \mathrm{d}\omega_j^k + \sum_{\ell=1}^n \omega_\ell^k \wedge \omega_j^\ell \\
&= \mathrm{d}\Big(\frac{\partial_k f}{1 + |\mathrm{grad} f|^2}\Big)\mathrm{d}(\partial_j f) + \frac{\partial_k f}{1 + |\mathrm{grad} f|^2}\mathrm{dd}(\partial_j f) \\
&\quad + \frac{1}{(1 + |\mathrm{grad} f|^2)^2}\sum_{\ell=1}^n \partial_k f \partial_\ell f \cdot \mathrm{d}(\partial_\ell f) \wedge \mathrm{d}(\partial_j f) \\
&= \frac{\mathrm{d}(\partial_k f) \wedge \mathrm{d}(\partial_j f)}{1 + |\mathrm{grad} f|^2} - \partial_k f \frac{\mathrm{d}(|\mathrm{grad} f|^2)}{(1 + |\mathrm{grad} f|^2)^2} \wedge \mathrm{d}(\partial_j f) + \partial_k f \frac{\mathrm{d}(|\mathrm{grad} f|^2)}{2(1 + |\mathrm{grad} f|^2)^2} \wedge \mathrm{d}(\partial_j f) \\
&= \frac{\mathrm{d}(\partial_k f) \wedge \mathrm{d}(\partial_j f)}{1 + |\mathrm{grad} f|^2} - \partial_k f \frac{\mathrm{d}(|\mathrm{grad} f|^2)}{2(1 + |\mathrm{grad} f|^2)^2} \wedge \mathrm{d}(\partial_j f).
\end{aligned}$$

d) Wenn $\mathrm{grad} f(u) = 0$, dann $\partial_i f(u) = 0$ für alle i und wir bekommen

$$\omega(u) = 0, \qquad \Omega_j^k(u) = \mathrm{d}_u(\partial_k f) \wedge \mathrm{d}_u(\partial_j f).$$

Insbesondere ist $\Omega_j^k = -\Omega_k^j$.

e) Für $n = 2$ müssen wir nur Ω_2^1 wegen der Antisymmetrie von Ω berechnen:

$$\begin{aligned}
\Omega_2^1 = \mathrm{d}(\partial_1 f) \wedge \mathrm{d}(\partial_2 f) &= (\partial_{11} f \mathrm{d}u^1 + \partial_{21} f \mathrm{d}u^2) \wedge (\partial_{12} f \mathrm{d}u^1 + \partial_{22} f \mathrm{d}u^2) \\
&= (\partial_{11} f \partial_{22} f - \partial_{21} f \partial_{12} f)\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2.
\end{aligned}$$