G. Benedetti, K. E. Wiegand

Probeklausur zur Vorlesung Differentialgeometrie II
am 5. Februar 2020

Name:	
Matrikelnummer:	
Studiengang:	
Übungsleiter:	

Beginn der Klausur: ca. 9:00 Uhr, Dauer: 120 Minuten.

Schreiben Sie Ihre Lösungen zu Aufgaben 1-4 in die Kästen nach den jeweiligen Aufgaben.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bei Bedarf erhalten Sie mehr Papier. Es werden nur für lesbare Lösungen Punkte vergeben.

Die Lösungen der Aufgaben sollen mit „Tinte" (dokumentenecht) erfolgen.

Die Heftung dürfen Sie während der Klausur entfernen, bei Abgabe werden alle Blätter von uns zusammengeheftet.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
mögliche Punkte	8	8	10	8	34
erreichte Punkte					

Note:

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 1

Es sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir schreiben $\mathrm{Iso}(M, g)$ für die Isometrie-Gruppe von g. Das heißt: $F \in \mathrm{Iso}(M, g)$ genau dann, wenn $F : M \to M$ ein Diffeomorphismus mit $F^* g = g$ ist.

(a) *(4 Punkte)* Es sei $p_0 \in M$ fest und es sei angenommen, dass für alle $p \in M$ ein $F \in \mathrm{Iso}(M, g)$ existiert, sodass $F(p_0) = p$. Zeigen Sie, dass die Skalarkrümmung $\mathrm{skal} : M \to \mathbb{R}$ von g konstant ist.

(b) *(4 Punkte)* Es seien $p_0 \in M$ und $v_0 \in T_{p_0}M$, $|v_0| = 1$ fest und es sei angenommen, dass für alle $p \in M$ und $v \in T_pM$, $|v| = 1$ ein $F \in \mathrm{Iso}(M, g)$ existiert, sodass $F(p_0) = p$ und $\mathrm{d}_{p_0}F \cdot v_0 = v$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\mathrm{Ric} = c(n-1)g$ gilt.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 2

Es sei M eine Fläche mit Rand, die diffeomorph zur abgeschlossene Scheibe $D^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist. Es sei g eine Metrik auf M, sodass ∂M total geodätisch ist.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $p \in M$ mit $K(p) > 0$ existiert.

Es sei zusätzlich angenommen, dass $K > 0$ und betrachten Sie die Menge $\mathcal{G}$ der eingebetteten Geodätischen $\gamma : [0,1] \to M$, sodass $\gamma(0), \gamma(1) \in \partial M$ und die Tangentialvektoren $\dot\gamma(0)$ und $\dot\gamma(1)$ senkrecht zu ∂M stehen.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie: die Schnittmenge $\gamma_1([0,1]) \cap \gamma_2([0,1])$ ist nicht leer für jedes Paar $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass alle stückweise immersierten Kurven $\delta : [0,1] \to M$ *mit* $\delta(0) = \delta(1)$ *und* $\delta|_{[0,1)}$ *injektiv der Rand eines* m*-Ecks* $N \subset M$ *sind.*

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 3

Es sei (M, g) eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei $N \subset M$ eine zusammenhängende, abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und $p \in M \setminus N$ ein Punkt. Setzen Sie

$$d := \inf_{q \in N} d_g(p, q).$$

(a) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass $d > 0$.

Betrachten Sie die Menge

$$\mathscr{G} := \{\gamma : [0,1] \to M \text{ Geodätische} \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) \in N,\ L_g(\gamma) = d\}.$$

(b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathscr{G}$ nicht leer ist.

Es sei $\gamma \in \mathscr{G}$. Zeigen Sie:

(c) *(1 Punkt)* $\dot{\gamma}(1)$ steht senkrecht zu $T_{\gamma(1)}N$,

(d) *(1 Punkt)* γ ist injektiv,

(e) *(1 Punkt)* $\gamma(t) \notin N$ für alle $t \in [0, 1)$.

Es sei nun $\tilde{\gamma} \neq \gamma$ ein weiteres Element in $\mathscr{G}$.

(f) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass sich $\gamma|_{(0,1)}$ und $\tilde{\gamma}|_{(0,1)}$ nicht schneiden.

Es sei nun zusätzlich angenommen, dass M eine Cartan-Hadamard Mannigfaltigkeit ist und dass N total geodätisch ist.

(g) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathscr{G}$ genau ein Element besitzt.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine orientierte Riemannsche Fläche und $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Es sei $p := \gamma(0)$ und $v := \dot\gamma(0)$.

(a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass eine positiv orientierte Karte $\varphi = (x, y) : U \to (-\epsilon_0, \epsilon_0)^2$ um p existiert, sodass $\epsilon_0 \le \epsilon$, $\varphi \circ \gamma(t) = (t, 0)$ und $(\varphi^{-1})^* g_{(t,0)} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ gelten.

Es sei nun $\delta : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to U$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, sodass $\delta(0) = p$, $\dot\delta(0) = v$.

(b) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}(y\circ\delta)}{\mathrm{d}t} = g_\delta((\operatorname{grad} y) \circ \delta, \dot\delta)$, wobei $y : U \to (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ die zweite Koordinate von φ ist.

(c) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}^2(y\circ\delta)}{\mathrm{d}t^2}(0) = \kappa_\delta(0)$, wobei $\kappa_\delta : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to \mathbb{R}$ die geodätische Krümmung von δ darstellt.

(d) *(1 Punkt)* Wenn $\kappa_\delta(0) > 0$ gilt, schließen Sie daraus, dass ein $\epsilon_2 \le \epsilon_1$ existiert, sodass $y(\delta(t)) > 0$ für alle $t \in (-\epsilon_2, \epsilon_2)$, $t \neq 0$.

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:....................................Matrikel-Nr.:................

Konzeptseite, Name:. . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . Matrikel-Nr.: . . . .