Aufgabe 1 18. Nov. 2013

Blatt 4

G Lie-Gruppe

$L_h, R_h : G \to G$ Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit $h \in G$

$\mathfrak{X}_L(G)$ Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder auf G

(a) zz: Der Fluß Φ_X von $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ ist vollständig

Beweis: Sei $p \in G$. Dann gibt es ein $\varepsilon_p > 0$ s.d. die Integralkurve γ von X durch p auf $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$ existiert.

Sei $p' \in G$ bel., dann ex. $h \in G$ mit $h \cdot p = p'$

X L_h-verwandt zu sich selbst $\to$ Die Integralkurve von X durch p' ist geg. durch $L_h \circ \gamma$ (vgl. SoSe., Folg. 8.12)

$\to$ Integralkurve von X an bel. Punkt existiert auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$, wobei $\varepsilon := \varepsilon_p$.

Sei $p \in G$. Ang. die Integralkurve γ von X durch p hat maxim. Def.-intervall (t_0, t_1) mit $\varepsilon \leq t_1 < \infty$

Dann existiert die Integralkurve $\check{\gamma}$ von X durch $\gamma(t_1 - \varepsilon/3)$ für $(-\varepsilon, \varepsilon)$ und es gilt

$$\check{\gamma}(t) = \gamma(t_1 - \varepsilon/3 + t) \quad \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Insb. setzt γ auf $(t_0, t_1 + 2/3\,\varepsilon)$ fort.

$\lightning$ zu (t_0, t_1) max. Def.-intervall $\Rightarrow t_1 = \infty$

Analog $t_0 = -\infty$.

(b) zz: Für alle $X \in \mathfrak{X}_L(G)$ gilt die Formel

$$R_{\Phi_X^t(e)} = \Phi_X^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Beweis: Beobachte $\cdot$ $R_{\Phi_X^0(e)}\, p = p\, \Phi_X^0(e) = p$

$$\cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} R_{\Phi_X^t(e)} \cdot p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} p \cdot \Phi_X^t(e)$$

$$= dL_p \cdot \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} \Phi_X^t(e)$$

$$= dL_p \cdot X = X$$

Φ_X^t ist eindeutig durch diese Eigenschaften festgelegt.

c) g linksinv. PR-Metrik auf G, d.h. $L_h^* g = g \quad \forall h \in G$

z.z.: $g(X, Y): G \to \mathbb{R}$ ist konstant für alle $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$

Beweis: $g_h(X_h, Y_h) = g_{L_e}(X_h, Y_h) = (L_h^* g)_e (dL_{h^{-1}} X_h, dL_{h^{-1}} Y_h)$

$= (L_h^* g)_e (X_e, Y_e) = g_e(X_e, Y_e) \quad \forall h \in G$ ∎

Aufgabe 2

(M,g) PR-Mfkt. mit LC-Ableitung ∇.

$f: M \to \mathbb{R}$

$H(f)_p(v_1,v_2) := g_p(\nabla_{v_1} \operatorname{grad} f, v_2) \quad \forall p \in M,\ v_1,v_2 \in T_pM$

(a) z.z.: $H(f) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\operatorname{grad} f}\, g$

Beweis: $\mathcal{L}_{\operatorname{grad} f}\, g \overset{4.10}{=} d(\flat \operatorname{grad} f) + 2g(\nabla_\cdot \operatorname{grad} f, \cdot)$

$= d\, df + 2g(\nabla_\cdot \operatorname{grad} f, \cdot)$

$= 2g(\nabla_\cdot \operatorname{grad} f, \cdot)$ $\square$

(b) z.z.: $F: (N,h) \to (M,g)$ Isometrie $\Rightarrow F^* H(f) = H(f \circ F)$.

Beweis: $p \in N,\ v_1, v_2 \in T_pN$

$(F^* H(f))_p(v_1,v_2) = H(f)_{F(p)}(dFv_1, dFv_2)$

$= g^M_{F(p)}(\nabla^M_{dFv_1} \operatorname{grad} f, dFv_2)$

$= g^M_{F(p)}(\nabla^M_{dFv_1} dF \operatorname{grad}(f\circ F), dFv_2)$

$= g^M_{F(p)}(\underbrace{(1 - dF\circ\pi)\nabla^M_{dFv_1} dF \operatorname{grad}(f\circ F)}_{(dF(TN))^\perp}, \underbrace{dFv_2}_{dF(TN)})$

$+ g^M_{F(p)}(dF\circ\pi\, \nabla^M_{dFv_1} dF \operatorname{grad}(f\circ F), dFv_2)$

$\overset{4.14}{=} 0 + (F^*g^M)(\nabla^N_{v_1} \operatorname{grad}(f\circ F), v_2)$

$\overset{\text{Isom. Immers.}}{=} g^N(\nabla^N_{v_1} \operatorname{grad}(f\circ F), v_2) = H(f\circ F)_p(v_1,v_2)$ $\square$

$N = f^{-1}(0)$, $\pm g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) > 0$ für alle $p \in N$.

Satz von der inversen Abb: $F: (-\varepsilon,\varepsilon)\times U \to M,\ (t,p) \mapsto \Phi^t_{\pm\operatorname{grad} f}(p)$ ist Diffeo auf das Bild

$U \subset N$ hinr. kleine Umg. eines Punkts in N.

(c) z.z.: $F^*g = \pm dt^2 + g_t$, $t \mapsto g_t$ glatter Pfad von PR-Metriken.

Hinweis: Zeige $\Phi^t_{\operatorname{grad} f}(U) \subseteq \{f = \pm t\}$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Beweis: $f(\Phi^0_{\pm\operatorname{grad} f}(p)) = 0$, da $U \subseteq f^{-1}(0)$

$\frac{d}{dt} f \circ \Phi^t_{\pm\operatorname{grad} f} = df\left(\frac{d}{dt}\Phi^t_{\pm\operatorname{grad} f}\right) = df(\pm\operatorname{grad} f) = \pm g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = 1$

$\Rightarrow f(\Phi^t_{\operatorname{grad} f}(U)) \subseteq \{f = t\}$

$$(F^*g)(\partial_\vartheta, \partial_\vartheta) \overset{\#}{=} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = \pm 1$$

$$(F^*g)(\partial_\vartheta, v) \overset{\#}{=} g(\operatorname{grad} f, \underbrace{d F v}_{\in T(\{f = \pm t\})}) = 0 \qquad v \in T\mathcal{U}.$$

$$(F^*g)(v, w) = g_{F(t,p)}(TFv, TFw) =: g_t(v, w) \qquad v, w \in T\mathcal{U}.$$

$$\Longrightarrow F^*g = \pm dr^2 + g_r$$

*

~~b) z.z: Die Vektorfelder ∂_r und $\operatorname{grad} F$ sind F-verwandt~~

~~Beweis: $dF\,\partial_r = \frac{\partial}{\partial t} F(t,p) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi^t_{\pm \operatorname{grad} f}(p) = \operatorname{grad} f$~~

(ii) z.z: $\vartheta = f \circ F$ und $\partial_\vartheta = \pm \operatorname{grad} \vartheta$

<u>Beweis:</u> Nach i) gilt $(f \circ F)((\vartheta, p)) \in f(\{f = \vartheta\}) = \{\vartheta\}$.

$$\Rightarrow f \circ F = pr_1 = \vartheta$$

grad ϑ ist e.d. festgelegt durch:

$$d\vartheta(v) = F^*g(\operatorname{grad}\vartheta, v)$$
$$\overset{\shortparallel}{pr_1(v)}$$

Es gilt $$F^*g(\partial_\vartheta, v) = \pm d\vartheta^2(\partial_\vartheta, pr_1 v) + g_\vartheta(\underbrace{pr_2 \partial_\vartheta}_{=0}, pr_2 v)$$
$$= \pm pr_1(v)$$

$$\Rightarrow \partial_\vartheta = \pm \operatorname{grad} \vartheta.$$

(iii) z.z: $H(\vartheta) = \frac{1}{2} \dot{g}^\vartheta$

Beweis: $$H(\vartheta)(v_1, v_2) \overset{a)}{=} \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\operatorname{grad}\vartheta}\, g$$
$$= \pm \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\partial_\vartheta}\, g$$
$$= \pm \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Phi^t_{\partial_\vartheta})^* (\pm d\vartheta^2 + g^\vartheta)$$
$$= \pm \frac{1}{2} \frac{dg^\vartheta}{d\vartheta}$$

⊛ $$dF\,\partial_r = \frac{\partial}{\partial t} F(t,p) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi^t_{\pm \operatorname{grad} f} = \pm \operatorname{grad} f$$