G. Benedetti, K. E. Wiegand

Klausur zur Vorlesung Differentialgeometrie II
am 10. Februar 2020

Name:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Übungsleiter:

Beginn der Klausur: ca. 9:00 Uhr, Dauer: 120 Minuten.

Schreiben Sie Ihre Lösungen zu Aufgaben 1-4 in die Kästen nach den jeweiligen Aufgaben.

Alle Antworten sind zu begründen.

Bei Bedarf erhalten Sie mehr Papier. Es werden nur für lesbare Lösungen Punkte vergeben.

Die Lösungen der Aufgaben sollen mit „Tinte“ (dokumentenecht) erfolgen.

Die Heftung dürfen Sie während der Klausur entfernen, bei Abgabe werden alle Blätter von uns zusammengeheftet.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	Summe
mögliche Punkte	8	10	9	9	36
erreichte Punkte					

Note:

Name:... Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 1

Es sei (M, g) eine PR-Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit ∇ die Levi-Civita kovariante Ableitung von g. Es sei $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \mathrm{End}(TM))$ das zugehörige Krümmungstensorfeld und $K : \mathscr{E}_{(M,g)} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Ric} \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, $\mathrm{skal} : M \to \mathbb{R}$ die Schnitt-, Ricci- und Skalarkrümmung von ∇, wobei $\mathscr{E}_{(M,g)}$ die Menge der Ebenen in TM bezeichnet, auf denen g nicht ausgeartet ist. Es sei $\mathrm{Ric}^\sharp \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ der Endomorphismus, der Ric bezüglich g darstellt.
Es sei nun $\lambda > 0$ eine positive reelle Zahl. Wir definieren $g_\lambda := \lambda^2 g$ und es sei ∇^λ die Levi-Civita kovariante Ableitung von g_λ. Wir bezeichnen mit R_λ, K_λ, Ric_λ, $\mathrm{Ric}^\sharp_\lambda$, skal_λ die Krümmungsgrößen von g_λ.

(a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\nabla^\lambda = \nabla$ (Sie dürfen die Aufgabe 4-3 nicht ohne Beweis benutzen).

(b) *(5 Punkte)* Schreiben Sie R_λ, K_λ, Ric_λ, $\mathrm{Ric}^\sharp_\lambda$ und skal_λ als Funktionen von R, K, Ric, $\mathrm{Ric}^\sharp$ und skal.

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 2

Es sei $M = (u_-, u_+) \times (v_-, v_+)$ das Produkt von zwei offenen Intervallen und

$$g = \frac{1}{f(u,v)^2}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2), \qquad \text{wobei} \;\; f : M \to (0, \infty).$$

Wir orientieren M durch den Rahmen ∂_u, ∂_v.
Es sei $v_0 \in (v_-, v_+)$ und $\gamma_1 : (u_-, u_+) \to M$ die Kurve $\gamma_1(u) := (u, v_0)$. Wir betrachten die Parametrisierung von γ_1 nach der Bogenlänge $\delta_1 = \gamma_1 \circ u_{\gamma_1}$, wobei $u_{\gamma_1} : (t_-, t_+) \to (u_-, u_+)$ monoton steigend ist.

(a) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass

$$\dot{\delta}_1(t) = f(u_{\gamma_1}(t), v_0) \cdot \partial_u|_{\delta_1(t)}, \qquad \forall\, t \in (t_-, t_+).$$

(b) *(2 Punkte)* Beweisen Sie die folgende Formel für die geodätische Krümmung

$$\kappa_{\delta_1}(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_{\gamma_1}(t), v_0), \qquad \forall\, t \in (t_-, t_+).$$

Für den Rest der Aufgabe können Sie auch die folgende Formel annehmen:

$$\kappa_{\delta_2}(t) = -\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_{\gamma_2}(t)), \qquad \forall\, t \in (t'_-, t'_+),$$

wobei u_0 in (u_-, u_+) liegt, $v_{\gamma_2} : (t'_-, t'_+) \to (v_-, v_+)$ eine monoton steigende Funktion ist und $\delta_2 = \gamma_2 \circ v_{\gamma_2}$ die Parametrisierung nach der Bogenlänge von $\gamma_2 : (v_-, v_+) \to M$, $\gamma_2(v) = (u_0, v)$ darstellt.

Es sei $H^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ und $g_{H^2} = \frac{1}{y^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$. Wir orientieren H^2 durch den Rahmen ∂_x, ∂_y.

(c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Halbgeraden $\{x = x_0, y > 0\}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$ total geodätisch sind und dass die Geraden $\{y = y_0\}$ mit $y_0 > 0$ geodätische Krümmung 1 besitzen, wenn sie von links nach rechts orientiert werden.

(d) *(2 Punkte)* Finden Sie einen Diffeomorphismus $F : \mathbb{R} \times (0, \pi) \to H^2$, sodass für alle $s_0 \in \mathbb{R}$ die Kurve $\theta \mapsto F(s_0, \theta)$ den Halbkreis $\mathscr{K}_{s_0} := \{x^2 + y^2 = e^{2s_0}, y > 0\}$ parametrisiert während die Kurven $s \mapsto F(s, \theta_0)$ die Halbgerade $\mathscr{G}_{\theta_0}$ parametrisiert, welche die Schnittmenge zwischen H^2 und der Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist, die einen (euklidischen) Winkel θ_0 mit der x-Achse bildet.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst euklidische Polarkoordinaten (r, θ) um $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

(e) *(1 Punkt)* Zeigen Sie, dass $F^* g_{H^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta}(\mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}\theta^2)$.

(f) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass für alle $(s_0, \theta_0) \in \mathbb{R} \times (0, \pi)$ der Halbkreis $\mathscr{K}_{s_0}$ geodätisch ist während die Halbgerade $\mathscr{G}_{\theta_0}$ geodätische Krümmung $\cos \theta_0$ besitzt.

Name: . . . . Matrikel-Nr.: . . . .

Name:...Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 3

Es sei S^2 die 2-Sphäre.

(a) *(2 Punkte + 1 Punkt)* Finden Sie eine explizite Triangulierung $\mathscr{F}$ von S^2. Benutzen Sie diese, um zu beweisen, dass $\chi(S^2) = 2$.

Es sei $C \subset S^2$ ein eingebetteter Kreis, d.h. C ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von S^2, die diffeomorph zu S^1 ist. Unten dürfen Sie ohne Beweis annehmen, dass zwei kompakte eingebettete Subflächen $M_1, M_2 \subset S^2$ mit Rand existieren, sodass

$$M_1 \cap M_2 = C, \qquad S^2 = M_1 \cup M_2, \qquad M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind diffeomorph zu } D^2.$$

Es sei nun g eine beliebige Riemannsche Metrik auf S^2 mit positiver Gauß-Krümmung $K > 0$ und es sei angenommen, dass C total geodätisch bezüglich g ist.

(b) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass

$$\int_{M_i} K \mathrm{vol}_g = 2\pi, \qquad \text{für } i = 1, 2.$$

Es sei nun $C' \subset S^2$ ein weiterer total geodätischer, eingebetteter Kreis mit entsprechenden Subflächen M_1' und M_2'.

(c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie per Widerspruch, dass $C \cap C' \neq \emptyset$. *Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgende intuitive Eigenschaft annehmen: ist $C \cap C' = \emptyset$, dann gilt $M_i' \subset M_j$ für bestimmte $i, j \in \{1, 2\}$.*

(d) *(2 Punkte)* Skizzieren Sie eine Einbettung von S^2 in $\mathbb{R}^3$, sodass die induzierte Metrik auf S^2 Gauß-Krümmung $K \geq 0$ besitzt und für die zwei total geodätische eingebettete Kreise $C, C' \subset S^2$ mit $C \cap C' = \emptyset$ existieren.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Name:..Matrikel-Nr.:................

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine Cartan–Hadamard Mannigfaltigkeit und M_0, M_1 zwei zusammenhängende, abgeschlossene und total geodätische Untermannigfaltigkeiten von M, die disjunkt sind. Es sei angenommen, dass $p_0 \in M_0$ und $p_1 \in M_1$ existieren, sodass

$$d := d_g(p_0, p_1) \leq d_g(p_0', p_1'), \qquad \forall\, (p_0', p_1') \in M_0 \times M_1.$$

Es sei $\mathcal{G}$ die Menge der Geodätischen $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(i) \in M_i$ und $\dot\gamma(i) \in (T_{\gamma(i)} M_i)^\perp$ für $i = 0, 1$. Zeigen Sie:

(a) (2 Punkte) Die Geodätische γ_0, die p_0 und p_1 verbindet, gehört zu $\mathcal{G}$.

(b) (2 Punkte) Sind γ und δ zwei verschiedene Geodätische in $\mathcal{G}$, dann gilt $\gamma(0) \neq \delta(0)$ und $\gamma(1) \neq \delta(1)$.

(c) (3 Punkte) Wenn (M, g) negative Schnittkrümmung $K < 0$ besitzt, enthält die Menge $\mathcal{G}$ nur die Kurve γ_0 aus (a).

(d) (2 Punkte) Finden Sie ein Beispiel einer Cartan-Hadamard Mannigfaltigkeit (M, g) mit $K \leq 0$ und von M_0, M_1 mit den obigen Eigenschaften, so dass $\mathcal{G}$ mehr als ein Element besitzt.

Name: .... Matrikel-Nr.: ....

Konzeptseite, Name:.......................................Matrikel-Nr.:................

Konzeptseite, Name:. . . . . .Matrikel-Nr.: . . . .

Konzeptseite, Name:. . . . . .Matrikel-Nr.: . . . .