Probeklausur

Aufgabe 1

(M,g) n-dim Riem. Mfkt.

$Iso(M,g)$ Isometriegruppe von g

(a) $p_0 \in M$ s.d. für alle $p \in M$ ex. $F \in Iso(M,g)$ s.d. $F(p_0) = p$.

z.z. $skal: M \to \mathbb{R}$ ist konstant.

Beweis: Sei $e_1, \dots, e_n$ eine ONB von $T_{p_0}M$.

Aus der Vorlesung gilt für Riem. Mfkt.:

(1 Punkt) $skal(p_0) = \sum_{i \neq j} R(e_i, e_j, e_j, e_i)$

(unab. von der Wahl der ONB)

(1 Punkt) F Isometrie $\Rightarrow$ $d_{p_0}F e_1, \dots, d_{p_0}F e_n$ ist ONB von T_pM

für $F(p_0) = p$.

Sei $p \in M$, dann ex. $F \in Iso(M,g)$ mit $F(p_0) = p$.

Also $skal(p) = \sum_{i \neq j} R_p(d_{p_0}Fe_i, d_{p_0}Fe_j, d_{p_0}Fe_j, d_{p_0}Fe_i)$

$= \sum_{i \neq j} R_{F(p_0)}(\dots)$

(2 Punkte) $= \sum_{i \neq j} (F^*R)_{p_0}(e_i, e_j, e_j, e_i)$

F Isometrie $= \sum_{i \neq j} R_{p_0}(e_i, e_j, e_j, e_i)$

$= skal(p_0)$

$\Rightarrow$ skal ist konstant.

(b) $p_0 \in M$, s.d. für alle $p \in M$ ex. $F \in Iso(M,g)$: $\cdot\ F(p_0) = p$

$v_0 \in T_{p_0}M$, $|v_0| = 1$ $\quad v \in T_pM$ $|v| = 1$ $\quad \cdot\ d_{p_0}F v_0 = v$

z.z. Es ex. $c \in \mathbb{R}$ s.d. $Ric(v,w) = c \cdot (n-1)\, g(v,w)$

Beweis: Nach Vorl. gilt für Riem. Mfkt.

(1 Punkt) $Ric_p(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R_p(e_i, X, Y, e_i)$

für $e_1, \dots, e_n$ ONB von T_pM.

Sei nun $e_1, \dots, e_n$ eine ONB von $T_{p_0}M$.

Sei $p \in M$, $v \in T_pM$, $|v| = 1$

Wie oben ist $d_{p_0}Fe_i$ eine ONB von T_pM

Dann gilt:

$$Ric_p(v,v) = \sum_{i=1}^{n} R_p(d_{p_0}Fe_i, v, v, d_{p_0}Fe_i)$$

$$= \sum_i R_{F(p_0)}(d_{p_0}Fe_i, d_{p_0}Fv_0, d_{p_0}Fv_0, d_{p_0}Fe_i)$$

$$= \sum_i (F^*R)_{p_0}(e_i, v_0, v_0, e_i)$$ (2 Punkte)

F Isometrie $$= \sum_i R_{p_0}(e_i, v_0, v_0, e_i)$$

$$= Ric_{p_0}(v_0, v_0) =: c\cdot(n-1)$$

$\Rightarrow$ $Ric_p(v,v) = c\cdot(n-1)\cdot g_p(v,v)$ für alle p und $v \in T_pM$ $|v|=1$

Ric bilin. $\Rightarrow$ $Ric_p(v,v) = c\cdot(n-1)\cdot g_p(v,v)$ für alle p und $v \in T_pM$

Ric symm & bilin. $\Rightarrow$ $Ric_p(v,w) = c\cdot(n-1)\cdot g_p(v,w)$ für alle p, $v,w \in T_pM$. (1 Punkt)

Aufgabe 2

$M \cong D^2$ Fläche mit Rand

g Metrik auf M, s.d. ∂M total geodätisch

(a) z.z.! Es ex. $p \in M$ mit $K(p) > 0$

Beweis: Euler Charakteristik ist ein topol. Inv., daher

(1 Punkt) $\chi(M) = \chi(D^2) = 1$

Ann.: $K \leq 0$

(1 Punkt) Nach dem Satz von Gauß-Bonnet gilt

$$2\pi = 2\pi \cdot \chi(M) = \int_M K \, dA + \int_{\partial M} k_{\partial M} + \sum \vartheta_p$$

(1 Punkt) $\ulcorner K \leq 0$, ∂M total geodätisch, keine Aussenwinkel (glatter Rand) $\lrcorner$

$$\leq 0 + 0 + 0 = 0 \quad ⚡$$

$\Rightarrow$ Es ex. $p \in M$ mit $K(p) > 0$.

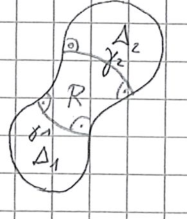
$K > 0$ auf M, $\mathcal{G}$ Menge der eingebetteten Geodätischen $\gamma : [0,1] \to M$, s.d. $\gamma(0), \gamma(1) \in \partial M$, $\dot\gamma(0), \dot\gamma(1)$ senkrecht zu ∂M.

(b) z.z.! Die Schnittmenge $\gamma_1([0,1]) \cap \gamma_2([0,1])$ ist nicht leer für jedes Paar $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$ ~~mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$~~.

Beweis: Ann. Es ex. ein Paar $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}$ mit leerer Schnittmenge.

(1 Punkt) Dann zerlegen γ_1, γ_2 M in drei zusammenhängende Komp.

(1 Punkt) Jeder Abschl. der Zsh. Komp. ist homöomorph zu D^2



Nach Vor. an $\mathcal{G}$ sind alle Außenwinkel $\pi/2$.

(1 Punkt) Der Satz von Gauß-Bonnet für R gilt

$$2\pi = 2\pi \cdot \chi(R) = \int_R K \, dA + \int_{\partial R} k_{\partial R} + \sum \vartheta_p$$

(2 Punkte) $\ulcorner K > 0$ R keine Nullmenge, γ_1, γ_2 und ∂M geodätisch, $\vartheta_p = \pi/2 \lrcorner$

$$> 0 + 0 + 2\pi \quad ⚡$$

$\Rightarrow$ γ_1 und γ_2 haben Schnittpunkt.

Aufgabe 3

(M,g) vollst. Riem. Mfkt. (zsh.)

$N \subset M$ zsh., abg. Umfkt.

$p \in M \setminus N$

$d := \inf_{q \in N} d_g(p,q)$

(a) **z.z.:** $d > 0$

Beweis: Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in N mit $d_g(p,q_n) \longrightarrow d$.

o.E. sei $d_g(p,q_n) \geq d_g(p,q_{n+1})$.

Dann gilt: $(q_n) \subseteq \overline{B_R(p)}$ für R hin. groß

(M,g) vollst. & Satz von Hopf-Rinow $\Rightarrow \overline{B_R(p)}$ kompakt

$\rightarrow$ (q_n) hat konv. Teilfolge (weiterhin (q_n) genannt)

$q_n \rightarrow q_\infty$ mit $d_g(p,q_\infty) = \inf d_g(p,q_\infty) = d$

$\Rightarrow$ $d = d_g(p,q_\infty) > 0$

Alternativ: Ann: $d = 0$, dann ex Folge $q_n \in N$ mit $d(q_n,p) \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ $q_n \rightarrow p$ $\Rightarrow$ p liegt im Abschluss von N

N abg $\Rightarrow$ $p \in N$ $\lightning$

~~(b)~~

$\mathcal{G} := \{ \gamma : [0,1] \rightarrow M$ Geodätische $\mid \gamma(0) = p,\ \gamma(1) \in N,\ L_g(\gamma) = d \}$

(b) **z.z.:** $\mathcal{G}$ ist nicht-leer

Beweis: Aus (a) wissen wir, dass es $q \in N$ mit $d = d_g(p,q)$ gibt.

Da (M,g) vollständig ist gibt es nach dem Satz von Hopf-Rinow eine längenrealisierende Geodätische mit $\gamma(T_1) = p$, $\gamma(T_2) = q$, $\gamma : [T_1, T_2] \rightarrow M$.

Nach Umparam. ist γ auf $[0,1]$ def.

Achtung: Wenn man in a) mit Widerspruch argum. hat muss man den Punkt $q \in N$ mit $d_g(p,q) = d$ noch finden.

Sei $\gamma \in \mathcal{G}$

c) z.z. $\dot{\gamma}(1)$ steht senkrecht zu $T_{\gamma(1)} N$

Beweis: Gilt nach dem Satz über die erste Variation der Länge.

Ausführlicher: Sei $v \in T_{\gamma(1)} N$ und $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$

eine glatte Fam. von Kurven mit $\Gamma(0,t) = \gamma(t)$

$\Gamma(s,0) = p$

$\Gamma(s,1) \in N$

$\partial/\partial s \, \Gamma_s = v$

Dann gilt für die glatte Variation der Länge.

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L_g(\gamma_s) = -\int_0^1 g_{\gamma(t)}(X^\Gamma, {}^\gamma\nabla_{\partial t}\dot{\gamma}(t))\,dt + g(X^\Gamma(1), \dot{\gamma}(1)) - g(X^\Gamma(0), \dot{\gamma}(0))$$

$$= 0 + g(X^\Gamma(1), \dot{\gamma}(1)) - \cancel{g(X^\Gamma(0)} \; 0$$

γ krit. Pkt $\Rightarrow \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L_g(\gamma_s) = 0 \Rightarrow$ Beh

d) z.z. γ ist injektiv

Beweis: Ann: Es ex. $t_0 < t_1$ mit $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$

Betrachte die Kurve $\delta : [0,1] \to M$ mit

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [0,t_0] \cup [t_1, 1] \\ \gamma(t_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\delta(0) = \gamma(0) = p$, $\delta(1) = \gamma(1) \in N$

$d_g(p,q) \leq L_g(\delta) < L_g(\gamma) = d = \inf_{q \in N} d_g(p,q)$ ↯

e) z.z. $\gamma(t) \notin N \quad \forall t \in [0,1)$

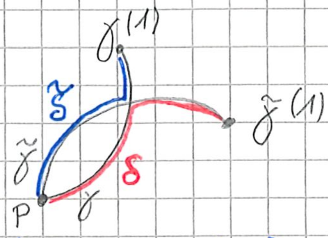
Beweis: Ann.: $\exists t_0 : \gamma(t_0) \in N$

Dann $d(p, \gamma(t_0)) \leq L_g(\gamma|_{[0,t_0]}) < L_g(\gamma) = \inf_{q \in N} d_g(p,q)$ ↯

Auch direkter Beweis möglich.

f) $\tilde{\gamma}, \gamma \in \mathcal{G}$, $\gamma \neq \tilde{\gamma}$

zz: $\gamma|_{(0,1)}$ und $\tilde{\gamma}|_{(0,1)}$ schneiden sich nicht.



Beweis: Betrachte $\delta = \gamma|_{[0,s_0]} \cdot \tilde{\gamma}|_{[t_0,1]}$

(1 Punkt) $\tilde{\delta} = \tilde{\gamma}|_{[0,t_0]} \circ \gamma|_{[s_0,1]}$

⌜Ann: $\gamma, \tilde{\gamma}$ schneiden sich, sagen wir in $\gamma(s_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$, $s_0, t_0 \in (0,1)$.⌟

$\delta, \tilde{\delta}$ sind nicht diff'bar, da sich $\gamma, \tilde{\gamma}$ transversal schneiden

(sonst wären sie gleich ↗ Eind. der Lsg einer DGL)

$$L_g(\delta) + L_g(\tilde{\delta}) = L_g(\gamma|_{[0,s_0]}) + L_g(\tilde{\gamma}|_{[t_0,1]}) + L_g(\tilde{\gamma}|_{[0,t_0]}) + L_g(\gamma|_{[s_0,1]})$$
$$= L_g(\gamma) + L_g(\tilde{\gamma})$$
$$= 2d.$$

Es gibt nun zwei Fälle

1. Fall $L_g(\delta)$ oder $L_g(\tilde{\delta}) < d$ Widerspruch zu $d = \inf_{q \in N} d_g(p,q)$ wie oben.

2. Fall: $L_g(\delta) = d = L_g(\tilde{\delta})$.

(1 Punkt) Dann ist δ eine Kurve von p nach $\tilde{\gamma}(1)$, welche die Länge minimiert ↯ Alle minimierenden Kurven sind diff'bar.

g) M Cartan-Hadamard, N total geodätisch

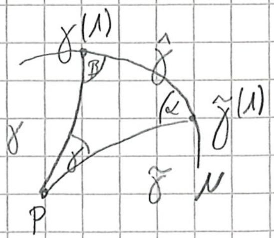
zz: $\mathcal{G}$ besitzt genau ein Element.

Beweis: Ann: Es ex. $\gamma, \tilde{\gamma}$, $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ in $\mathcal{G}$.

M vollst., N abg $\Rightarrow$ N vollst.

(1 Punkt) N zusammenh. $\Rightarrow$ Ex. minim. Geodätische $\hat{\gamma}$ von $\gamma(1)$ zu $\tilde{\gamma}(1)$ in N (nach Hopf-Rinow)

N total geodätisch $\Rightarrow$ $\hat{\gamma}$ ist Geodätische in M.



Wir betrachten das Geod. Dreieck mit Kanten $\gamma, \tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$ und inneren Winkeln α, β, γ'. Nach b) gilt: $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$

(1 Punkt) M CH-Mfkt: $\pi \geq \alpha + \beta + \gamma' = \pi + \gamma' \Rightarrow \gamma' = 0$

$\Rightarrow \gamma = \tilde{\gamma}$ ↯

Aufgabe 4

(M, g) orientierte Riem. Fläche, $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ nach BL param. Geod.

$p = \gamma(0)$, $v = \dot\gamma(0)$

(a) Z.z.: Es ex. pos. orientierte Karte $\varphi = (x, y): U \to (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)^2$ um p

s.d. $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$, $\varphi \circ \gamma(t) = (t, 0)$, $(\varphi^{-1})^* g_{(t,0)} = dx^2 + dy^2$

Beweis: Ergänze $v \in T_p M$ durch w zu einer orientierten ONB. ($|v| = 1$)

Setze w durch Paralleltransport zu einem Vektorfeld $w(t)$ entlang γ fort.

Es gilt $|w(t)| = 1$ für alle t und $g(w(t), \dot\gamma(t)) = 0$

und $\dot\gamma(t), w(t)$ orientierte Basis von $T_{\gamma(t)} M$

(1 Punkt) Betrachte die Abb. $\psi: V \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$

$(x, y) \longmapsto \exp_{\gamma(x)}(y \cdot w(x))$

Für x klein genug gilt: $\psi(x, 0) = \exp_{\gamma(x)}(0) = \gamma(x)$

Außerdem $(\partial_x \psi)(x, 0) = \partial_x \gamma(x) = \dot\gamma(x)$

$(\partial_y \psi)(x, 0) = (d_{\psi(x,0)} \exp_{\gamma(x)})(w(x)) = w(x)$

ψ ist diff'bar und das Differenzial ist in $(0,0)$ invertierbar

(1 Punkt) Impl. Fkt. Satz $\Rightarrow$ Es ex. eine Umg von $(0,0)$ (o.E. $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)^2$)

s.d. $\varphi = \psi^{-1}$ auf $\psi((-\varepsilon_0, \varepsilon_0)^2)$ def. ist.

Dann gilt $\cdot$ $\varphi \circ \gamma(t) = (t, 0)$

$(\varphi^{-1})^* g_{(t,0)} = (\psi^* g)_{(t,0)} = g_{(t,0)}(d\psi, d\psi)$

(1 Punkt) $\Rightarrow (\varphi^{-1})^* g_{(t,0)}(\partial_x, \partial_x) = g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$

$(\varphi^{-1})^* g_{(t,0)}(\partial_x, \partial_y) = g(\dot\gamma, w) = 0$

$(\varphi^{-1})^* g_{(t,0)}(\partial_y, \partial_y) = g(w, w) = 1$

$\Rightarrow (\varphi^{-1})^* g_{(t,0)} = dx^2 + dy^2$

$\delta: (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to U$ nach BL param. Kurve mit $\delta(0) = p$, $\dot\delta(0) = v$

b) Z.z.: $\frac{d(y \circ \delta)}{dt} = g_\delta((\operatorname{grad} y) \circ \delta, \dot\delta)$

Beweis: $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (y \circ \delta) \underset{\text{Kettenregel}}{=} d_{\delta(t_0)} y(\dot\delta(t_0)) \underset{\text{Def grad}}{=} g_{\delta(t_0)}((\operatorname{grad} y)(\delta(t_0)), \dot\delta(t_0))$

$\Rightarrow$ Beh.

c) Z.z.: $\frac{d^2(y\circ\delta)}{dt^2} = \varkappa_\delta(0)$

Beweis: $\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}(y\circ\delta) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_\delta((\operatorname{grad} y)\circ\delta, \dot\delta)$

$= g_{\delta(0)}({}^\delta\nabla_{\partial_t}(\operatorname{grad} y\circ\delta), \dot\delta) + g_{\delta(0)}(\operatorname{grad} y\circ\delta, {}^\delta\nabla_{\partial_t}\dot\delta)$ (1 Punkt)

Nach Vorl. gilt: ${}^\delta\nabla_{\partial_t}\dot\delta = \varkappa_\delta\, j\,\dot\delta$ (1 Punkt)

$= \varkappa_\delta\, j\, v = \varkappa_\delta\, w$

In $\delta(0) = p$ gilt $\operatorname{grad} y = \partial_y = w$

$\Rightarrow g_{\delta(0)}(\operatorname{grad} y\circ\delta(0), {}^\delta\nabla_{\partial_t}\dot\delta) = g(w, \varkappa_\delta\cdot w) = \varkappa_\delta$

Weiter gilt: $g_p({}^\delta\nabla_{\partial_t}(\operatorname{grad} y\circ\delta), \dot\delta(0)) = g_p(\nabla_{\dot\delta}\operatorname{grad} y, v)$

$\nabla_{\dot\delta}$ hängt nur von $\dot\delta(0)$ ab $= g_p(\nabla_v \operatorname{grad} y, v)$

$= g_p(\nabla_{\dot\gamma}\operatorname{grad} y, \dot\gamma)$ (1 Punkt)

$= \frac{d}{dt} g_p(\operatorname{grad} y, \dot\gamma) - g_p(\operatorname{grad} y, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)$

γ Geod. $= \frac{d}{dt}\, 0 - 0 = 0$

$\Rightarrow$ Beh.

(d) $\varkappa_\delta(0) > 0$

Z.z.: $\exists\ \varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ s.d. $y(\delta(t)) > 0$ für alle $t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$, $t \neq 0$.

Beweis: $\frac{d^2}{dt^2}(y\circ\delta)(0) = \varkappa_\delta(0) > 0 \Rightarrow$ Es ex. Umg. $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ s.d. $\frac{d^2}{dt^2}(y\circ\delta) > 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(y\circ\delta)$ monoton wachsend

mit $\frac{d}{dt}(y\circ\delta)(0) = g(\operatorname{grad} y\circ\delta(0), \dot\delta(0))$

$= g(\partial_y, \partial_x) = 0$

monoton w. $\Rightarrow \frac{d}{dt}(y\circ\delta) \begin{cases} > 0 & t\in(0,\varepsilon_2) \\ < & t\in(-\varepsilon_2, 0) \end{cases}$

$(y\circ\delta)(0) = y(p) = 0$

Integrieren von $\frac{d}{dt}(y\circ\delta) \Rightarrow y\circ\delta > 0\ \forall\, t \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)\ t \neq 0.$