G. Benedetti, K. E. Wiegand

Häusliche Nachklausur zur Vorlesung Differentialgeometrie II am 20. Mai 2020

Name:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Übungsleiter:

Beginn der Klausur: ca. 11:00 Uhr, Dauer: 150 Minuten.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es werden nur für lesbare Lösungen Punkte vergeben.

Die Lösungen der Aufgaben sollen mit „Tinte“ (dokumentenecht) erfolgen.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
mögliche Punkte	8	10	10	9	37
erreichte Punkte					

Note:

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 1

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, 1] \to M$ eine Geodätische mit Einheitsgeschwindigkeit.

(a) *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition von Jacobi-Feldern entlang γ.

Es seien J_1 und J_2 zwei Jacobi-Felder entlang γ.

(b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie: Die Funktion

$$t \in [0, 1] \ \mapsto\ g_{\gamma(t)}(J_1(t), \dot{J}_2(t)) - g_{\gamma(t)}(J_2(t), \dot{J}_1(t))$$

ist konstant.

Es sei nun angenommen, dass M eine orientierte Fläche ist. Wir betrachten ein orthogonales Jacobi-Feld $J = a\,\jmath \cdot \dot{\gamma}$ entlang γ, wobei $a : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist und $\jmath$ die Drehung um neunzig Grad ist.

(c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie: Die Funktion a genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{a} + K(\gamma)a = 0,$$

wobei K die Gauß-Krümmung von M ist.

Es seien nun $J_1 = a_1\,\jmath \cdot \dot{\gamma}$ und $J_2 = a_2\,\jmath \cdot \dot{\gamma}$ zwei orthogonale Jacobi-Felder.

(d) *(2 Punkte)* Zeigen Sie: Die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ \dot{a}_1(t) & \dot{a}_2(t) \end{pmatrix}$$

ist konstant bezüglich $t \in [0, 1]$.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Aufgabe 2

Es sei $(M, g) \subset (\mathbb{R}^3, g_{\mathbb{R}^3})$ das Paraboloid $\{\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = z\}$, wobei g die Pullback-Metrik ist. Wir betrachten Polarkoordinaten um $(0, 0, 0) \in M$:

$$f : (0, +\infty) \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to M, \qquad f(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, \tfrac{1}{2}r^2)$$

und die Orientierung auf M, die durch f induziert wird.

(a) *(2+1+1 Punkte)* Schreiben Sie die Metrik g, die Volumenform vol und die Drehung $\jmath : TM \to TM$ um neunzig Grad in Koordinaten (r, ϕ).

Für jedes $r > 0$ betrachten Sie die Teilfläche $M_r := M \cap \{z \leq \frac{1}{2}r^2\}$.

(b) *(1 Punkt)* Bestimmen Sie die Euler Charakteristik von M_r.

(c) *(3 Punkte)* Beweisen Sie die folgende Formel für die geodätische Krümmung des Randes von M_r:

$$\kappa(r) := \kappa_{\partial M_r} = \frac{1}{r\sqrt{1 + r^2}}$$

(d) *(2 Punkt)* Zeigen Sie

$$\alpha(r) := \int_{M_r} K\,\mathrm{vol} = 2\pi\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}}\Big).$$

und berechnen Sie den Limes $\lim_{r \to +\infty} \alpha(r)$.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 3

Es sei $F : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion.

(a) *(2 Punkte)* Geben Sie die Definition der vertikalen Distribution $\mathcal{V}$ und der horizontalen Distribution $\mathcal{H}$. Geben Sie weiter die Definition von vertikalen Vektorfeldern $\widetilde{Z} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ und der horizontalen Hochhebung $X \mapsto X^{\mathcal{H}}$ für $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Unten können Sie die folgende Formel ohne Beweis benutzen:

- Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt
$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathcal{H}}} Y^{\mathcal{H}} = (\nabla_X Y)^{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}},$$
wobei $\widetilde{\nabla}$ die Levi-Civita Ableitung von $\widetilde{g}$, ∇ die Levi-Civita Ableitung von g und $\widetilde{W} \mapsto \widetilde{W}^{\mathcal{V}}$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ die orthogonale Projektion auf die vertikale Distribution darstellt.

Es seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $\widetilde{Z} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ vertikal. Zeigen Sie:

(b) *(1 Punkt)* $[X^{\mathcal{H}}, \widetilde{Z}]$ ist vertikal.

(c) *(1 Punkt)* $[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}] = [X, Y]^{\mathcal{H}} + [X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}}$.

(d) *(2 Punkte)* $\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Z}} X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{X^{\mathcal{H}}} \widetilde{Z}, Y^{\mathcal{H}})$.

(e) *(2 Punkte)* $\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{X^{\mathcal{H}}} \widetilde{Z}, Y^{\mathcal{H}}) = -\frac{1}{2}\widetilde{g}(\widetilde{Z}, [X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}})$.

Folgern Sie daraus, dass für alle $X, Y, W_1, W_2 \in \mathfrak{X}(M)$ die folgende Formel gilt:

(f) *(2 Punkte)* $\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]} W_1^{\mathcal{H}}, W_2^{\mathcal{H}}) = g(\nabla_{[X,Y]} W_1, W_2) - \frac{1}{2}\widetilde{g}\big([X^{\mathcal{H}}, Y^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}}, [W_1^{\mathcal{H}}, W_2^{\mathcal{H}}]^{\mathcal{V}}\big)$.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $M_0, M_1 \subset M$ zwei kompakte, total geodätische Untermannigfaltigkeiten von M. Es sei angenommen, dass

$$(\star)\quad M_0 \cap M_1 = \emptyset, \qquad (\star\star)\quad \dim M_0 + \dim M_1 \geq \dim M.$$

Es sei $\mathcal{C} = \{\gamma : [0,1] \to M \mid \gamma(0) \in M_0,\ \gamma(1) \in M_1\}$ die Menge der stückweise glatten Kurven, die M_0 und M_1 verbinden.

(a) *(2 Punkte)* Beweisen Sie, dass eine Geodätische $\delta \in \mathcal{C}$ existiert, sodass

$$\ell := L_g(\delta) = \min_{\gamma \in \mathcal{C}} L_g(\gamma)$$

und dass $\ell > 0$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : M_0 \times M_1 \to \mathbb{R}$, $f(p_0, p_1) = d_g(p_0, p_1)$.

(b) *(1 Punkt)* Es sei $E_i := \{v \in T_{\delta(i)}M \mid g_{\delta(i)}(\dot{\delta}(i), v) = 0\}$ für $i = 0, 1$. Zeigen Sie, dass $T_{\delta(i)}M_i \subset E_i$ für $i = 0, 1$.

(c) *(1 Punkt)* Beweisen Sie, dass die Einschränkung der Parallelverschiebung $P : E_0 \to E_1$ entlang δ wohldefiniert ist.

(d) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass $\dim \big(P(T_{\delta(0)}M_0) \cap T_{\delta(1)}M_1\big) \geq 1$.

(e) *(1 Punkt)* Finden Sie ein normiertes, paralleles Vektorfeld $X : [0,1] \to TM$ entlang δ, sodass $g(X(t), \dot{\delta}(t)) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ und $X(i) \in T_{\delta(i)}M_i$ für $i = 0, 1$.

(f) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{H}(L_g)_\delta(X, X) = -\ell^2 \int_0^1 K(\Pi_{X(t)\dot{\delta}(t)})\mathrm{d}t,$$

wobei $\Pi_{X(t)\dot{\delta}(t)}$ die Ebene $\mathbb{R} \cdot X(t) + \mathbb{R} \cdot \dot{\delta}(t) \subset T_{\delta(t)}M$ ist.

(g) *(2 Punkte)* Argumentieren Sie per Widerspruch, dass M nicht überall positive Schnittkrümmung haben kann.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Konzeptseite, Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . Matrikel-Nr.: . . . .