G. Benedetti, U. Fuchs

Nachklausur zur Vorlesung Differentialgeometrie I
am 11. Oktober 2019

Name:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Übungsleiter:

Beginn der Klausur: ca. 9:15 Uhr, Dauer: 120 Minuten.

Schreiben Sie Ihre Lösungen zu Aufgaben 1-4 in die Kästen nach den jeweiligen Aufgaben.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bei Bedarf erhalten Sie mehr Papier. Es werden nur für lesbare Lösungen Punkte vergeben.

Die Lösungen der Aufgaben sollen mit „Tinte“ (dokumentenecht) erfolgen.

Die Heftung dürfen Sie während der Klausur entfernen, bei Abgabe werden alle Blätter von uns zusammengeheftet.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
mögliche Punkte	7	9	9	7	32
erreichte Punkte					

Note:

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 1

(a) (2 Punkte) Finden Sie eine explizite Zerlegung der Eins auf dem offenem Intervall $(0,3) \subset \mathbb{R}$ bezüglich der Überdeckung

$$\big\{(0,2),\ (1,3)\big\}.$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass eine glatte Funktion $e_3 : \mathbb{R} \to [0,1]$ existiert mit $e_3(t) = 0$ für $t \leq 0$, $e_3(t) = 1$ für $t \geq 1$ und $e_3(t) + e_3(1-t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) (1 Punkte) Finden Sie eine explizite Zerlegung der Eins auf $(0,3) \times (0,3) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Überdeckung

$$\big\{(0,2) \times (0,3),\ (1,3) \times (0,3)\big\}.$$

(c) (4 Punkte) Finden Sie eine explizite Zerlegung der Eins auf $(0,3) \times (0,3) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Überdeckung

$$\big\{(0,2) \times (0,2),\ (1,3) \times (0,2),\ (0,3) \times (1,3)\big\}.$$

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 2

Es sei $N := \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$, wobei $\mathbb{RP}^2$ die reell projektive Ebene ist. Zeigen Sie:

(a) (2 Punkt) N ist eine wohldefinierte nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{RP}^2$;

(b) (3 Punkte) N ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{RP}^2$;

(c) (3 Punkte) N ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{RP}^2$;

(d) (1 Punkt) N hat Dimension 1.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 3

Es sei $G := GL_n(\mathbb{R})$ die Gruppe der invertierbaren $n\times n$-Matrizen mit der glatten Struktur gegeben als offene Teilmenge des Vektorraums der $n \times n$-Matrizen $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n\times n}$. Insbesondere können wir Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(G)$ mit glatten Abbildungen $X : G \to \mathfrak{g}$ identifizieren.
Für alle $A \in \mathfrak{g}$ sei $L_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die glatte Abbildung $L_A(B) = A \cdot B$, wobei $\cdot$ die Matrixmultiplikation ist. Auf ähnlicher Weise definieren wir $R_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ die glatte Abbildung $R_A(B) = B \cdot A$. Insbesondere wenn $A \in G$ bekommen wir Einschränkungen $L_A : G \to G$ und $R_A : G \to G$.
Man nennt ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ *linksinvariant*, wenn für alle $A \in G$ das Vektorfeld X L_A-verwandt mit sich selbst ist. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Es gilt $\mathrm{d}_B L_A \cdot H = A \cdot H = L_A(H)$ und $\mathrm{d}_B R_A \cdot H = H \cdot A = R_A(H)$ für alle $A, B \in G$ und $H \in \mathfrak{g} \cong T_B G$.

(b) (2 Punkte) Für alle $H \in \mathfrak{g}$ ist das Vektorfeld $R_H \in \mathfrak{X}(G)$ linksinvariant. Für $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}$, gilt ausserdem $R_{H_1} = R_{H_2}$ genau dann, wenn $H_1 = H_2$.

(c) (2 Punkte) Für jedes linksinvariante $X \in \mathfrak{X}(G)$ existiert ein $H \in \mathfrak{g}$, sodass $X = R_H$.

(d) (3 Punkte) Für alle $H_1, H_2 \in \mathfrak{g}$ gilt $[R_{H_1}, R_{H_2}] = R_{H_1 \odot H_2}$, wobei

$$H_1 \odot H_2 := H_1 \cdot H_2 - H_2 \cdot H_1$$

der Kommutator der Matrizen H_1 und H_2 ist.

(e) (1 Punkt) Wenn $n = 3$, bestimmen Sie $[R_{H_1}, R_{H_2}] : G \to \mathfrak{g}$ explizit, wobei

$$H_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Name:.. Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 4

Es sei $\gamma : (a,b) \to (0,\infty) \times \mathbb{R}$ eine eingebettete Kurve mit Koordinaten $\gamma = (r,z)$, sodass $(r')^2(\theta) + (z')^2(\theta) = 1$ für alle $\theta \in (a,b)$, wobei ein Strich die Ableitung bezüglich θ gekennzeichnet. Wir definieren die Einbettung

$$\psi : (a,b) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(\theta,\phi) := \Big(r(\theta)\cos\phi, r(\theta)\sin\phi, z(\theta)\Big).$$

Dann ist $M := \psi\big((a,b)\times(0,2\pi)\big)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Wir haben den Rahmen $X := \partial_\theta$, $Y := \frac{1}{r(\theta)}\partial_\phi$ für TM. Die Levi-Civita kovariante Ableitung ∇ auf TM wird durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\nabla X = r' \mathrm{d}\phi \otimes Y, \qquad \nabla Y = -r' \mathrm{d}\phi \otimes X.$$

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Matrix ω der Zusammenhangsformen von ∇ bezüglich des Rahmens X, Y von TM.

(b) (4 Punkte) Es seien $a < \theta_0 < \theta_1 < b$, $0 < \phi_0 < \phi_1 < 2\pi$ und $\delta_\theta := \theta_1 - \theta_0$, $\delta_\phi := \phi_1 - \phi_0$. $\beta : [0, 2(\delta_\theta + \delta_\phi)] \to M$ die stetige, stückweise glatte Kurve

$$\beta(t) = \begin{cases} \psi(t+\theta_0, \phi_0) & t \in [0,\delta_\theta] \\ \psi(\theta_1, t-\delta_\theta+\phi_0) & t \in [\delta_\theta, \delta_\theta+\delta_\phi] \\ \psi(\theta_1 - (t-\delta_\theta-\delta_\phi), \phi_1) & t \in [\delta_\theta+\delta_\phi, 2\delta_\theta+\delta_\phi] \\ \psi(\theta_0, \phi_1 - (t-2\delta_\theta-\delta_\phi)) & t \in [2\delta_\theta+\delta_\phi, 2(\delta_\theta+\delta_\phi)]. \end{cases}$$

Finden Sie die Parallelverschiebung $P^\beta_{0,2(\delta_\theta+\delta_\phi)} : T_{\psi(\theta_0,\phi_0)} \to T_{\psi(\theta_0,\phi_0)}$ entlang der Kurve β als Verkettung der Parallelverschiebungen entlang der vier glatten Stücke von β. Zeigen Sie, dass $P^\beta_{0,2(\delta_\theta+\delta_\phi)}$ eine Drehung um den Winkel $(\phi_1 - \phi_0)(r'(\theta_0) - r'(\theta_1))$ bezüglich des Rahmens X, Y ist.

(c) (2 Punkte) Es sei nun $\gamma(\theta) = (\sin\theta, \cos\theta)$ mit $\theta \in (0,\pi)$, sodass M eine offene Teilmenge von S^2 ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall ∇ nicht flach ist.

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:....................................Matrikel-Nr.:................

Konzeptseite, Name:. . . . . .Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . .Matrikel-Nr.: . . . .