Blatt 6

Aufgabe 1

(G, g) Lie-Gruppe, g linksinv. PR-Metrik

$\mathfrak{g} = T_{id} G \cong \mathfrak{X}_L(G)$

$B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ Bilinearabb. : $g([X,Y], Z) = g(B(Z,Y), X)$

$\omega: (t_0, t_1) \to \mathfrak{g}$ $\quad \omega(t) = d_{\gamma(t)} L_{\gamma(t)^{-1}} \dot{\gamma}(t)$ für $\gamma: (t_0, t_1) \to G$

z.z.: γ Geodätische $\Longleftrightarrow$ $\dot{\omega} = B(\omega, \omega)$

Beweis: 1. $\dot{\gamma} = \sum_i \omega^i X_i \circ \gamma$.

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, dann def. $X_1, \dots, X_n$ linksinv. Vektorfelder, die in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums.

Wir schreiben $\dot{\gamma} = \sum_i a^i (X_i \circ \gamma)$

und $\quad \omega(t) = d_{\gamma(t)} L_{\gamma(t)^{-1}} \dot{\gamma}(t)$

$= d_{\gamma(t)} L_{\gamma(t)^{-1}} (a^i X_i \circ \gamma)$

$= a^i X_i(id) \quad \Longrightarrow \quad \omega^i = a^i$

2. $\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = \dot{\omega}^i X_i + \omega^i \omega^j \nabla_{X_j} X_i$

$$\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma} = \gamma \nabla_{\partial_t} \omega^i X_i = \dot{\omega}^i X_i + \omega^i \, \gamma \nabla_{\partial_t} X_i$$
$$= \dot{\omega}^i X_i + \omega^i \nabla_{\dot{\gamma}} X_i$$
$$= \dot{\omega}^i X_i + \omega^i \omega^j \nabla_{X_j} X_i$$

3. $\cancel{\nabla_{X_j} X_i = B(X_i, X_j)}$ Berechne $g(\nabla_{X_i} X_j, X)$ für $X \in \mathfrak{X}_L(G)$

$$2\, g(\nabla_{X_i} X_j, X) = \mathcal{L}_{X_i}(g(X_j, X)) + \mathcal{L}_{X_j}(g(X_i, X)) - \mathcal{L}_X(g(X_i, X_j))$$
$$+ g([X_i, X_j], X) - g([X_j, X], X_i) - g([X_i, X], X_j)$$
$$\overset{\text{Aufg. 4-1(c)}}{=} g([X_i, X_j], X) - g([X_j, X], X_i) - g([X_i, X], X_j)$$

Damit ergibt sich für $X \in \mathfrak{X}_L(G)$

$$g_{\gamma(t)}(\gamma \nabla_{\partial_t} \dot{\gamma}, X) = \sum_i \dot{\omega}^i g_{\gamma(t)}(X_i, X) + \sum_{i,j} \omega^i(t) \omega^j(t)\, g_{\gamma(t)}(\nabla_{X_j} X_i, X)$$
$$= \sum_i \dot{\omega}^i g_{\gamma(t)}(X_i, X) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega^i \omega^j \big(g_{\gamma(t)}([X_j, X_i], X) - g_{\gamma(t)}([X_i, X], X_j)$$
$$- g_{\gamma(t)}([X_j, X], X_i) \big)$$

X_i, X_j, X linksinvariant:

$$= \sum_i \dot\omega^i g_e(X_i, X) + \sum_{ij} \frac{\omega^i \omega^j}{2} \cdot \big(g_e([X_j, X_i], X) - g_e([X_{\cancel{j}}, X], X_j) - g_e([X_j, X], X_i) \big)$$

$$= \cancel{\sum} g_e(\dot\omega, X) + \frac{1}{2}\big(g_e([\cancel{X}\omega, \omega], X) - g_e([\omega, X], \omega) - g_e([\omega, X], \omega) \big)$$

$$= g_e(\dot\omega, X) + g_e([X, \omega], \omega)$$

$$= g_e(\dot\omega, X) + g_e(B(\omega, \omega), X)$$

Andererseits gilt

$$g_{\gamma(t)}({}^\gamma\nabla_{\partial_t} \dot\gamma, X) \underset{X \in \mathfrak{X}_L(G)}{=} g_e(dL_{\gamma(t)^{-1}} {}^\gamma\nabla_{\partial_t} \dot\gamma, X)$$

Da linksinvariante Vf in Bij. zum Tangentialraum T_eG stehen folgt

$$dL_{\gamma(t)^{-1}} {}^\gamma\nabla_{\partial_t} \dot\gamma = \dot\omega + B(\omega, \omega)$$

$$\Rightarrow \quad {}^\gamma\nabla_{\partial_t} \dot\gamma = 0 \quad \iff \quad \dot\omega = -B(\omega, \omega)$$

Wir haben:

$$g(B(X,Y), Z) = g([Z, Y], X) = g_{eukl}(+Z \times Y, I \cdot X) = g_{eukl}(+Y \times IX, Z)$$

Ebenso: $g(B(X,Y), Z) = g(Z, B(X,Y)) = g_{eukl}(Z, I B(X,Y))$

$$\Rightarrow \quad I B(X,Y) = -Y \times IX \quad \Rightarrow \quad B(X,Y) = -I^{-1}(IX \times Y)$$

Ist γ eine Geodätische für dieses System so erhalten wir

$$\dot\omega = -B(\omega, \omega) = +I^{-1}((I\omega) \times \omega)$$

$$= + \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & \\ & & 1/\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= + \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_3) \omega_2 \omega_3 \\ 1/\lambda_2 (\lambda_3 - \lambda_1) \omega_1 \omega_3 \\ 1/\lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

(M,g) PR-Mft. , $\pi: TM \to M$ Tangentialbündel

$F: TM \to TM$ mit $F(T_pM) \subseteq T_pM \quad \forall p \in M$

$\gamma: (t_0, t_1) \to M$ mit ${}^\gamma\nabla_{\partial_t} \dot\gamma = F(\dot\gamma) \qquad (*)$

Zz: Ex. Vektorfeld X_F auf TM s.d. γ löst $(*)$ genau dann wenn $\dot\gamma$ Integralkurve von X_F.

Beweis: Analog zu Satz 4.26. (über das geodätische Vektorfeld)

Sei $E(v) = \frac{1}{2} g_{\pi(v)}(v,v) + V(\pi(v)) \quad \forall v \in TM$

$Y: TM \to TM$ def. durch

$$g_p(u, Y_p \cdot v) = B_p(u,v) \quad \forall p \in M,\ u,v \in T_pM.$$

Zz: Für $F = -\operatorname{grad} V(\pi) + Y$ ist $E(\dot\gamma)$ konst. entlang Lösungen von $(*)$

Beweis: $\frac{d}{dt} E(\dot\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} g_{\pi\dot\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) + V(\pi(\dot\gamma(t)))\right)$

$= g_{\pi(\dot\gamma(t))}({}^\gamma\nabla_{\partial_t}\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) + dV\left(\frac{d}{dt}\pi(\dot\gamma(t))\right) \qquad \ulcorner \pi(\dot\gamma(t)) = \gamma(t),\ \gamma \text{ löst } (*) \lrcorner$

$= g_{\gamma(t)}(-\operatorname{grad} V(\gamma(t)) + Y(\dot\gamma(t)), \dot\gamma(t)) + dV(\dot\gamma(t)) \qquad \ulcorner \text{Def. grad} \lrcorner$

$= g_{\gamma(t)}(Y(\dot\gamma(t)), \dot\gamma(t)) - dV(\dot\gamma(t)) + dV(\dot\gamma(t)) \qquad \ulcorner \text{Def } Y \lrcorner$

$= B(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$

$= 0$

$\Rightarrow E(\dot\gamma(t))$ ist konstant.

Aufgabe 3

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $|F(v) - F(w)| = |v - w| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ und $F(0) = 0$

z.z.: F ist linear

Beweis: Es gilt (Polarisationsformel)

$$g(v,w) = \frac{1}{2} g(v,v) + \frac{1}{2} g(w,w) - \frac{1}{2} g(v-w, v-w)$$

Damit:

$$2g(F(v), F(w)) = g(F(v), F(v)) + g(F(w), F(w)) + g(F(v) - F(w), F(v) - F(w))$$
$$\overset{(*)}{=} g(v,v) + g(w,w) - g(v-w, v-w)$$
$$= g(v,w)$$

$(*)$: $F(0) = 0 \Rightarrow |v - 0| = |F(v) - F(0)| = |F(v)|$.

$$g(F(\lambda v) - \lambda F(v), \dots) = g(F(\lambda v), F(\lambda v)) - g(F(\lambda v), \lambda F(v))$$
$$- \lambda g(F(v), F(\lambda v)) + \lambda^2 g(F(v), F(v))$$
$$= \lambda^2 g(v,v) - \lambda^2 g(v,v) - \lambda^2 g(v,v) + \lambda^2 g(v,v)$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow F(\lambda v) = \lambda F(v)$$

$$|F(v+w) - F(v) - F(w)|_g^2 = g(v+w, v+w) - g(v+w, v) - g(v+w, w)$$
$$- g(v, v+w) + g(v, v) + g(v, w)$$
$$- g(w, v+w) + g(w, v) + g(w, w)$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow F(v+w) = F(v) + F(w).$$

Aufgabe 4

(M_i, g_i), $i = 1,2$ R-Mfkt der gleichen Dimension

$F: (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ Bijektion, s.d. $d_{g_2}(F(p), F(q)) = d_{g_1}(p,q)$

(i) z.z.: $\gamma(t_0, t_1) \to M_1$ Geodätische $\Rightarrow F \circ \gamma$ Geodätische.

Beweis: ~~Wähle p~~ Sei $p \in M_1$ mit $p = \gamma(t)$, betrachte gleichmäßige Normalumgebungen W_1, W_2 um p bzw. $F(p)$. Da F Abstände erhält (und somit stetig ist) können wir $F(W_1) \subseteq W_2$ annehmen.

Wähle $s_0 < t < s_1$ s.d. $\gamma(s_i) \in W_1$ und $(\gamma((s_0, s_1)) \subseteq W_1$, also $F(\gamma(s_i)) \in W_2$.

Per Def. der Normalumgebung gibt es genau eine längenrealisierende Geodätische zwischen $F\gamma(s_0))$ und $F\gamma(s_1))$ und eine zwischen $\gamma(s_0), \gamma(s_1)$.

Für $\gamma(s_0)$ und $\gamma(s_1)$ ist diese durch die Einschränkung von γ gegeben.

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
d_{g_2}(F\gamma(s_0)), F(\gamma(s_1))) &\leq d_{g_2}(F(\gamma(s_0)), F(\gamma(t))) + d_{g_2}(F(\gamma(t)), F(\gamma(s_1))) \\
&= d_{g_1}(\gamma(s_0), \gamma(t)) + d_{g_1}(\gamma(t), \gamma(s_1)) \quad \text{ $\gamma(t)$ liegt auf der kürzesten Geod. die $\gamma(s_0)$ und $\gamma(s_1)$ verbindet} \\
&= d_{g_1}(\gamma(s_0), \gamma(s_1)) \\
&= d_{g_2}(F(\gamma(s_0)), F(\gamma(s_1)))
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ In der ersten Abschätzung gilt Gleichheit $\Rightarrow F(\gamma(t))$ liegt auf der kürzesten Geodätischen, die $F\gamma(s_0))$ und $F(\gamma(s_1))$ verbindet

$\rightsquigarrow$ Dies gilt für alle $t \in (s_0, s_1)$

$\Rightarrow F \circ \gamma|_{(s_0, s_1)}$ stimmt mit der kürzesten Geod. überein

F abstandserhaltend $\Rightarrow F \circ \gamma$ proport. zur Bogenl. param.

$\Rightarrow F \circ \gamma$ löst geod. Gl. auf (s_0, s_1). Für jedes $t \in (t_0, t_1)$ finden wir entsprechendes $(s_0, s_1) \Rightarrow F \circ \gamma$ löst geod. Gl. auf (t_0, t_1).

(ii) $p_1 \in M_1$, U_1 Normalumg. von p_1

$U_2 \subseteq M_2$ —— " —— $F(p_1)$

$F(U_1) \subseteq U_2$

$\psi: V_1 \longrightarrow V_2$ Darstellung von F in diesen Koord.

Z: $\psi(tv) = t \cdot \psi(v) \quad \forall t$ mit $t \cdot v \in V_1$.

Beweis Wir haben

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, dashed, "\psi"] \arrow[d, "\exp_{p_1}"'] & V_2 \arrow[d, "\exp_{F(p_1)}"] \\ U_1 \arrow[r, "F", "inj"'] & U_2 \end{tikzcd}$$

Sei $v \in V_1$.

U_2 Normalumg. von $F(p_1)$: Es ex. genau eine kürzeste Geod. die

$F(p_1) = F(\gamma_v(0))$ und $F(\exp_{p_1}(v)) = F(\gamma_v(1))$ verbindet

(i): $F \circ \gamma_v$ ist Geodätische mit dieser Eigenschaft.

Aber $\gamma_{\psi(v)}$ hat auch die Eigenschaft:

$\gamma_{\psi(v)}(0) = F(p_1)$, $\gamma_{\psi(v)}(1) = \exp_{F(p_1)}(\psi(v)) = F(\exp_{p_1}(v)) = F(\gamma_v(1))$

Eindeutigkeit $\Longrightarrow$ $F \circ \gamma_v = \gamma_{\psi(v)}$ (wo die Gl. Sinn ergibt).

$$\exp_{F(p_1)}(t\,\psi(v)) = \gamma_{t \cdot \psi(v)}(1) = \gamma_{\psi(v)}(t) = F \circ \gamma_v(t) = F \circ \gamma_{tv}(1)$$
$$= \gamma_{\psi(tv)}(1) = \exp_{F(p_1)}(\psi(tv))$$

$\Longrightarrow$ $t \cdot \psi(v) = \psi(t \cdot v)$

(iii) $\tilde{\psi}: T_{p_1}M_1 \to T_{p_2}M_2$ eindeutige Erweiterung von ψ auf $T_{p_1}M_1$ mit

$\tilde{\psi}(tv) = t \cdot \tilde{\psi}(v)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $v \in T_{p_1}M_1$

Z: $|\tilde{\psi}(v) - \tilde{\psi}(w)|_{p_2} = |v - w|_{p_1}$

Beweis: $$|v - w|_{p_1} \overset{6-5}{=} \lim_{t \to 0} \frac{d_{g_1}(\exp_{p_1}(tv), \exp_{p_1}(tw))}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{d_{g_2}(F(\exp_{p_1}(tv)), F(\exp_{p_1}(tw)))}{t}$$

Für t klein genug

$$= \lim_{t \to 0} \frac{d_{g_2}(\exp_{F(p_1)}(\psi(tv)), \exp_{F(p_1)}(\psi(t \cdot w)))}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{d_{g_2}(\exp_{F(p_1)}(t \cdot \tilde{\psi}(v)), \exp_{F(p_1)}(t\tilde{\psi}(w)))}{t}$$

$$\overset{6-5}{=} |\tilde{\psi}(v) - \tilde{\psi}(w)|_{F(p)}$$

Zusatz: $\tilde{\psi}(0) = 0$.

(iv) $\mathbb{R}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linear, isometrisch}}}{\cong} T_{p_1}M_1 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} T_{p_2}M_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linear, isometrisch}}}{\cong} \mathbb{R}^n$

Die Verkettung von $\tilde{\varphi}$ mit den Identifikationsabb. hat die Eigenschaft aus Aufgabe 6-3 $\rightsquigarrow$ Die Verkettung ist linear

$\rightsquigarrow$ $\tilde{\varphi}$ linear.

v) $\exp_p$, $\exp_{F(p)}$ sind Karten von M_1 bzw M_2

$\exp_{F(p)}^{-1} \circ F \circ \exp_p = \varphi$ ist glatt (Einschr. einer lin. Abb)

$\to$ F ist glatt und $d_p F = d(\exp_{F(p)} \circ \varphi \circ \exp_p^{-1})$

$= d_{\varphi(0)} \exp_{F(p)} \circ d_0\varphi \circ d_p \exp_p^{-1}$

$= d_{F(p)} \exp_{F(p)} \circ d_0 \varphi \circ d_p \exp_p^{-1}$

$= \mathbb{1}_{T_{F(p)}M_2} \circ \tilde{\varphi} \circ \mathbb{1}_{T_pM_1}$

$= \tilde{\varphi}$.