Blatt 9

Aufgabe 1

V reeller Vektorraum, $\dim V = n$

$T \in (V^*)^{\otimes 4}$ Tensor

Eigenschaften (a) – (d)

$\mathcal{A}(V)$ Menge der Tensoren, die (a) & (b) erfüllen

$\mathcal{B}(V)$ ——— " ——— (a) – (c) — " —

$\mathcal{R}(V)$ ——— " ——— (a) – (d) — " —

(i) $\Phi : \mathcal{A}(V) \to (\Lambda^2 V)^* \otimes (\Lambda^2 V)^*$, $\Phi(T)(v_1 \wedge v_2, v_4 \wedge v_3) = T(v_1, v_2, v_3, v_4)$

Beh: • Φ definiert einen Isomorphismus

• $\Phi(\mathcal{B}(V)) = \mathrm{Sym}^2(\Lambda^2 V)$

Beweis: Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, dann ist $b_i \wedge b_j$ $i<j$ eine Basis von $(\Lambda^2 V)^*$ und wir definieren $\Phi(T)$ durch lineare Erweiterung

$$\Phi(T)\Big(\sum_{\substack{i,j \\ i<j}} c_{ij}\, b_i \wedge b_j, \sum_{k<l} d_{kl}\, b_k \wedge b_l\Big) = \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} c_{ij} d_{kl}\, T(b_i, b_j, b_l, b_k)$$

Da $b_i \wedge b_j = -b_j \wedge b_i$ müssen wir wohldef. auf der Basis prüfen

$$\Phi(T)(b_i \wedge b_j, \_) = T(b_i, b_j, \_, \_) \overset{a)}{=} -T(b_j, b_i, \_, \_)$$
$$= \Phi(T)(-b_j \wedge b_i, \_)$$

Analog im zweiten Eintrag.

Die Abbildung $T \mapsto \Phi(T)$ ist linear

Φ ist injektiv, denn falls $\Phi(T) = 0$ folgt

$0 = \Phi(T)(b_i \wedge b_j, b_k \wedge b_l) = T(b_i, b_j, b_l, b_k)$ für alle i, j, k, l.

$\Rightarrow T = 0$.

Φ ist auch surj., denn für ein bel. $\sigma \in (\Lambda^2 V)^* \otimes (\Lambda^2 V)^*$ definieren wir einen Tensor T durch

$$T(b_i, b_j, b_k, b_l) = \sigma(b_i \wedge b_j, b_l \wedge b_k)$$

Sei nun $T \in \mathcal{B}(V)$, dann gilt

$$\Phi(T)(v_1 \wedge v_2, v_4 \wedge v_3) = T(v_1, v_2, v_3, v_4) \overset{(c)}{=} T(v_3, v_4, v_1, v_2)$$
$$= \Phi(T)(v_3 \wedge v_4, v_2 \wedge v_1)$$
$$= \Phi(T)(v_4 \wedge v_3, v_1 \wedge v_2)$$

Also ist $\Phi(T)$ symmetrisch.

Ist andererseits $\Phi(T)$ symmetrisch so gilt

$$T(b_i, b_j, b_k, b_l) = \Phi(T)(b_i \wedge b_j, b_l \wedge b_k)$$
$$= \Phi(T)(b_k \wedge b_l, b_j \wedge b_i)$$
$$= T(b_k, b_l, b_i, b_j)$$

Also erfüllt T Eigenschaft (c).

(ii) zz: Die Abbildung $B: \mathcal{B}(V) \to \Lambda^4 V^*$ ist wohldef.

Beweis: Müssen zeigen $B(T)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot B(T)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}, v_{\sigma(4)})$ für alle Perm. $\sigma \in S_4$. Da S_4 von $(12), (34), (123)$ erzeugt wird genügt es diese Elemente zu betrachten.

(12): $$B(T)(v_2, v_1, v_3, v_4) = \tfrac{1}{3} \cdot \left(T(v_2, v_1, v_3, v_4) + T(v_1, v_3, v_2, v_4) + T(v_3, v_2, v_1, v_4) \right)$$
$$\overset{(a)\ (a)\ (a)}{=} \tfrac{1}{3}\left(-T(v_1, v_2, v_3, v_4) - T(v_3, v_1, v_2, v_4) - T(v_2, v_3, v_1, v_4) \right)$$
$$= -B(T)(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

(34) $$B(T)(v_1, v_2, v_4, v_3) = \tfrac{1}{3}\left(T(v_1, v_2, v_4, v_3) + T(v_2, v_4, v_1, v_3) + T(v_4, v_1, v_2, v_3) \right)$$
$$\overset{(b)\ \ (c)\,\&\,(a)\ \ (c)\,\&\,(b)}{=} \tfrac{1}{3}\left(-T(v_1, v_2, v_3, v_4) - T(v_3, v_1, v_2, v_4) - T(v_2, v_3, v_1, v_4) \right)$$
$$= -B(T)(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

(123) $$B(T)(v_2, v_3, v_1, v_4) = \tfrac{1}{3}\left(T(v_2, v_3, v_1, v_4) + T(v_3, v_1, v_2, v_4) + T(v_1, v_2, v_3, v_4) \right)$$
$$= B(T)(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

(iii) zz: $\Lambda^4 V^* \subset \mathcal{B}(V)$, $B|_{\Lambda^4 V^*} = id_{\Lambda^4 V^*}$

Beweis: Alle Elemente in $\Lambda^4 V^*$ erfüllen die Eigenschaften (a) - (c) und sind Tensoren in $(V^*)^{\otimes 4}$.

Sei nun $\lambda \in \Lambda^4 V^*$, dann gilt

$$B(\lambda)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \tfrac{1}{3}\big(\lambda(v_1, v_2, v_3, v_4) + \lambda(v_2, v_3, v_1, v_4) + \lambda(v_3, v_1, v_2, v_4)\big)$$
$$= \tfrac{1}{3}\big(\lambda(v_1, v_2, v_3, v_4) + \lambda(v_1, v_2, v_3, v_4) + \lambda(v_1, v_2, v_3, v_4)\big)$$
$$= \lambda(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

(iv) z.z: $\cancel{\Lambda^4 V^* \subseteq \mathcal{B}(V)}$ $\dim \operatorname{Ker} B = \dim \mathcal{B}(V) - \dim \Lambda^4 V^*$

__Beweis:__ Nach (iii) & (iv) gilt $\Lambda^4 V^* \subseteq \operatorname{im}(B) \subseteq \Lambda^4 V^*$

Die Dimens.formel für linearen Abb. sagt:

$$\dim(\mathcal{B}) = \dim(\operatorname{im} B) + \dim(\operatorname{Ker} B)$$
$$= \dim(\Lambda^4 V^*) + \dim(\operatorname{Ker} B)$$

(v) $\mathcal{R}(V) = \operatorname{Ker} B$. z.z. $\dim \mathcal{R}(V) = \frac{n^2 \cdot (n^2 - 1)}{12}$

__Beweis:__ $\dim(\mathcal{R}(V)) = \dim(\operatorname{Ker} B) \overset{(iv)}{=} \dim(\mathcal{B}) - \dim(\Lambda^4 V^*)$

$$\overset{(i)}{=} \dim(\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V)) - \dim(\Lambda^4 V^*)$$
$$= \frac{\dim(\Lambda^2 V) \cdot (\dim(\Lambda^2 V) + 1)}{2} - \binom{n}{4}$$
$$= \frac{\binom{n}{2} \cdot \left(\binom{n}{2} + 1\right)}{2} - \binom{n}{4}$$
$$= \ldots = \frac{n^2 \cdot (n^2 - 1)}{12}$$

Aufgabe 2

G kompakt Lie-Gruppe, $\mathfrak{g} = T_e G$ Lie-Algebra

$C_\gamma : G \to G$, $C_\gamma = R_\gamma \circ L_{\gamma^{-1}}$

$d_e C_\gamma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linearer Isomorphismus

(a) g linksinv. PR-Metrik auf G

z.z. $(d_e C_\gamma)^* g_e = g_e \ \forall \gamma \Rightarrow g$ ist Rechtsinvariant.

Beweis: Beh. 1: $((R_\gamma)^* g)_e = g_e$

$$\begin{aligned}(R_\gamma^* g)_e &= g_\gamma(d_e R_\gamma \cdot, d_e R_\gamma \cdot) \\ &= g_e(d_\gamma L_{\gamma^{-1}} d_e R_\gamma \cdot, d_\gamma L_{\gamma^{-1}} d_e R_\gamma \cdot) \\ &= g_e(d_e(L_{\gamma^{-1}} \circ R_\gamma) \cdot, d_e(L_{\gamma^{-1}} \circ R_\gamma) \cdot) \\ &= g_e(d_e C_\gamma \cdot, d_e C_\gamma \cdot) \\ &= g_e\end{aligned}$$

Linksinvarianz von g bedeutet: $g_\delta = (L_\gamma^* g)_\delta = g_{\gamma\delta}(d_\delta L_\gamma \cdot, d_\delta L_\gamma \cdot)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow g_\delta = (L_{\delta^{-1}}^* g)_\delta &= g_e(d_\delta L_{\delta^{-1}} \cdot, d_\delta L_{\delta^{-1}} \cdot) \\ &= ((R_\gamma)^* g)_e(d_\delta L_{\delta^{-1}} \cdot, d_\delta L_{\delta^{-1}} \cdot) \\ &= ((d_\delta L_{\delta^{-1}})^* (d_e R_\gamma)^* g_\gamma(\cdot, \cdot) \\ &= (d_e R_\gamma \circ d_\delta L_{\delta^{-1}})^* g_\gamma(\cdot, \cdot) \\ &= (d_\delta(R_\gamma \circ L_{\delta^{-1}}))^* g_\gamma(\cdot, \cdot) \\ &= (d_\delta(L_{\delta^{-1}} \circ R_\gamma))^* g_\gamma(\cdot, \cdot) \\ &= (d_{\delta\gamma} L_{\delta^{-1}} \circ d_\delta R_\gamma)^* g_\gamma(\cdot, \cdot) \\ &= (d_\delta R_\gamma)^* \circ (d_{\delta\gamma} L_{\delta^{-1}})^* g_\gamma(\cdot, \cdot) \\ \ulcorner\text{Linksinvarianz}\lrcorner \quad &= \cancel{(d_\delta R_\gamma)^*} ((d_{\delta\gamma} L_{\delta^{-1}})^* g)_\gamma(d_\delta R_\gamma \cdot, d_\delta R_\gamma \cdot) \\ &= g_{\delta\gamma}(d_\delta R_\gamma \cdot, d_\delta R_\gamma \cdot) \\ &= (R_\gamma^* g)_\delta\end{aligned}$$

γ, δ bel. $\Rightarrow$ Rechtsinvarianz.

b) Zz: Es gibt eine linksinv. Volumenform auf G

<u>Beweis:</u> Sei ω_e eine Volumenform auf $\mathfrak{X}$, wir setzen

$$\omega_\gamma = (d_\gamma L_{\gamma^{-1}})^* \omega_e$$

Das ist eine Volumenform auf G, da L_γ ein Diffeo ist, es bleibt die Linksinvarianz zu zeigen

$$(L_\delta^* \omega)_\gamma = \omega_{\delta \cdot \gamma}(d_\gamma L_\delta \cdot, \dots, d_\gamma L_\delta \cdot)$$

$$= \omega_e(d_{\delta\gamma} L_{\gamma^{-1}\delta^{-1}} d_\gamma L_\delta \cdot, \dots, d_{\delta\gamma} L_{\gamma^{-1}\delta^{-1}} d_\gamma L_\delta \cdot)$$

$$= \omega_e(d_\gamma L_{\gamma^{-1}\delta^{-1}} \circ L_\delta \cdot, \dots)$$

$$= \omega_e(d_\gamma L_{\gamma^{-1}} \cdot, \dots)$$

$$= (d_\gamma L_{\gamma^{-1}})^* \omega_e = \omega_\gamma.$$

c) $V = \mathrm{Sym}^2(\mathfrak{X})$, $h \in V$,

Definiere $f_h : G \to V$, $f_h(\gamma) = (d_e C_\gamma)^* h$

Setze $\bar{h} := \int_G f_h \, \omega \in V$

Das Integral ist wohldef, da G kompakt ist.

d) Zz: $(d_e C_\gamma)^* \bar{h} = \bar{h}$

<u>Beweis:</u> $(d_e C_\gamma)^* \bar{h} = \int_G (d_e C_\gamma)^* f_h \, \omega$

$\ulcorner C_\delta \circ C_\gamma = C_{\gamma\delta}$, $(d_e C_\gamma)^* f_h = f_h \circ L_\gamma$

$$= \int_G f_h \circ L_\gamma \, \omega$$

$$= \int_G L_\gamma^* f_h \; L_\gamma^* \omega$$

$$= \int_G f_h \, \omega = \bar{h}$$

e) Zz: h pos. definit $\Rightarrow$ $\bar{h}$ positiv definit

<u>Beweis:</u> Sei $v \in \mathfrak{X}$, $v \neq 0$

$$\bar{h}(v,v) = \int_G f_h(v,v)\,\omega = \int_G \underbrace{h(d_e C_\delta v, d_e C_\delta v)}_{>0} \, \omega > 0$$

f) z.z.: Es existiert eine biinvariante Riem. Metrik auf G.

Beweis: Sei h eine pos. def. symm. Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

Dann ist $\bar{h}$ eine pos. def. symm. Bili.form auf $\mathfrak{g}$ mit

$$(d_e C_\gamma)^* \bar{h} = \bar{h}.$$

Wir def. eine linksinv. Riem. Metrik auf G durch

$$g_\gamma = (d_\gamma L_{\gamma^{-1}})^* \bar{h}, \quad \text{insb. } g_e = \bar{h}$$

Mit (a) folgt, dass g_γ auch rechtsinvariant ist.

Aufgabe 3

G Lie Gruppe mit bi-invariante PR-Metrik, X, Y, Z links inv. Vektorfelder

(a) z.z. $R(X,Y)Z = -\frac{1}{4}[[X,Y],Z]$

<u>Beweis:</u> $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

$$\overset{\text{Aufg. 4-4 (b)}}{=} \nabla_X \tfrac{1}{2}[Y,Z] - \nabla_Y \tfrac{1}{2}[X,Z] - \tfrac{1}{2}[[X,Y],Z]$$

$$= \tfrac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \tfrac{1}{4}[Y,[X,Z]] - \tfrac{1}{2}[[X,Y],Z]$$

$$= \tfrac{1}{4}\cdot\big([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]]\big) - \tfrac{1}{4}[[X,Y],Z]$$

$$\overset{\text{Jacobi-Identität}}{=} -\tfrac{1}{4}[[X,Y],Z]$$

(b) z.z. $g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z]) = 0$

<u>Beweis:</u> $g([X,Y],Z) + g(Y,[X,Z]) \overset{\text{4-4(b)}}{=} g(2\nabla_X Y, Z) + g(Y, 2\nabla_X Z)$

$= 2\cdot X_\circ(g(Y,Z)) \underset{\uparrow}{=} 0$

$g(Y,Z)$ ist konstant nach Aufgabe 4-1(c)

(c) z.z. g Riem. Metrik $\Rightarrow$ Schnittkr. ist nicht negativ.

$R(X,Y,Y,X) = \frac{1}{4} g([X,Y],[X,Y])$

<u>Beweis:</u> $R(X,Y,Y,X) = g(R(X,Y)Y, X)$

$\overset{(a)}{=} g(-\frac{1}{4}[[X,Y],Y], X)$

$= \frac{1}{4} g([Y,[X,Y]], X)$

$\overset{(b)}{=} -\frac{1}{4} g([X,Y],[Y,X]) = \frac{1}{4} g([X,Y],[X,Y])$

Für g Riemannsch folgt $R(X,Y,Y,X) \geq 0$ und daher ist die Schnittkr. nicht negativ.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

a. *Sei $\omega \in \Lambda^{n-1}V^*$. Behauptung: ω ist zerlegbar, d.h. es gibt $\omega_2, \ldots, \omega_n \in \Lambda^1 V^* = V^*$, so dass*

$$\omega = \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Beweis. O.E. sei $\omega \neq 0$, da die Behauptung sonst trivial ist. Sei weiter $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine beliebige Basis von V mit dualer Basis $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ von V^*. Bezüglich dieser hat ω eine (eindeutige) Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{|I|=n-1} a_I e_I^* = \sum_{j=1}^{n} a_j \; e_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{e_j^*} \wedge \ldots \wedge e_n^*.$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \omega \wedge \; - \; : \Lambda^1 V^* = V^* &\to \Lambda^n V^* \cong \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \omega \wedge \alpha. \end{aligned}$$

Diese ist linear und für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\omega \wedge (e_k^*) = \omega \wedge e_k^* = a_k \; e_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{e_k^*} \wedge \ldots \wedge e_n^* \wedge e_k^* = (-1)^{n-k} a_k \,\mathrm{vol}$$

wobei $\mathrm{vol} = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$.

Da für $\omega \neq 0$ ein k existiert mit $a_k \neq 0$, ist $\omega \wedge \; -$ nicht die Nullabbildung, und somit wegen $\dim(\Lambda^n V^*) = 1$ surjektiv, hat mithin also $n-1$-dimensionalen Kern. Wähle eine Basis $\{b_2^*, \ldots, b_n^*\}$ dieses Kerns und ergänze mit b_1^* zu einer Basis von V^*. Dann ist

$$\omega \wedge b_1^* \neq 0, \quad \omega \wedge b_j^* = 0 \text{ für } j \in \{2, \ldots, n\}.$$

In dieser Basis hat ω die (andere) eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} c_j b_1^* \wedge \ldots \wedge \widehat{b_j^*} \wedge \ldots \wedge b_n^*.$$

Nach Wahl der Basis ist nun aber $\omega \wedge b_k^* = (-1)^{n-k} c_k \,\mathrm{vol}$, aber $\omega \wedge b_j^* = 0$ für $j > 1$, somit auch $c_j = 0$ für $j > 1$.

Es bleibt $\omega = c_1 b_2^* \wedge \ldots \wedge b_n^*$. Die Elemente $\omega_2 := c_1 b_2^*$, $\omega_j = b_j^*$ für $j > 2$ erfüllen dann wie behauptet

$$\omega = c_1 b_2^* \wedge \ldots \wedge b_n^* = \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n. \qquad \square$$

b. *Sei* $\omega \in \Lambda^2 V^*$ *mit Rang* r, *d.h.* $\omega^r = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{r\text{-mal}} \neq 0$ *aber* $\omega^{r+1} = 0$.

Behauptung: Es gibt eine Basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *von* V^* *mit*

$$\omega = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{2r-1} \wedge \varepsilon_{2r}.$$

Beweis. Schreibe $W_1 := \ker(\omega) = \{v \in V \mid \omega(v, -) = 0\}$ und wähle ein (algebraisches) Komplement $V = U_1 \oplus W_1$. Auf U_1 gilt also für alle $v \in U_1$, $\omega(v, -) \neq 0$.

Sei $e_1 \in U_1 \backslash \{0\}$ beliebig, so existiert $e_2 \in U_1 : \omega(e_1, e_2) = 1$. Weiter setze $W_2 := W_1 \cup \operatorname{span}(e_1, e_2)$ und wähle ein Komplement U_2 mit $U_1 = U_2 \oplus W_2$. Ist U_2 nicht trivial, so finden wir ein $0 \neq e_3 \in U_2$ und da $\ker(\omega) \cap U_j = \emptyset$ auch ein $e_4 \in U_2$ mit $\omega(e_3, e_4) = 1$. Induktiv verfahren wir weiter bis $W_{k+1} = \ker(\omega) \oplus \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_{2k})$ kein nichttriviales Komplement mehr hat. Beachte: Es kann niemals ein eindimensionaler Unterraum U_k übrigbleiben, da für $v \in U_k \setminus 0$ dann $\omega(v, -) = 0$, also $v \in \ker(\omega) \subset W_k$ wäre, also $v \in U_k \cap W_k = \{0\}$.

Ergänze dann die linear unabhängigen $\{e_1, \ldots, e_{2k}\}$ beliebig mit einer Basis von $\ker(\omega)$ zu einer Basis $\{e_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ von V und betrachte die duale Basis $\{\varepsilon_j := e_j^* \mid 1 \leq j \leq n\}$ von V^*. Dann gilt

$$\omega = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{(2k-1)} \wedge \varepsilon_{2k},$$

wie sich auf der Basis $\{e_j\}_j$ direkt prüfen lässt.

Wir stellen weiter fest, dass $\omega^k = c \cdot \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{2k} \neq 0$ mit $c > 0$, aber $\omega^{k+1} = 0$, also $k = r$ und somit wie behauptet

$$\omega = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{2r-1} \wedge \varepsilon_{2r}. \qquad \square$$

Aufgabe 1. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

a. *Behauptung:* Ist $n \leq 3$, dann ist jede k-Form auf V zerlegbar (vgl. Aufgabe 4 Blatt 10). Geben Sie ein Beispiel einer nicht-zerlegbaren k-Form für $n = 4$ an.

Beweis. Beachte $\Lambda^k V^* = 0$ für $k > n$. Ferner sind 0- und n-Formen zwangsläufig zerlegbar, da $\dim(\Lambda^0 V^*) = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} = \dim(\Lambda^n V^*)$.

Dementsprechend sind die einzigen nichttrivialen Fälle $n = 2, k = 1$ und $n = 3, k = 1, 2$. $k = 1$-Formen sind immer zerlegbar. Zuletzt wurde der Fall $n = 3, k = 2$ wegen $k = n - 1$ bereits in Blatt 10 Aufgabe 4 gezeigt.

Ein Beispiel einer nicht zerlegbaren k-Form für $n = 4$ muss aus obigen Überlegungen eine $k = 2$-Form sein. Schreibe e_1, e_2, e_3, e_4 für eine Basis auf V und betrachte

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^* \in \Lambda^2 V^*.$$

Wir behaupten diese 2-Form ist nicht zerlegbar.

ω hat vollen Rang 2 (ist also symplektisch), da $\omega^2 = c e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \neq 0$ mit $c > 0$. Wäre nun aber ω zerlegbar, das heißt $\omega = \alpha \wedge \beta$ für $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^*$, so wäre

$$\omega^2 = \alpha \wedge \beta \wedge \alpha \wedge \beta = -\underbrace{\alpha \wedge \alpha}_{=0} \wedge \beta \wedge \beta = 0.$$

Also ist ω nicht zerlegbar. $\square$

b. Sei α eine 1-Form auf V. Die **äußere Multiplikation** mit α ist ein Endomorphismus auf der äußeren Algebra ΛV^* vom Grad 1, der durch

$$\begin{aligned} e(\alpha) : \Lambda^k V^* &\to \Lambda^{k+1} V^* \\ \omega &\longmapsto \alpha \wedge \omega \end{aligned}$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass die äußere Multiplikation eine exakte Sequenz

$$\Lambda^{k-1} V^* \to \Lambda^k V^* \to \Lambda^{k+1} V^*$$

induziert, falls $\alpha \neq 0$.

Beweis. Sei $0 \neq \alpha \in \Lambda^1 V^*$ fest. Durch Wahl einer geeigneten Basis $e_1, \dots, e_n$ von V können wir o.E. annehmen, dass $\alpha = e_1^*$. Schreibe weiter $e^k := e(\alpha)|_{\Lambda^k V^*} : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{k+1} V^*$.

Sei $0 < k < n$ und betrachte folgende Stelle der Sequenz $\Lambda^{k-1} V^* \xrightarrow{e^{k-1}} \Lambda^k V^* \xrightarrow{e^k} \Lambda^{k+1} V^*$. Zu zeigen ist $\mathrm{im}(e^{k-1}) = \ker(e^k)$.

$\subseteq$: Sei $\omega \in \mathrm{im}(e^{k-1})$, d.h. $\omega = \alpha \wedge \sigma$ für ein σ. Dann ist $e^k \omega = \alpha \wedge \alpha \wedge \sigma = 0$, also $\omega \in \ker(e^k)$, da für die 1-Form α gilt $\alpha \wedge \alpha = 0$.

$\supseteq$: Sei $\omega \in \ker(e^k)$, d.h. $\alpha \wedge \omega = 0$. Da das Dachprodukt bilinear ist sei Œ $\omega = e_I^*$ ein Basiselement. *Andernfalls ist $\omega = \sum \omega_I e_I^*$, also $\alpha \wedge \omega = \sum \omega_I e_1^* \wedge e_I^*$. Ist $\alpha \wedge \omega = 0$ weil alle $e_i^* \wedge e_I^* = 0$ sind, genügt es also auf Basiselementen zu prüfen. Wir nehmen also an es gibt $I \neq J$ fest mit $\alpha \wedge e_I^* \neq 0 \neq \alpha \wedge e_J^*$ aber $\alpha \wedge (\omega_I e_I^* + \omega_J e_J^*) = 0$. Die erste Bedingung ist nur erfüllt, wenn $1 \notin I$ und $1 \notin J$. Dann ist aber $\alpha \wedge e_I^* = e_{I'}^*$ und $\alpha \wedge e_J^* = e_{J'}^*$ für $I' := I \cup \{1\}, J' := J \cup \{1\}$. Nach der zweiten Voraussetzung ist also $\omega_I e_{I'}^* + \omega_J e_{J'}^* = 0$, d.h. $e_{I'}^*$ linear abhängig von $e_{J'}^*$, was nur für $I' = J'$ der Fall wäre. Dann wäre aber auch $I = J$, was ein Widerspruch ist. Also kann es solche Elemente I, J nicht geben, das heißt es genügt die Behauptung auf einer Basis zu prüfen.*

Nun ist $0 = \alpha \wedge \omega = e_1^* \wedge e_I^*$ genau dann, wenn $1 \in I$, d.h. $e_I^* \omega = e_1^* \wedge e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}}^* = e_1^* \wedge e_J^*$ mit $J = I \setminus \{1\}$. Insbesondere ist $e^{k-1}(e_J^*) = e_I^* = \omega$, also $\omega \in \mathrm{im}(e^{k-1})$.

Betrachte die Grenzfälle $k = 0, n$ gesondert: Es lassen sich an beiden Enden Nullen ergänzen, sodass tatsächlich

$$0 \to \Lambda^0 V^* \to \Lambda^1 V^* \to \dots \to \Lambda^{n-1} V^* \to \Lambda^n V^* \to 0$$

eine lange exakte Sequenz ist. Dafür ist zu zeigen, dass die Abbildung $e^0 : \Lambda^0 V^* \to \Lambda^1 V^*$ injektiv ist - dies ist der Fall da $e^0(t) = t\alpha$ und $\alpha \neq 0$, d.h. $\ker(e^0) = \{0\}$ - und, dass $e^{n-1} : \Lambda^{n-1} V^* \to \Lambda^n V^*$ surjektiv ist. Dies ist auch der Fall, da durch Wahl einer Basis o.E. $\alpha = e_1^*$ und damit $e^{n-1}(e_2^* \wedge \dots \wedge e_n^*) = \mathrm{vol} \neq 0$ den einzigen Erzeuger von $\Lambda^n V^*$ trifft. □