# Inhalt

## Teil I


**Kapitel I. Lineare Gleichungen und Matrizen** 1

1. Einfachste lineare Gleichungen 1
2. Lineare Gleichungssysteme 2
3. Die Struktur der Lösungsmenge 8
4. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit 10
5. Der Rang einer Matrix 13
6. Matrizenmultiplikation 15

**Kapitel II. Der Begriff des Vektorraums** 19

1. Gruppen 19
2. Permutationen 20
3. Körper 23
4. Die allgemeine lineare Gruppe 26
5. Gruppenhomomorphismen 29
6. Der Begriff des Vektorraums 33

**Kapitel III. Lineare Abbildungen und Matrizen** 38

1. Lineare Abbildungen 38
2. Kern und Bild linearer Abbildungen 40
3. Isomorphismen 42
4. Lineare Abbildungen und Matrizen 44
5. Basiswechsel 46

6. Weitere Konstruktionen von Vektorräumen 48

**Kapitel IV. Determinanten** 52

1. Die Leibnizsche Formel 52
2. Determinantenregeln 54
3. Praktische Berechnung von Determinanten 57
4. Die Determinante eines Endomorphismus. 58
5. Weitere Determinantenregeln 60

**Kapitel V. Eigenwerttheorie** 62

1. Eigenwerte und Eigenvektoren 62
2. Das charakteristische Polynom 69
3. Trigonalisierung 72
4. Euklidsche Vektorräume 76
5. Unitäre Vektorräume 79
6. Der Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen, komplexer Fall 80
7. Der Spektralsatz für selbstadjungierte Abbildungen, reeller Fall 83
8. Normale Operatoren 84

**Anhang** 90

1. Mengen 90
2. Vollständige Induktion 96
3. Probleme der Mengenlehre 99
4. Relationen 102
5. Das Zornsche Lemma 106

# Teil II


**Kapitel VI. Die Jordansche Normalform** 106

1. Eigenäume 106
2. Der Satz von Cayley-Hamilton 107
3. Polynomarithmetik 109
4. Verallgemeinerte Eigenäume 111
5. Die Jordanzerlegung 113
6. Zyklische Vektoren 115
7. Nilpotente Operatoren 117
8. Die Jordansche Normalform 119

**Kapitel VII. Bilinearformen** 121

1. Euklidsche Bewegungen 121
2. Bewegungen der Euklidschen Ebene 122
3. Bewegungen des dreidimensionalen Raumes. 125
4. Allgemeines über Bilinearformen 128
5. Das Klassifikationsproblem 129
6. Orthogonalbasen 132
7. Orthogonale Gruppen 135
8. Die Lorentzgruppe 137
9. Weitere Bilinearformen 137
10. Hermitesche Formen 137
11. Alternierende Formen 137

# Teil II

# Kapitel VI. Die Jordansche Normalform

## 1. Eigenräume

Dieser Abschnitt hätte bereits viel früher behandelt werden können und dient hauptsächlich der Motivation der verallgemeinerten Eigenräume, die eine zentrale Rolle in diesem Kapitel spielen werden. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums. Wir haben bereits für $\lambda \in K$ den Eigenraum

$$V(f, \lambda) := \{\, a \in V; \quad f(a) = \lambda a \,\}$$

eingeführt und bemerkt, dass dies ein Untervektorraum ist. Er ist genau dann von Null verschieden, wenn $\lambda$ ein Eigenwert ist.

Ein Polynom $P$ ist ganau dann durch den Linearfaktor $X - a$ teilbar, wenn $a$ Nullstelle von $P$ ist. Dies haben wir im Prinzip beim Beweis der Tatsache gezeigt, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat (V.1.4). Wir wiederholen das Argument: Man entwickelt $P(X)$ nach Potenzen von $X - a$ mittels der binomischen Formel

$$X^k = \sum_{i+j=k} \binom{m}{i} \lambda^i (X - \lambda)^j,$$

und erhält dann

$$P(X) = b_0 + b_1(X - a) + \cdots + b_n(X - a)^n.$$

Aus $P(a) = 0$ folgt $b_0 = 0$ und man kann $X - a$ ausklammern. Man erhält $P = (X - a)Q$. Wenn $P$ von Null verschieden ist, so ist der Grad von $Q$ um Eins kleiner als der von $P$. Es kann sein, dass $a$ auch Nullstelle von $Q$ ist. Man kann dann $X - a$ auch aus $Q$ ausklammern und erhält schließlich (für von Null verschiedenes $P$)

$$P(X) = (X - a)^m Q(X) \quad \text{mit} \quad Q(a) \neq 0.$$

Man nennt $m$ die *Vielfachheit* oder *Multiplizität* der Nullstelle $a$.

**1.1 Hilfssatz.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums, $P$ sein charakteristisches Polynmom und $\lambda$ eine Nullstelle (=Eigenwert) der Vielfachheit $m$. Es gilt* muC

$$\dim V(f, \lambda) \le m.$$

*Beweis.* Wir wählen eine Basis $e_1, \dots, e_m$ von $V(f, \lambda)$ und ergänzen diese zu einer Basis $e_1, \dots, e_n$ von $V$. Die Matrix von $f$ bezüglich dieser Basis hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda E^{(m)} & * \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Nach dem Kästchensatz ist das charakteristische Polynom dieser Matrix gleich $(X - \lambda)^m$ mal dem charakteristischen Polynom von $B$. □

**1.2 Hilfssatz.** *Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ paarweise verschiedene Eigenwerte eines Endomorphismus $f : V \to V$. Die Abbildung* vaI

$$V(f, \lambda_1) \times \cdots \times V(f, \lambda_m) \longrightarrow V, \quad (a_1, \dots, a_m) \longmapsto a_1 + \cdots + a_m,$$

*ist injektiv.*

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass Eigenwerte zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind (V.2.2). □

Wenn ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich dimensionalen Vektorraums von Eigenvektoren erzeugt wird, so gilt $V = V(f, \lambda_1) + \cdots + V(f, \lambda_m)$. Umgekehrt folgt aus dieser Bedingung, dass $V$ von Eigenvektoren erzeugt wird und sogar eine Basis bestehend aus solchen besitzt.

**1.3 Theorem.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraumes. Folgende Aussagen sind gleichbedeutend:* TEk

a) *$V$ besitzt eine Basis von Eigenvektoren.*
b) *Es gilt*
$$V = V(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(f, \lambda_m).$$
c) *Das charakteristische Polynom von $f$ zerfällt in Linearfaktoren und die Vielfachheit jeden Eigenwerts $\lambda$ ist gleich der Dimension des Eigenraums $V(f, \lambda)$.*

*Beweis.* Zunächst ist klar, dass a) und b) äquivalent sind. Die Richtung a)⇒c) ist ebenfalls klar. Sei also c) erfüllt. Die Dimension von $V(f, \lambda_1) + \cdots + V(f, \lambda_m)$ ist nach 1.2 und dem zweiten Teil von c) gleich $k_1 + \cdots + k_m$, wenn $k_i$ die Vielfachheit von $\lambda_i$ bezeichnet. Dies ist aber gleich dem Grad des charakteristischen Polynoms und somit gleich der Dimension von $V$. Es folgt $V = V(f, \lambda_1) + \cdots + V(f, \lambda_m)$. □

Auch wenn Theorem 1.3 die Frage der Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen un gewisser Weise abschließend beantwortet, ist sein Nutzen begrenzt, da die Bedingung c) nur schlecht nachprüfbar ist. Für die praktischen Anwendungen sind die die früher behandelten Sätze über die Diagonalisierung normaler Operatoren leistungsfähiger.

## 2. Der Satz von Cayley-Hamilton

Sei $K$ ein beliebiger Grundkörper. Wir studieren das charakteristische Polynom $P(X) = \det(XE - A)$ einer quadratischen Matrix $A$. Für uns ist nur der Fall von Interesse, dass $K$ unendlich ist. Dann kann man Polynome als Polynomfunktionen verstehen. Will man die endlichen Körper nicht vernachlässigen, so sollte man den abstrakten Begriff formaler Polynome nehmen (s. V.1.6 und V.1.10). Die Einträge von $XE - A$ sind Polynome aus $K[X]$ und man benötigt dann auch das Konzept der Determinante von Matrizen mit Koeffizienten aus dem Ring $K[X]$ (V.1.14).

Man kann in einem Polynom $P = a_0X^0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$ für $X$ nicht nur Elemente aus $K$ einsetzen, sondern allgemeiner ist es sinnvoll, quadratische Matrizen $A$ einzusetzen. Man definiert schlicht und einfach (bedenkend, dass die Koeffizienten eines Polynoms eindeutig bestimmt sind)

$$P(A) = a_0A^0 + a_1A + \cdots + A^m = a_0E + a_1A + \cdots + a_mA^m.$$

Wir verwenden in diesem Zusammenhang die Bezeichnung $A^0 = E$ (Einheitsmatrix), auch wenn $A$ singulär oder gar die Nullmatrix sein sollte. In analoger Weise kann man

$$P(f) = a_0f^0 + a_1f + \cdots + f^m = a_0 \operatorname{id}_V + a_1f + \cdots + a_mf^m$$

für einen Endomorphismus $f : V \to V$ eines Vektorraums definieren. Aus banalen Gründen gilt

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A), \qquad (PQ)(f) = P(f)Q(f).$$

**2.1 Satz von Cayley Hamilton.** *Setzt man in das charakteristische Polynom $P$ einer quadratischen Matrix $A$ die Matrix $A$ selbst ein, so kommt die Nullmatrix heraus.* SCH

**Abbildungstheoretische Variante.** *Setzt man in das charakteristische Polynom eines Endomorphismus $f : V \to V$ (mit endlich dimensionalen $V$) den Endomorphismus $f$ selbst ein, so kommt die Nullabbidlung* $0$ *heraus.*

Beide Varianten sind natürlich gleichbedeutend. Wir beginnen mit einem ganz einfachen Beweis, welcher leider den Nachhteil hat, falsch zu sein:

*Falscher Beweis.* Man setze in $P(X) = \det(XE - A)$ den Ausdruck $X = A$ ein un erhält $P(A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$. Beim Beweis hat man erst $A$ eingesetzt und dann die Determinante gebildet. Beim Satz von Cayley-Hamilton soll man aber erst die Determinante bilden und dann $A$ einsetzen. Nun sind aber $\det(P(A))$ und $P(\det(A))$ in der Regel voneinander verschieden. Der Beweis ist also falsch!

*Richtiger Beweis von 2.1 (leider nicht so einfach wie der falsche).* Wir ziehen es vor, die Matrix-Variante zu verwenden. Sei also $A$ eine $n \times n$-Matrix. Wir betrachten die charakteristische Matrix $C = XE - A$ und bilden deren komplementäre Matrix $D$. Die Einträge von $D$ sind bis aufs Vorzeichen Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$-Untermatrizen von $D$. Dies sind jedenfalls Polynome vom Grade $< n$. Wir sortieren nach Potenzen von $X$:

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i X^i \qquad (D_i \in K^{n \times n}).$$

Dabei sind die $D_i$ Matrizen mit Einträgen aus $K$. Das Produkt $D_i X^i$ ist selbstverständlich komponentenweise zu verstehen. Nach der Regel über die komplementäre Matrix (vgl. IV.2.4) gilt

$$CD = PE \qquad (P = \det(C) \ = \ \text{charakteristisches Polynom}),$$

ausführlich

$$PE = \Big(\sum_{i=0}^{n-1} D_i X^i\Big)(XE - A) = D_{n-1}X^n + \sum_{i=1}^{n-1}(D_{i-1} - D_i A)X^i - D_0 A.$$

Schreibt man $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, so folgt durch Koeffizientenvergleich

$$D_{n-1} = E, \quad a_i E = C_{i-1} - C_i A \ (1 \leq i < n), \quad a_0 E = -C_0 A.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P(A) =& A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = A^n + (C_{n-1} - A)A^{n-1} + \\ & (C_{n-2} - C_{n-1}A)A^{n-2} + \cdots + (C_0 - C_1 A)A - C_0 A = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

## 3. Polynomarithmetik

Es werden einige Eigenschaften von Polynomen benötigt, die ganz ähnlich zu Grundeigenschaften der ganzen Zahlen sind. Wir wollen diese zum besseren Verständnis kurz voranstellen:

**3.1 Euklidscher Algorithmus für ganze Zahlen.** *Seien $a, b$ zwei ganze Zahlen, $b \neq 0$. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte ganze Zahlen $x, y$ mit der Eigenschaft* EAG

$$a = bx + y \quad \textit{und} \quad |y| < |b|.$$

*Beispiel.*

$$27 = 5 \cdot 5 + 2.$$

Dies ist nichts anderes als die bereits aus der Grundschule bekannte „Division mit Rest“. Es ist $y$ der Rest, der bleibt, wenn man versucht $a$ durch $b$ zu dividieren. Der Beweis ist sehr einfach (Induktion nach $|b|$) und wird hier übergangen. So einfach die Division mit Rest jedoch auch sein mag, auf ihr basieren grundlegende Eigenschaften ganzer Zahlen. Wir erläutern eine davon:

Zwei ganze Zahlen $a, b$ heißen teilerfremd, wenn es außer $\pm 1$ keinen gemeinsamen Teiler $d$ gibt. (Ein Teiler von $a$ ist eine ganze Zahl $d \neq 0$, so dass $a/d$ ganz ist.) Es gilt nun:

**3.2 Satz.** *Aus zwei teilerfremden ganzen Zahlen $a, b$ kann man stets die* 1 *kombinieren: Es gibt ganze Zahlen $x, y$ mit der Eigenschaft* `tfE`

$$ax + by = 1.$$

*Beispiel.* Die Zahlen 9 und 7 sind teilerfremd. Tatsächlich gilt

$$4 \cdot 9 + (-5) \cdot 7 = 1.$$

*Beweis von 3.2.* Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $b \neq 0$ annehmen und dann mit Rest dividieren, $a = bx + y$. Offenbar sind $b, y$ ebenfalls teilerfremd. Damit bietet sich ein offensichtlicher Induktionsbeweis an. □

Ein ähnlicher Algorithmus gilt auch für Polynome über einem Körper $K$. Anstelle des Betrags einer ganzen Zahls tritt nunmehr der Grad eines von Null verschiedenen Polynoms.

**3.3 Eukidscher Algorithmus für Polynome.** *Seien $P, Q$ zwei von Null verschiedene Polynome. Dann gibt es zwei eindeutig bestimmte Polynome $A, B$ mit der Eigenschaft* `EAP`

$$P = AQ + B \quad \textit{mit} \quad B = 0 \ \textit{oder} \ \mathrm{Grad}(B) < \mathrm{Grad}(P).$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach dem Grad von $P$. □

Man sagt, ein Polynom $Q$ teilt ein anderes Polynom $P$, falls es ein Polynom $A$ mit $AQ = P$ gibt. Zwei Polynome $P, Q$ heißen teilerfremd, falls es außer konstanten Polynomen keinen gemeinsamen Teiler gibt.

**3.4 Satz.** *Aus zwei teilerfremden Polynomen $P, Q$ kann man stets die Eins kombinieren: Es gibt Polynome $A, B$ mit der Eigenschaft* `TfE`

$$AP + BQ = 1.$$

Über einem algbraisch abgeschlossenen Grundkörper ist jedes Polynom Produkt von Linearfaktoren. Es ergibt sich:

**3.5 Bemerkung.** *Der Grundkörper sei algebraisch abgeschlossen. Zwei Polynome sind genau dann teilerfremd, falls sie keine gemeinsame Nullstelle haben.* Ptn

## 4. Verallgemeinerte Eigenräume

Eigenräume und ihre Verallgemeinerungen sind Spezialfälle von invarianten Unterräumen:

**4.1 Definition.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Ein Unterraum $W \subset V$ heißt* ***invariant****, wenn $f(W) \subset W$ gilt.* DiU

Man kann dann $f$ auf $W$ einschränken und erhält eine lineare Abbildung $g : W \to W$ (definiert durch $g(a) = f(a)$ für $a \in W$). Wählt man eine Basis $e_1, \dots, e_m$ von $W$ und ergänzt diese zu einer Basis von $e_1, \dots, e_n$ von $V$, so hat die $f$ zugeordnete Matrix die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $B$ die $g$ zugeordnete Matrix bezüglich der vorgelegten Basis. Aus dem Kästchensatz folgt, dass das charakteristische Polynom von $A$ gleich dem Produkt der charakteristischen Polynome von $B$ und $C$ ist. Dies zeigt:

**4.2 Bemerkung.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektrorraums und $W$ ein invarinter Unterraum, $g : W \to W$ die Einschränkung von $f$. Das charakteristische Polynom von $g$ ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms von $f$.* BCt

Als Anwendung der Polynomarithmetik beweisen wir den

**4.3 Aufspaltungssatz.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums und $P$ ein Polynom mit $P(f) = 0$, beispielsweise das charakteristische Polynom. $P$ sei dargestellt als Produkt zweier* ***teilerfremden*** *Faktoren $P = P_1P_2$. Dann gilt* AUS

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \textit{mit} \quad V_i := \mathrm{Kern}(P_i(f)).$$

*Die Räume $V_i$ sind invariant, also $f(V_i) \subset V_i$ für $i = 1, 2$.*

*Beweis.* Nach Satz 3.4 kann man aus $P_1, P_2$ die Eins kombinieren, $A_1P_1 + A_2P_2 = 1$. Hieraus folgt für beliebiges $a \in V$

$$a = A_1(f)P_1(f)a + A_2(f)P_2(f)a.$$

Nach Voraussetzung gilt $P_1(f)A_1(f)P_2(f)a = A_1(f)P(f)a = 0$. Daher liegt $a_1 := A_2(f)P_2(f)$ im Kern von $P_1$ und entsprechend $a_2 := A_1(f)P_1(f)$ im Kern von $P_2$. Dies zeigt $V = V_1 + V_2$. Wir müssen noch $V_1 \cap V_2 = 0$ zeigen, um zu sehen, dass die Summe direkt ist. Für $a \in V_1 \cap V_2$ gilt aber $a = A_1(f)P_1(f)a + A_2(f)P_2(f)a = 0$. □

Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums. Wir definieren die *verallgemeinerten Eigenräume* durch

$$V_r(f, \lambda) := \operatorname{Kern}((f - \lambda \operatorname{id})^r).$$

Im Falle $r = 1$ erhält man den gewöhnlichen Eigenraum,

$$V_1(f, \lambda) = V(f, \lambda).$$

Diese sind offenbar invariant. Es gilt

$$V_1(f, \lambda) \subset V_2(f, \lambda) \subset V_3(f, \lambda) \subset \dots.$$

Wir wollen annehmen, dass $V$ endlich dimensional ist. Dann existiert eine natürliche Zahle $N$, so dass

$$V_N(f, \lambda) = V_{N+1}(f, \lambda) = V_{N+2}(f, \lambda) = \cdots$$

gilt. Der Einfachheit schreiben wir

$$V_\infty(f, \lambda) := V_N(f, \lambda) \qquad (N \text{ hinreichend groß})$$

**4.4 Satz.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums, dessen charakteristisches Polynom $P$ in Linearfaktoren zerfällt (z.B. $K$ algebraisch abgeschlossen),* TeZ

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k} \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j).$$

*Dann gilt*

$$V = V_{m_1}(f, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus V_{m_k}(f, \lambda_k).$$

*Jeder der verallgemeinerten Eigenräume wird durch $f$ in sich abgebildet, durch Einschränken von $f$ erhält man also Endomorphismen*

$$f_i : V_{m_i}(f, \lambda_i) \longrightarrow V_{m_i}(f, \lambda_i) \qquad (f_i(a) = f(a)).$$

*Das charakteristische Polynom von $f_i$ ist $(X - \lambda_i)^{m_i}$.*

*Beweis.* Nach dem Satz von Cayley-Hamilton wird $f$ von seinem charakteristischen Polynom annulliert. Der Fall $m = 1$ ist damit bereits erledigt. Im Falle $m > 1$ wenden wir den Aufspaltungssatz auf die Situation

$$P = P_1 P_2 \quad \text{mit} \quad P_1 = (X - \lambda_1)^{m_1} \text{ und } P_2 = (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k}$$

an. Der Summenzerlegung erhält man nun leicht durch Induktion nach $m$. Es bleibt die Aussage über das charakteristische Polynom von $f_i$ zu beweisen: nach Definition der verallgemeinerten Eigenräume ist der Endomorphimus $f_i - \lambda_i \operatorname{id}$ nilpotent. Wir wissen (V.3.3), dass sein charakteristisches Polynom von der Form $X^{\mu_i}$ ist. Das charakteristische Polynom von $f_i$ ist somit $(X - \lambda_i)^{\mu_i}$. Das charakteristische Polynom von $f$ ist nach dem Kästchensatz gleich dem Produkt der charakteristischen Polynome der $f_i$. Durch Vergleich ergibt sich nun $\mu_i = m_i$. □

Satz 4.4 zeigt die Bedeutung der verallgemeinerten Eigenräume. Ihr Vorteil gegenüber den gewöhnlichen Eigenräumen zeigt sich in:

**4.5 Folgerung zu 4.4.** *(Voraussetzungen wie in 4.4). Es gilt* FeZ

$$\dim V_r(f, \lambda_i) \le m_i.$$

*Für $r \ge m_i$ gilt sogar das Gleichheitszeichen. Insbesondere gilt*

$$V_{m_i}(f, \lambda_i) = V_\infty(f, \lambda_i).$$

## 5. Die Jordanzerlegung

Eine offensichtliche Folgerung des Zerlegungssatzes besagt:

*Sei $f : V \to V$ ein Endomorphimus eines endlich dimensionalen Vektorraums, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Genau dann ist $f$ diagonalisierbar, wenn die Eigenräume mit den verallgemeinerten Eigenräumen übereinstimmen, $V(f, \lambda) = V_\infty(f, \lambda)$.*

Dies heißt im Klartext, dass aus $(f - \lambda \operatorname{id})^m(a) = 0$ schon $(f - \lambda \operatorname{id})(a) = 0$ folgen muss. Es ergibt sich:

**5.1 Satz.** *Sei $f : V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums und $W \subset V$ ein invarianter Unterraum. Dann ist die Einschränkung $g : W \to W$ von $f$ ebenfalls diagonalisierbar.* IUd

(Da das charakteristische Polynom von $(W, g)$ das von $(V, f)$ teilt (4.2), ist es ebenfalls Produkt von Linearfaktoren.)

**5.2 Satz.** *Seien $f, \dots, f_m$ diagonalisierbare Endomorphismen eines endlich dimensionalen Vektorraums, welche paarweise miteinander vertauschbar sind, $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$. Dann können sie simultan diagonalisiert werden, es existiert also eine Basis ein Eigenvektoren von allen $f_i$.* Sd

**Folgerung.** *Summe und Hintereinanderausführung vertauschbarer diagonalisierbarer Endomorphismen sind auch diagonalisierbar.*

Für normale Operatoren haben wir den Satz bereits bewiesen (V.8.6). Der von Beweis von V.8.6 funktioniert dank 5.1 auch im allgemeinen Fall. □

Wir kehren zurück zu Satz 4.4. Wir erinnern daran, dass die Operatoren $f_i : V_\infty(f, \lambda_i) \to V_\infty(f, \lambda_i)$ von der Form $f_i(a) = \lambda_i a + h_i(a)$ mit einem nilpotenten Operator $h_i$ sind. Wir definieren nun die Operatoren $g, h : V \to V$ durch die Bedingung

$$g(a) = \lambda_i a, \qquad h(a) = h_i(a) \quad \text{auf} \quad V_\infty(f, \lambda_i).$$

Dann gilt $f = g + h$. Der Operator $g$ ist diagonalisierbar und $h$ ist nilpotent. Beide sind miteinander vertauschbar. Wir können $g$ auch etwas anders schreiben: Sei $p_i : V \to V$ der Endomorphismus, der durch die Bedingungen

$$p_i(a) = \begin{cases} a & \text{für } a \in V(f, \lambda_i), \\ 0 & \text{für } a \in V(f, \lambda_j),\ j \neq i, \end{cases}$$

definiert ist. Man nennt $p_i$ einen *Projektionsoperator.* (Allgemein heißt ein Endomorphismus $p : V \to V$ Projektionsoperator, wenn es eine Zerlegung $V = V_1 \oplus V_2$ gibt, so dass $p$ die Identität auf $V_1$ und Null auf $V_2$ ist.) Es gilt

$$g = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k.$$

Wir zeigen nun, dass es ein Polynom $P$ gibt mit $g = P(f)$. (Dann ist auch $h = f - P(f)$ ein Polynom in $f$.) Dazu genügt es zu zeigen, dass die Projektoren $p_i$ Polynome in $f$ sind. Wir beweisen dies für $p_1$: Die beiden Polynome

$$P_1 = (X - \lambda_1)^{m_1} \quad \text{und} \quad P_2 = (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k}$$

sind teilerfremd. Wir können aus ihnen daher die Eins kombinieren, $Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = 1$. Offenbar gilt dann $(Q_2 P_2)(f) = p_1$. Halten wir fest:

*Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine Zerlegung*

$$f = g + h,$$

*in einen diagonalsierbaren Operator $g$ und einen nilpotenten Operator, welche sich beide als Polynom in $f$ darstellen lassen. Sie sind insbesondere miteinander vertauschbar.*

Nun kommen wir zu der

**5.3 Jordan-Zerlegung.** *Jeder Endomorphimus $f : V \to V$ eines endlich dimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper gestattet eine Zerlegung $f = g + h$ in einen diagonalisierbaren Operator $g$ und einen nilpotenten Operator $h$, welche miteinander vertauschbar sind. Eine solche Zerlegung ist eindeutig und $g, h$ sind Polynome in $f$.* JZ

Die Existenz einer solchen Zerlegung haben wir beweisen, es geht jetzt noch um die Eindeutigkeit. Wir wählen eine Zerlegung $f = g + h$ mit diagonalisierbarem $g$ und nilpotentem $h$, welche miteinander vertauschbar sind und sich als Polynom in $f$ schreiben lassen und vergleichen mit einer beliebigen Zerlegung $f = g' + h'$ wie in 5.3 beschrieben. Es wird also nicht gefordert, dass $g'$ ein Polynom in $f$ ist. Wir wissen aber, dass $g$ ein Polynom in $f$ ist. Nach Voraussetzung ist $g'$ mit $h'$ vertauschbar. Daher ist $g'$ mit $f = g' + h'$ vertauschbar. Dann ist $g'$ auch mit jedem Polynom in $f$ also auch mit $g$ vertauschbar. Jetzt folgt, dass $h = f - g$ und $h' = f - g'$ vertauschbar sind. Wir schreiben die Gleichung $g + h = g' + h'$ in der Form

$$g - g' = h - h'.$$

Die linke Seite ist als Summe zweier *vertauschbarer* diagonalisierbarer Operatoren diagonalisierbar (Folgerung zu 5.2). Wir behaupten, dass $h - h'$ nilpotent ist: Da $h$ und $h'$ vertauschbar sind, ist $(h - h')^m$ eine Linearkombination von $h^a h'^b$ mit $a + b = m$. Entweder ist $a \geq m/2$ oder $b \geq m/2$. In jedem Fall ist dieser Ausdruck Null, wenn $m$ genügend groß ist. Damit wissen wir, dass alle Eigenwerte von $g - g' = h - h'$ gleich Null sind. Ein diagonalisierbarer Operator, dessen Eigenwerte Null sind, ist aber der Nulloperator. Es folgt $g = g'$ und $h = h'$. □

## 6. Zyklische Vektoren

Zyklische Vektoren sind in gewisser Hinsicht das Gegenteil von Eigenvektoren:

**6.1 Definition.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums. Ein Vektor $a \in V$ heißt **zyklisch**, wenn $V$ von den Vektoren* DEz

$$a, f(a), \dots, f^n(a) \quad (n \text{ genügend groß})$$

*erzeugt wird. Wenn $V$ einen zyklischen Vektor besitz, so nennt man $(V, f)$ auch zyklisch.*

Erfreulicherweise kann man das Studium beliebiger Operatoren häufig auf den zyklischen Fall zurüeckführen.

**6.2 Satz.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums. Es existiert eine direkte Summenzerlegung $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ mit folgenden Eigenschaften:* Znz

a) *Die Räume $V_i$ sind invariant, durch Einschränken von $f$ erhält man also Endomorphismen $f_i : V_i \to V_i$.*
b) *Jeds $(V_i, f_i)$ ist zyklisch.*

*Beweis.* Sei $a \in V$ ein fester Vektor. Es gibt einen kleinsten Untervektorraum $V(a)$, welcher $a$ enthält und invariant ist. Er besteht aus allen $P(f)(a)$ mit Polynomen $P$ und wird von $a, f(a), \dots, f^N(a)$ für hinreichend großes $N$ erzeugt. Der Vektor $a$ ist zyklisch in $V(a)$. Sind $a_1, \dots, a_m$ mehrere Vektoren, so ist

$$V(a_1, \dots, a_m) := V(a_1) + \cdots + V(a_m)$$

der kleinste invariante Unterraum, welcher alle $a_i$ enthält. Da $V$ endlich erzeugt ist, existieren Vektoren $a_1, \dots, a_m$ so, dass $V = V(a_1, \dots, a_m)$. Wir wählen unter allen diesen Darstellungen eine mit minimalem $m$. Damit liegt $m$ fest. Wir hätten gerne, dass die Zerlegung $V = V(a_1) + \cdots + V(a_m)$ direkt ist. Anhand von Beispielen kann man zeigen, dass dies erst dann der Fall ist, wenn man $a_1, \dots, a_m$ geeignet wählt. (Nur die Anzahl $m$ ist bislang fixiert.) Wir interessieren uns für sogenannte *Relationen.* Das sind $m$-Tupel $R = (R_1, \dots, R_m)$ von Polynomen folgender Art:

$$R_1(f)a_1 + \cdots + R_m(f)a_m = 0.$$

Ein Beispiel erhält man, wenn man für alle $R_i$ das charakteristische Polynom von $f$ nimmt. Es existieren also jedenfalls von $(0, \dots, 0)$ verschiedene Relationen.

Wir betrachten nun eine natürliche Zahl $d$ mir folgender Eigenschaft:

1. *Es gibt $a_1, \dots, a_m$ mit $V = V(a_1, \dots, a_m)$ und eine Relation $R_1(f)a_1 + \cdots + R_m(f)a_m = 0$ mit $R_1 \neq 0$ und $\mathrm{Grad}(R_1) = d$.*
2. *Sind $b_1, \dots, b_m$ irgendwelche (möglicherweise andere) Vektoren mit der Eigenschaft $V = V(b_1, \dots, b_m)$ und ist $S_1(f)b_1 + \cdots + S_m(f)b_m = 0$ eine Relation unter ihnen, so gilt für jedes $i$ entweder $S_i = 0$ oder $\mathrm{Grad}(S_i) \geq d$.*

Es ist klar, dass $d$ existiert. Nun verändern wir das System $a_1, \dots, a_m$, indem wir

$$b_1 := a_1 + A_2(f)a_2 + \cdots + A_m(f)a_m, \quad b_2 = a_2, \dots, b_m = a_m$$

mit zunächst beliebigen Polynomen $A_2, \dots, A_m$ definieren. Es gilt dann $V = V(b_1, \dots, b_m)$ sowie $S_1(f)b_1 + \cdots + S_m(f)b_m = 0$ mit

$$S_1 = R_1, \qquad S_i = R_i - A_i R_1 \quad (2 \leq i \leq m).$$

Nun nutzen wir den Euklidschen Algorithmus aus und wählen $A_i$ so, dass entweder $S_i = 0$ oder $\mathrm{Grad}(S_i) < \mathrm{Grad}(R_1)$. Die zweite Möglichkeit scheidet wegen der Minimalitätsannahme aus. Wir sehen, also, dass man (bei geigneter Wahl des Systems $a_1, \dots, a_m$ sogar

$$R_1(f)a_1 = 0$$

annehmen kann. Nun behaupten wir

$$V(a_1) \cap V(a_2, \dots, a_m) = 0.$$

Sei also $P_1(f)(a_1) \in V(a_2, \dots, a_m) = 0$, also

$$P_1(f)(a_1) + \cdots + P_m(f)(a_m) = 0.$$

Wir ziehen hiervon ein Vielfaches der Relation $R_1(f)a_1 = 0$ ab und erhalten —wieder unter Ausnutzung des Euklidschen Algorithmus und der Minimalitätsannahme—, dass $P_1$ durch $R_1$ teilbar ist. Dann folgt aber $P_1(f)a_1 = 0$ wie behauptet. Wir wissen nun

$$V = V(a_1) \oplus V(a_2, \dots, a_m).$$

Satz 6.2 kann nun mit Induktion bewiesen werden. □

Die Zerlegung 6.2 in zyklische Unterräume ist nicht im allgemeinen nicht eindeutig. Man kann natürlich die Reihenfolge vertauschen aber auch bis auf die Reihenfolge ist die Zerlegung nicht eindeutig. Die Diskussion der Eindeutigkeit würde uns zu weit ab von unserem Ziel führen. Im nächsten Abschnitt geben wir eine Antwort im nilpotenten Fall. Dies reicht für unsere Zwecke.

## 7. Nilpotente Operatoren

Wir erinnern daran, dass ein Endomorphismus $f$ nilpotent heißt, wenn es eine natürliche Zahl $m$ mit $f^m = 0$ gibt. Nilpotente Operatoren treten im Zusammenhang mit verallgemeinerten Eigenräumen in natürlicher Weise auf: Ist $f : V \to V$ ein beliebiger Endomorphismus und $W := V_r(f, \lambda)$ ein verallgemeinerter Eigenraum, so wird offenbar $W$ durch $f$ in sich abgebildet. Daher erhalten wir durch Einschränken von $f$ eine lineare Abbildung $g : W \to W$. Offenbar ist $g - \lambda \operatorname{id}_W$ nilpotent. Ein gutes Verständnis nilpotenter Operatoren läßt somit bessere Einsichten für die Aufspaltung 4.4 erwarten. Wir wissen (V.3.3), dass das charakteristische Polynom eines nilpotenten Endomorphimus gleich $X^n$ ist. Ist umgekehrt das charakteristische Polynom gleich $X^n$, so folgt aus dem Satz von Cayley-Hamilton, dass der Endomorphismus nilpotent ist.

**7.1 Satz.** *Ein Endomorphismus $f : V \to V$ eines endlich dimensionalen Vektorraums ist genau dann nilpotent, wenn sein charakteristisches Polynom gleich $X^n$ ist. (Es ist dann $n = \dim V$).* SEn

Wegen der Bedeutung dieses Satzes skizzieren wir einen alternativen Beweis. Zunächst einmal ist jeder Eigenwert eines nilpotenten Operators automatisch Null, denn aus $f(a) = \lambda a$ folgt $f^n(a) = \lambda^n a$ und aus $\lambda^n = 0$ folgt $\lambda = 0$. Damit ist Satz 7.1 im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Körpers unmittelbar klar. Den Fall eines beliebigen Grundkörpers $K$ kann man auf diesen Fall wie folgt zurückführen. Zunächst einmal ist es jetzt günstiger, die (äquivalente) Matrix-Version dieses Satzes auszusprechen:

*Eine quadratische **Matrix** ist genau dann nilpotent, wenn ihr charakteristisches Polynom gleich $X^n$ ist.*

Jetzt muss man etwas benutzen, was wir nicht bewiesen haben: Jeder Körper $K$ ist Unterkörper eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $L$ (so wie $\mathbb{R}$ Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.)

Besonders einfach sind nilpotente Operatoren $f : V \to V$ zu beschreiben, wenn ein zyklischer Vektor $a$ existiert.

**7.2 Satz.** *Sei $f : V \to V$ eine nilpotente lineare Abbildung, welche einen zyklischen Vektor zuläßt. Dann besitzt $V$ eine Basis, so dass die $f$ zugeordnete Matrix die Form* NJk

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*hat. Die einzigen von Null verschiedenen Einträge stehen also direkt unter der Diagonalen und sind Einsen. Diese Matrix hängt nur von der Dimension von $V$ ab.*

*Beweis.* Sei $a$ ein zyklischer Vektor. Wir wählen $n$ minimal, so dass die Vektoren $a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)$ linear unabhängig sind. Das charakteristische Polynom ist $X^n$. Es folgt $f^n = 0$ und somit $f^n(a) = 0$. Damit ist klar, dass die der Basis $a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)$ zugeordnete Matrix von $f$ die angegebene Form hat. □

Wir kehren zu der Eindeutigkeitsfrage bei der Zerlegung in zyklische Unterräume zurück und beantworten diese für nilpotente Operatoren. In Satz 7.2 haben wir gesehen, dass nilpotente Operatoren mit zyklischem Vektor im wesentlichen nur von der Dimension abhängen. Daher gibt folgender Satz eine befriedigende Antwort.

**7.3 Satz.** *Sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums und sei $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ eine Zerlegung in zyklische Unterräume, welche so angeordnet seien, dass $\dim V_1 \geq \ldots \geq \dim V_m$ gilt. Die Zahl $m$ und das Tupel $(\dim V_1, \ldots, \dim V_m)$ sind eindeutig bestimmt.* Nee

*Beweis.* Wir nennen —nur für die Zwecke dieses Beweises— die Dimension des von einem $a \in V$, $a \neq 0$, aufgespannten zyklischen Raumes $V(a)$ die *Höhe* von $a$. Wir wissen (etwa dank 7.2), dass die Höhe gleich der kleinsten natürlichen Zahl $r$ mit $f^r(a) = 0$ ist. Wir betrachten ein Element $a$ mit $V(a) = V_1$. Da wir nach fallender Dimension geordnet haben, ist $a$ ein Element maximaler Höhe in ganz $V$. Wir betrachten nun eine zweite Zerlegung $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ ebenso nach absteigender Dimension geordnet. In dieser Zerlegung gilt $a = w_1 + \cdots + w_k$. Eines der $w_i$ hat dieselbe Höhe wie $a$. Wir können annehmen, dass $w_1$ dieselbe Höhe hat. Damit gilt $\dim W_1 = \dim V_1$. Außerdem gilt $V = V_1 + (W_2 \oplus \cdots \oplus W_k)$, da $w_1$ und somit $W_1$ in der rechten Seite enthalten ist. Aus Dimensionsgründen ist diese Zerlegung direkt und es folgt auch

$$V_1 \cap (W_2 \oplus \cdots \oplus W_k) = 0.$$

Wir betrachten nun die Projektion $V \to V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$, welche auf $V_2 \oplus \cdots \oplus V_m$ die Identität und auf $V_1$ gleich Null ist. Wir schränken diese Abbildung ein und erhalten eine lineare Abbildung

$$\sigma : W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \longrightarrow V_2 \oplus \cdots \oplus V_m.$$

Ihr Kern $V_1 \cap (W_2 \oplus \cdots \oplus W_k)$ ist Null. Aus Dimensionsgründen ist $\sigma$ ein Isomorphismus. Die Bilder der $W_i$ nennen wir $U_i$. Es gilt

$$V_2 \oplus \cdots \oplus V_m = U_2 \oplus \cdots \oplus U_k.$$

Wir können mit Induktion schließen und daher annehmen, daßs $k = m$ und $\dim V_i = \dim U_i$ $(= \dim W_i)$ ist. □

## 8. Die Jordansche Normalform

Wir müssen nur noch die erzielten Resultate zusammenfügen: Wir erinnern an den Begriff des Jordankästchens: Dies sind Matrizen mit lauter gleichen Einträgen in der Diagonale, Einsen direkt unter der Duagonale und Nullen sonst:

$$J \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Auch die $1 \times 1$ Matrix $(\lambda)$ ist ein Jordankästchen (vielleicht das wichtigste). Wir kommen zu der bereits in V.3.5 angekündigten

**8.1 Existenz und Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform.** *Sei $f : V \to V$ ein Endomorphimsus eines endlich dimensionalen Vektorraums über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper. Es existiert eine Basis, bezüglich derer die Matrix von $f$ aus diagonal aneinander gereihten Jordankästchen besteht:* EEJ

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}$$

*Die Zahl $m$ ist eindeutig bestimmt und die Jordankästchen $J_i$ sind bis auf die Reihenfolge eindeutig.*

**Äquivalente Formulierung.** *Zu jeder quadratischen Matrix $A$ mit Einträgen aus einem algebraisch abgeschlossenen Körper existiert eine invertierbare Matrix $B$ gleicher Größe (mit Einträgen aus demselben Körper), so dass $BAB^{-1}$ obige Form hat und es gilt dieselbe Eindeutigkeitsaussage.*

*Existenzbeweis.* Wir zerlegen $V$ zunächst in die verallgemeinerten Eigenräume. Man arbeitet nun mit jedem dieser Eigenräume weiter und kann daher annehmen, dass es nur einen einzigen Eigenwert $\lambda$ ist. Es genügt, $f - \lambda\,\mathrm{id}$ zu zerlegen. Nun kann man annehmen, dass $f$ nilpotent ist. Jetzt wendet kann man den Zerlegungsatz 6.2 in zyklische Teilräume und danach den Struktursatz 7.2 für nilpotente Operatoren mit zyklischem Vektor an.
*Eindeutigkeitsbeweis.* Eine Basis mit der angegebenen Eigenschaft sei gegeben. Faßt man alle Jordankästchen zu festem Eigenwert $\lambda$ zusammen, so wird man auf die Zerlegung in die verallgemeinerten Eigenräume geführt. Diese ist eindeutig. Daher kann man wieder annehmen, dass nur ein einziger Eienwert vorhanden ist und danach, dass $f$ nilpotent ist. Jetzt greift der Eindeutigkeitssatz 7.3. □

# Kapitel VII. Bilinearformen

## 1. Euklidsche Bewegungen

Wir interessieren uns für lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, welche das Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

erhalten. Damit meint man

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

für alle $x, y$. Wir nennen solche Transformationen auch *othogonale Tramsformationen.* Insbesondere gilt für orthogonale Transformationen $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x$. Umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft, dass $f$ orthogonal ist, denn es gilt die sogenannte *Parallelogrammidentität*

$$2\langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle,$$

wie man leicht verifiziert. In der Analysis führt man den Euklidschen Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ wie folgt ein:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Wir sehen also:

*Ein Endomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Euklidsche Transformation, wenn sie den Euklidschen Abstand erhält, d.h.*

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Wir nennen eine $n \times n$-Matrix $A$ eine orthogonale Matrix, wenn die zugehörige Transformation $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orthogonale Transformation ist.

**1.1 Bemerkung.** *Eine reelle $n \times n$-Matrix $A$ definiert genau dann eine orthogonale Transformation $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wenn* rMo

$$A^\top A = E$$

*gilt.*

Wir bezeichnen mit $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der orthogonalen Transformationen und mit $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ die Menge der orthogonalen Matrizen.

**1.2 Bemerkung.** *Die Determinante einer orthogonalen Matrix (Transformation) ist $\pm 1$.* Doe

Es gibt also zwei Typen orthogonaler Matrizen (Transformationen), je nachdem ob die Determinante 1 oder -1 ist.

**1.3 Sprechweise.** *Eine orthogonale Matrix (Transformation) heißt* ***eigentlich orthogonal****, wenn ihre Determinante $+1$ ist.* Deo

Die Menge der eigentlich orthogonalen Transformationen bezeichnet man mit $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n)$ und die der eigentlich orthogonalen Matrizen mit $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$. Dabei lese man SO als „special orthogonal".

**1.4 Definition.** *Ein Automorphismus $f : V \to V$ eines endlich dimensionalen reellen Vektorraums heißt* ***orientierungserhaltend****, wenn seine Determinante positiv ist.* Aoe

Die folgende Beobachtung ist wenigstens eine partielle Rechtfertigung für diese Definition:

Die Matrix

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

hat die Determinante $-1$. Ihre Wirkung ist $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Geometrisch ist dies die Spiegelung an der $x$-Achse. Dies ist eine typische Transformation, welche die Orientierung nicht erhält. Es gilt übrigens $I^{-1} = I$.

Man verwendet die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_+(V) &: = \left\{ f \in \mathrm{GL}(V); \quad \det(f) > 0 \right\}, \\ \mathrm{SL}(V) &: = \left\{ f \in \mathrm{GL}(V); \quad \det(f) = 1 \right\} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) &: = \left\{ A \in \mathrm{GL}(V); \quad \det(A) > 0 \right\}, \\ \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &: = \left\{ A \in \mathrm{GL}(V); \quad \det(A) = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dabei steht GL für „general linear“ und SL für „special linear“. Es gilt

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}).$$

In den nächsten beiden Abschnitten studieren wir die orthogonalen Transformationen der Ebene und des Raumes. Dabei kann man sich immer auf eigentlich orthogonale Transformationen beschränken. Ist nämlich $I$ irgendeine nicht eigentliche orthogonale Transformation, so erhält man jede andere nicht eigentliche Transformation $A$ in der Form $A = IB$ mit einer eigentlichen orthogonalen Transformation. Man kann für $I$ beispielsweise die Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $(-1, 1, \dots, 1)$ nehmen.

## 2. Bewegungen der Euklidschen Ebene

Wir beginnen mit dem trivialen eindimensionalen Fall:

**2.1 Bemerkung.** *Es gibt genau zwei orthogonale Transformationen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nämlich die Identität und die Transformation $f(x) = -x$.* `Ote`

Alternativ kann man auch sagen:

*Es gibt genau zwei orthogonale $1 \times 1$-Matrizen, nämlich die Matrizen $(\pm 1)$.*

Der Beweis von 2.1 ist trivial, denn eine $1 \times 1$-Matrix $(a)$ ist genau dann orthogonal, wenn $a^2 = 1$ gilt. Interessanter ist der Fall der Euklidschen Ebene $\mathbb{R}^2$.

**2.2 Satz.** *Eine reelle $2 \times 2$-Matrix $A$ ist genau dann eigentlich orthogonal, wenn sie von der Form* `Zeo`

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

*ist.*

Man kennt also alle eigentlich orthogonalen Transformationen der Ebene, wenn man alle Zahlenpaare $(a, b)$ mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 = 1$ kennt. Aus der Analysis ist gekannt, dass diese Zahelnpaare alle in der Form $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ geschrieben werden können. Was wir aus der Analyis wissen müssen, ist folgendes:

*Es gibt zwei Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Sie sind peridodisch mit der Periode $2\pi$.*
2. *Es gilt $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$.*
3. *Jedes Paar $(a, b)$ reeller Zahlen mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 = 1$ ist in der Form*

$$a = \cos(\varphi), \qquad b = \cos(\varphi)$$

*darstellbar. Dabei ist* $\varphi$ *bis auf Abbänderung um ganzzahlige Vielfache von* $2\pi$ *eindeutig bestimmt. Aus* $\cos(\varphi) = \cos(\psi)$ *und* $\sin(\varphi) = \sin(\psi)$ *folgt also*

$$\varphi - \psi = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. *Es gilt* $\cos(0) = 1$ *und* $\sin(0) = 0$.
5. *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

6. *Es gilt*

$$\cos(\varphi) = \cos(-\varphi), \quad \sin(\varphi) = -\sin(-\varphi)).$$

Wir wissen nun:

**2.3 Satz.** *Eine reelle* $2 \times 2$*-Matrix* $A$ *ist genau dann eigentlich orthogonal, wenn sie von der Form* Zeo

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi \end{pmatrix}$$

*ist.*

Um die Bedeutung von $\varphi$ zu verstehen, versuchen wir die durch die Matrix induzierte lineare Abbildung zu verstehen. Dazu ist es sinnvoll, einen von Null verschiedenen Vektor $x \in \mathbb{R}$ zu schreiben. Dazu betrachtet man seine Norm $r := \|x\|$. Der Vektor $(1/r) \cdot x$ hat dann die Norm eins. Er kann daher in der Form $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ geschrieben werden. Es gilt also

$$x = r(\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$

Diese Darstellung nennt man die *Darstellung in Polarkoordinaten* von $x$. Dabei ist $r$ die Norm von $x$. Man nennt $\varphi$ ein *Argument* von $x$. Wir sagen bewußt „ein“ Argument, weil jedes $\varphi + 2n\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$ genauso Argument ist wie $\varphi$. Geometrisch beschreibt das Argument den Winkel zwischen den beiden Halbgraden $\{tx;\ t > 0\}$ und $\{(t,0); t > 0\}$. Wir wenden nun die orthogonale Matrix $M_\varphi$ auf den Vektor $r(\cos(\psi), \sin(\psi))$ an:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\psi) \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Wendet man die Additionstheoreme an, so folgt

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\psi) \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\psi) \\ r\sin(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$$

Geometrisch ist dies eine Drehung der Ebene um den Nullpunkt mit dem Drehwinkel $\varphi$.

*Eigentlich orthogonale* $2\times 2$*-Matrizen beschreiben Drehungen der Ebene um den Nullpunkt. Die orthogonale Transformation* $D_\varphi$ *ist eine Drehung der Ebene entgegen des Uhrzeigersinns um den Winkel* $\varphi$*.*

Eine weitere Anwendung der Additionstheorem besagt:

**2.4 Satz.** *Es gilt* Gik
$$D_\varphi \cdot D_\psi = D_{\varphi+\psi}.$$

*Insbesondere ist die Gruppe aller eigentlich orthogonalen* $2 \times 2$*-Matrizen kommutativ.*

Die Kommutativität hat einige bemerkenswerte Konsequenzen. Um sie zu beleuchten, wollen wir ein wenig die Frage der Orientierung vertiefen.

**2.5 Definition.** *Zwei Basen* $e_1, \dots, e_n$ *und* $f_1, \dots, f_n$ *eines reellen Vektorraums heißen* ***orientierungsgleich****, falls die Übergangsmatrix positive Determinante hat.* Oig

Ist der Vektorraum $V$ speziell der $\mathbb{R}^n$, so haben wir eine ausgezeichnete Basis, nämlich die Standardbasis. Wir nenne eine beliebige Basis des $\mathbb{R}^n$ *positiv orientiert,* wenn sie orientierungsgleich mit der Standardbasis ist. Dies heißt im Klartext folgendes: Schreibt man die $n$ Vektoren der Basis als Spalten einer $n \times n$-Matrix, so hat diese positive Determinante. Die Standardbasis ist somit positiv orientiert, die Basis $(1, 0)$, $(0, -1)$ hingegen nicht.

**2.6 Bemerkung.** *Eine Orthonormalbasis* $f_1, f_2$ *der Euklidschen Ebene ist genau dann positiv orientiert, wenn es eine Drehung* $D_\varphi$ *gibt, welche den Standardeinheitsvektor* $e_i$ *in* $f_i$ *Überführt.* OEp

Es gilt offensichtlich
$$e_2 = D_{\pi/2} e_1.$$

Anschaulich besagt dies, dass man den zweiten Einheitsvektor aus dem ersten erhält, indem man diesen um 90 Grad im Uhrzeigersinn dreht. Enrsprechendes gilt dann für jede positiv orientierte Orthonormalbasis $f_1, f_2$, wie folgende Rechnung zeigt: Aus $f_1 = D_\varphi e_1$ und $f_2 = D_\varphi e_2$ in Verbindung mit $e_2 = D_{\pi/2} e_1$ folgt
$$D_{\pi/2} f_1 = D_{\pi/2} D_\varphi^{-1} e_1 = D_{\pi/2} D_\varphi^{-1} D_{\pi/2}^{-1} e_2.$$

Wegen der Kommutativität der Drehgruppe folgt
$$D_{\pi/2} f_1 = f_2.$$

Wir sehen also, dass eine Orthonormalbasis der Euklidschen Ebene genau dann positiv orientiert ist, wenn $f_2$ durch Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn (also durch Anwenden von $D_{\pi/2}$ aus $f_1$ gewonnen werden kann.

Diese Sachverhalte sind anschaulich alle unmittelbar einleuchtend. Wichtig ist, dass unser Formalismus auch im Raum und höheren Dimensionen zu Einsichten führt.

## 3. Bewegungen des dreidimensionalen Raumes.

Wir betrachten nun orthogonale $3 \times 3$-Matrizen $A$ und die ihnen zugeordneten orthogonalen Transformationen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Es kommt wieder darauf an, die eigentlich orthogonalen Transformationen zu verstehen. Wir beschreiben zunächst Drehungen des Raumes:

Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind offensichtlich orthogonal. Sie lassen offenbar die $x_3$-Achse fest und drehen um die $x_3$-Achse mit dem Winkel $\varphi$. Wir wollen nun allgemeiner Drehungen um beliebige Achsen definieren. Gegeben sei als ein eindimensionaler Untervektorraum $L \subset \mathbb{R}^3$ und ein Drehwinkel $\varphi$. Wir wollen definieren, was man unter der Drehung um die Achse $L$ mit dem Winkel $\varphi$ versteht. Bereits die Anschauung zeigt, dass es hierzu zwei Möglichkeiten gibt, je nachdem man die Richtung der Drehachse wählt. Um der Drehachse eine Richtung zu verleihen, bemerken wir, dass es in $L$ genau zwei Vektoren der Länge eins gibt. Ist $a$ der eine, so ist $-a$ der andere. Der Achse $L$ eine Richtung zu verleihen, bedeutet, einen der beiden Vektoren auszuzeichnen. Es ist damit besser, als Eingangsdaten der Drehung ein Paar $(a, \varphi)$ bestehend aus einem Vektor $a$ der Länge eins und einem Drehwinkel $\varphi$ zu betrachten. Um die Drehung $\varphi$ zu definieren, schreiben wir $a = f_3$ und ergänzen diesen Vektor zu einer Orhonormalbasis $f_1, f_2, f_3$. Wir wollen dies so tun, dass sie positiv orientiert ist. Dazu muss man eventuell $f_1$ durch $-f_1$ ersetzen. Jetzt können wir denjenigen Endomorphismus $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ betrachten, der bezüglich der Basis $f_1, f_2, f_3$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

**3.1 Bemerkung.** *Sei $a \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor der Länge eins und $\varphi$ ein Drehwinkel. Dann existiert eine eigentlich orthogonale Transformation* bDr

$$D_{a,\varphi} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*mit folgender Eigenschaft. Ist $f_1, f_2, f_3 = a$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, so entspricht $D_{a,\varphi}$ der Matrix*

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Die Transformation $D_{a,\varphi}$ hängt nicht von der Wahl der Basisergänzung ab.*

*Beweis.* Wir müssen nur noch die Unabhängigeit von der Basisergänzung beschreiben. Sei also $f_1', f_2', f_3' = a$ eine zweite Ergänzung. Die Übegangsmatrix ist dann von der Form $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit einer $2\times 2$-Matrix $A$. Die Übergangsmatrix ist orthogonal und hat Determinante eins. Dann ist auch $A$ orthogonal und hat Determinante 1. Bezüglich der neuen Basis wird $D_{a,\varphi}$ beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} AD_\varphi A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Gleichung gilt wegen der Kommutativität von $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. □

Unter einer Drehung des dreidimensionalen Euklidschen Raumes verstehen wir eine Transformation der Form $D_{a,\varphi}$. Wir wollen noch feststellen, inwieweit $(a, \varphi)$ durch die Drehung bestimmt ist. Ist $\varphi = 0$ oder ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$, so ist $D_{a,\varphi}$ die Identität.

**3.2 Bemerkung.** *Zwei Drehungen $D_{a,\varphi}$ und $D_{b,\psi}$ stimmen genau dann überein, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:* Dsg

a) *$\varphi$ und $\psi$ sind beide ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$. (Dann handelt es sich um die Identität.)*
b) *Es gilt $a = b$ und $\varphi - \psi$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$.*
c) *Es gilt $a = -b$ und $\varphi + \psi$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$.*

Daß $(a, \varphi)$ und $(-a, -\varphi)$ die gleiche Drehung definieren, kann man so verstehen: Dreht man um die Achse $L = \mathbb{R}a$ in Blickrichtung $a$ um den Winkel $\varphi$, so kommt dasselbe heraus, wenn man diese Achse in der Blickrichtung $-a$ um den Winkel $-\varphi$ dreht.

Anschaulich nicht so leicht nachvollziehbar ist folgendes Analogon von 2.3.

**3.3 Satz.** *Jede eigentlich orthogonale Transformation des dreidimensionalen Euklidschen Raumes ist eine Drehung.* DDe

*Beweis.* Sei $D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eigentlich orthogonal. Wenn $D$ eine Drehung sein soll, so muß zumindest ein eindimensionaler Unterraum existieren, welcher punktweise fest bleibt. Seine Elemente sind Eigenvektoren zum Eigenwert eins. Der entscheidende Teil des Beweises besteht darin nachzuweisen, dass $D$ den Eigenwert eins hat. Dazu untersuchen wir das charakteristische Polynom. Ein Polynom dritten (also ungeraden Grades) hat mindestens eine reelle Nullstelle, wie man sich leicht aus dem Verlauf klarmacht. Es gibt also einen von Null verschiedenen Vektor $a$ und eine reelle Zahl $\lambda$ mit $D(a) = \lambda a$. Da $D$ Längen erhält folgt $\lambda = \pm 1$. Es kann sein, dass $D$ nur reelle Eigenwerte hat. Der Eigenwert $-1$ muss mit gerader Vielfachheit vorkommen, da die Determinante (=Produkt der Eigenwerte) nach Voraussetzung gleich 1 ist. Mindestens ein Eigenwert muss somit 1 sein. Alternativ kann es neben $\lambda$ auch einen nicht reellen Eigenwert $\alpha$ geben. Dann ist auch $\bar{\alpha}$ Eigenwert und die Determinante ist $\lambda\alpha\bar{\alpha} = 1$. Es folgt, dass $\lambda = +1$ ist. In jedem Fall ist also 1 Eigenwert.

Wir wählen nun einen Eigenvektor $f_3$ der Länge eins zum Eigenwert eins und ergänzen diesen zu einer positiv orientierten Orhtonormalbasis $f_1, f_2, f_3$. Da $D$ das orthogonale Komplement von $f_1$ in sich abbildet, gilt

$$D(f_1) = af_1 + cf_2, \quad D(f_2) = bf_1 + df_2.$$

Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist offenbar eigentlich orthogonal und daher eine Drehmatrix. Dies beweist Satz 3.3. □

Eine interessante Konsequenz von Satz 3.3 besagt:

**3.4 Satz.** *Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen des dreidimensionalen Euklidschen Raumes ist wieder eine Drehung.* HDd

In diesem Zusammenhang entsteht die Frage, wie man Drehachse und Drehwinkel einer eigentlich orthogonalen Matrix $A$ auffinden kann. Bei der Drehachse haben wir dies bereits gesehen. Man muss die Eigenwertgleichung $Ax = x$ lösen und diese ist ein lineares Gleichungssystem. Um den Drehwinkel zu bekommen, erinneren wir an den Begriff der Spur eines Endomorphismus und inbesondere daran, dass dieser Begriff basisinvariant ist. Wir sehen, dass die Spur einer Drehung gleich $1 + 2\cos\varphi$ ist. Wenigstens den Kosinus des Drehwinkels kann also aus der Spur ablesen. Der Kosinus legt den Drehwinkel bis auf die Abänderung $\varphi \mapsto \pm\varphi + 2n\pi$ mit ganzem $n$ fest. Mehr kann man wegen 3.2 nicht erwarten.

## 4. Allgemeines über Bilinearformen

Der Grundkörper $K$ kann nun wieder beliebig sein. Unter einer Bilinearform $B$ auf einem $K$-Vektorraum $V$ versteht man eine Abbildung

$$B : V \times V \longrightarrow K,$$

welche in jeder der beiden Variablen linear ist. Die Linearität in der ersten Variablen besagt beispielsweise

$$B(a + b, c) = B(a, c) + B(b, c), \quad B(ta) = tB(a) \qquad (t \in K,\ a, b, c \in V).$$

Wir sind außschließlich an *symmetrischen Bilinearformen*

$$B(a, b) = B(b, a)$$

interessiert. Eine einfache Rechnung zeigt

$$2B(a, b) = B(a + b, a + b) - B(a, a) - B(b, b).$$

Man nennt diese Relation gelegentlich die Parallelogrammidentität, weil sie im Spezialfall einer Euklidschen Metrik eine geometrische Bedeutung hat, welche für uns allerdings ohne Belang ist.

Unter 2 verstehen wir hier wie üblich die natürliche Zahl 2 und $2a$ ist defnmitionsgemäß $a + a$. Man kann andererseits $2_K = 1_K + 1_K$ defnieren, wobei $1_K \in K$ das Einselement des Körpers $K$ bezeichne. Es gilt sicherlich

$$2a = a + a = (1_K + 1_K)a = 2_K a.$$

Zwischen 2 und $2_K$ scheint also auf den ersten Blick kein großer Unterschied zu sein. Und doch kann eine großer Unterschied bestehen: Es gibt Körper, in denen $2_K = 0_K$ gilt. Beispielsweise hat der Körper, welcher nur aus zwei Elementen besteht, die Charakteristik zwei. Solche Körper wollen wir hier nicht betrachten. Wir setzen also im folgenden immer voraus, dass $K$ nicht die Charakteristik 2 hat. Es gibt nun Körper in denen $1_K + 1_K = 0$ gilt, beispielsweise den Körper, welcher nur zwei Elemente enthält. In solchen Körpern gilt immer $a + a = 0$. Solche Körper wollen wir hier ausschließen. Wir setzen also Dann kann man jedes Element $a$ von $K$ halbieren. Man kann $a/2_K$ betrachten. Wir schreiben der Einfachheit halber hierfür auch $a/2$. Jedenfalls gilt $a = a/2 + a/2$.

**4.1 Definition.** *Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$ mit von zwei verschiedener Charakteristik. Eine Funktion* DqF

$$q : V \longrightarrow K$$

*heißt **quadratische Form**, wenn*

$$B(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$$

*eine Bilinearform ist.*

Es gilt dann

$$q(x) = B(x, x)/2.$$

Quadratische Formen haben insbesondere die Eigenschaft

$$q(tx) = t^2 q(x),$$

woher der Name rührt. Wir sehen, dass sich quadratische Formen umkehrbar eindeutig entsprechen. Es ist Geschmacksfrage, ob man eher mit der quadratischen Form $q$ oder der Bilinearform $B$ arbeitet.

**4.2 Definition.** *Ein quadratischer Raum $(V, q)$ ist ein Paar, bestehend aus einem Vekrorraum $V$ (über einem Körper von zwei verschiedener Charakteristik) und einer quadratischen Form $q$.* DQr

Genausogut könnte man sagen, ein quadratischer Raum sei ein Vektorraum zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform. Ist $B$ die $q$ zugeordnete Bilinearform, so erlauben wir auch die Bezeichnung $(V, B)$ anstelle von $q$. Wichtige Beispiele quadratischer Räume sind die Euklidischen Vektorräume. Hier ist der Grundkörper der Körper der reellen Zahlen und die quadratische Form ist positiv definit, $q(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

## 5. Das Klassifikationsproblem

Unter einem (isometrischen) Isomorphismus quadratischer Räume $(V_1, q_1)$, $(V_2, q_2)$ versteht man einen Vektorraumisomorphismus

$$f : V_1 \longrightarrow V_2 \quad \text{mit} \quad q_2(f(x)) = q_1(x) \quad \text{für} \quad x \in V.$$

Es gilt dann auch

$$B_2(f(x), f(y)) = B_1(x, y),$$

wenn $B_i$ die $q_i$ zugeordnete Bilinearform bezeichnet. Man nennt zwei quadratische Räume *isomorph,* manchmal auch *isometrisch isomorph,* der auch einfach *isometrisch,*, wenn ein ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

Das Klassifikationsproblem für quadratische Räume besagt: Sei $K$ ein Körper Man verschaffe sich eine Liste (=Menge) nicht ausgearteter quadratischer Räume, so dass jeder nicht ausgeartete quadratische Raum zu genau einem Exemplar dieser Liste isometrisch isomorph ist.

Dieses Problem ist hoch kompliziert. Wir werden es in den Fällen $K = \mathbb{C}$ und und $K = \mathbb{R}$ lösen. Gelsöst ist das Problem auch für endliche Körper und auch für den Körper der rationalen Zahlen. Doch dies führt tief in die Zahlentheorie und übersteigt unsere Möglichkeiten.

### Die Grammatrix

Sei $(V, q)$ ein quadratischer Raum und $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $V$. Man kann dann die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} B(e_1, e_1) & \dots & B(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(e_n, e_1) & \dots & B(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

bilden.

**5.1 Bemerkung.** *Sei $V$ ein Vektorraum mit einer ausgezeichneten Basis* Uqs
*$e_1, \dots, e_n$. Ordnet man jeder quadratischen Formen ihre Grammatrizen zu, so erhält man eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen quadratischen Formen auf $V$ und symmetrischen $n \times n$-Matrizen*

*Beweis.* Ist $S$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix, so erhält man durch

$$B\Bigl(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\Bigr) = \sum_{1 \le i,j \le n} s_{ij} x_i y_j$$

eine symmetrische Bilinearform mit Grammatrix $S$ und diese ist die einzige Möglichkeit. $\square$

Im Spezialfall $V = K^n$ hat man eine ausgezeichnete Basis, nämlich die kanonische Basis. Ist $S$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix, so ist die zugehörige Bilinearform $B = B_S$ offenbar gleich

$$B_S(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} s_{ij} x_i x y_j.$$

Faßt man $x$ und $y$ als Spaltenvektoren auf, so gilt offenbar

$$B(x, y) = x^\top S y = y^\top S x \qquad \text{(Matrizenmultiplikation).}$$

Wir wollen berechnen, wie sich die Grammatrix ändert, wenn man die Basis ändert. Sei also $B$ eine Bilinearform, $S$ ihre Grammatrix bezüglich einer Basis $e_1, \dots, e_n$ und $T$ die Grammatrix bezüglich einer weiteren Basis $f_1, \dots, f_n$. Wir bezeichnen mit $A$ die Basiswechselmatrix, also $f_i = \sum a_{ji} e_j$. Ist

$$a = \sum x_i e_i = \sum u_i f_i,$$

so gilt $x = Au$, wenn wir die Komponenten in Spaltenform zusammenfassen. Es folgt

$$x^\top S x = (Au)^\top S (Au) = u^\top (A^\top S A) u.$$

Damit sehen wir:

**5.2 Satz.** *Sei $B$ eine symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum* Bgg
*$V$, auf dem zwei Basen $e_1, \dots, e_n$ und $f_1, \dots, f_n$ ausgezeichnet seien. Die Basiswechselmatrix sei $A$ (also $f_i = \sum a_{ji} e_j$). Die Grammatrizen bezügluch der beiden Basen seien $S = (B(e_i, e_j))$ und $T = (B(f_i, f_j))$. Es gilt*

$$T = A^\top S A.$$

Wir wissen, dass Basiswechsel auch als Isomorphismen von Vektorräumen gedeutet werden können. Wir wollen 5.2 auch in der Sprache der Isomorphismen ausdrücken. Zunächst erinnern wir daran, dass die Wahl einer Basis $e_1, \dots, e_n$ eines Vektorraums einen Vektorraumisomorphismus

$$\sigma : V \to K^n, \quad \sum x_i e_i \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

nach sich zieht. Ist $B$ eine symmetrische Bilinearform auf $V$ mit Grammatrix $S$ und ist $B_S$ die $S$ entsprechende Bilinearform auf $K^n$, so wird $\sigma$ eine Isometrie

$$\sigma : (V, B) \xrightarrow{\sim} (K^n, B_S).$$

Eine zweite Basis $f_1, \dots, f_n$ mit induzierter Grammatrix $T$ liefert eine zweite Isometrie

$$\sigma : (V, B) \xrightarrow{\sim} (K^n, B_T).$$

Wir erhalten somit eine Isometrie

$$\tau \circ \sigma^{-1} : (K^n, B_S) \xrightarrow{\sim} (K^n, B_T).$$

Wir erinnern daran, dass die Basiswechselmatrix $A$ die der Anbbildung $\tau \circ \sigma^{-1}$ zugeorednete Abbildung ist. Schreibt man also die Elemente von $K^n$ als Spalten, so ist $\tau \circ \sigma^{-1}$ die Multiplikation mit $A$. Damit wir offensichtlich, dass 5.2 in der Sprache der Isomorphismen folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

**5.3 Satz.** *Seien $S, T$ zwei symmetrische $n \times n$-Matrizen. Die durch eine invertierbare $n \times n$-Matrix $A$ vermittelte lineare Abbildung $K^n \to K^n$ ist genau dann eine Isometrie $(K^n, B_S) \to (K^n, B_T)$, wenn $T = A^\top SA$ gilt.* GbI

Wir sehen also, dass das Problem der Klassifikation endlich dimensionaler quadratsicher Räume darauf hinausläuft zu einer vorgelegten Bilinearform geeignete Basen zu finden.

## 6. Orthogonalbasen

In diesem Abschnitt werden alle Vektorräume als endlich dimensional vorausgesetzt.

Wir wollen vom Fall Euklidscher Räume einige Begriffsbildungen übernehmen und nehmen dabei in Kauf, dass deren ursprünglicher geometrischer Sinn verloren geht.

*Zwei Vektoren $(a, b)$ eines quadratischen Raumes $(V, q)$ heißen* ***orthogonal****, falls $B(a, b) = 0$ gilt.*

Im Unterschied zu Euklidschen Vektorräumen kann ein von Null verschiedener Vektor durchaus auf sich selbst senkrecht stehen. Nimmt man beispielsweise $V = K^2$ mit der quadratischen Form $q(x) = x_1x_2$ (die zugehörige Bilinearform ist $B(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$), so stehen beide Einheitsvektoren auf sich selbst senkrecht.

Ist $M \subset V$ eine Teilmenge eines quadratischen Raumes $(V, q)$, so kann man das *orthogonale Komplement*

$$N^\perp := \{\, a \in V; \quad B(a, x) = 0 \text{ für alle } x \in V \,\}$$

definieren. Es ist unmittelbar klar, dass $M^\perp$ ein Untervektorraum ist. Wenn $M$ ein Untervektorraum ist, so braucht im allgemeinen nicht $M + M^\perp = V$

zu gelten. Dies zeigt das obige Beispiel, denn mit $M = \mathbb{R}(1,0)$ gilt offenbar $M^\perp = M$. In „vernünftigen“ quadratischen Räumen gilt wenigstens noch $\dim M + \dim M^\perp = \dim V$. Wir wollen die Bedingung hierfür herausarbeiten. Dazu betrachten wir $V^\perp$, also die Menge aller Vektoren, welche auch ganz $V$ senkrecht stehen. In dem extremen Fall $q(x) = 0$ für alle $x$ gilt beispielsweise $V^\perp = V$. Diesen und ähnliche Entartungsfälle wollen wir ausschließen:

**6.1 Definition.** *Eine quadratischer Raum $(V, q)$ heißt* ***nicht ausgeartet,*** *wenn es zu jedem von Null verschiedenen Vektor $a \in V$ einen Vektor $b$ mit $B(a, b) \neq 0$ gibt, wenn also $V^\perp$ nur aus dem Nullvektor besteht.* DNa

Folgende Überlegung zeigt, dass man sich beim Studium quadtratischer Räume auf nicht ausgeartete zurückziehen kann. Sei also $(V, q)$ ein quadratischer Raum. Wir wählen eine Komplement $W$ von $V^\perp$, also einen Untervektorraum mit der Eigenschaft $W \oplus V^\perp = V$. Die Elemente von $V$ können dann in der Form $a + b$ mit $a \in W$ und $b \in V^\perp$ geschrieben werden. Es gilt dann

$$q(a + b) = \frac{1}{2}B(a + b, a + b) = q(a) + q(b) + B(a, b) = q(a).$$

Das $b$ ist also belanglos. Daher reicht es zum Verständnis des quadratischen Raumes $(V, q)$ aus, wenn man die quadratische Form auf $W$ einschränkt und den quadratischen Raum $(W, q|W)$ betrachtet. Dieser Raum ist aber nicht ausgeartet, wie man sich leicht überlegt. Aus diesem Grund wollen wir und im folgenden aus nicht ausgeartete quadratische Räume konzentrieren.

**6.2 Bemerkung.** *Für einen quadratischer Raum sind folgende Aussagen gleichbedeutend:* Gna

a) *Er ist nicht ausgeartet.*
b) *Es existiert eine Basis, so dass die Grammatrix nicht ausgeartet ist.*
c) *Bezüglich jeder Basis ist die Grammatrix nicht ausgeartet.*

Wir zeigen nun:

**6.3 Satz.** *Sei $(V, q)$ ein nicht ausgearteter quadratischer Raum und $W \subset V$ ein Unterraum. Es gilt* Ena

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp.$$

*Beweis.* Sei $e_1, \dots, e_m$ eine Basis von $W$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow K^m, \quad a \longmapsto (B(a, e_1), \dots, B(a, e_m)).$$

Da die Matrix $(B(e_i, e_j))$ Maximalrang hat, ist dies Abbildung surjektiv. Es folgt $\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + m$. Der Kern von $f$ ist aber genau das orthogonale Komplement $W^\top$. □

Wenn die Einschränkung von $q$ auf $W$ nicht ausgeartet ist, verbessert sich die Situation noch:

**6.4 Satz.** *Sei $(V, q)$ ein quadratischer Raum und $W$ ein Unterraum, so dass die Einschränkung von $q$ auf $W$ nicht ausgeartet ist. Dann gilt* EnA

$$V = W \oplus W^\top.$$

Derselbe Beweis wie der von 6.3 zeigt die Formel $\dim V = \dim W + \dim W^\top$. Wir benötigen zum Beweis von 6.4 noch $W^\top \cap W = 0$, wobei $W^\top$ das orthogonale Komplement von $W$ in $V$ bezeichne. Dies folgt aber unmittelbar, wenn auch $W$ nicht ausgeartet ist. □

.

**6.5 Satz.** *Jeder quadratische Raum $(V, q)$ besitzt eine Orthogonalbasis, d.h. eine Basis, so dass die zugehörige Grammatrix eine Diagonalmatrix ist.* Qbo

**Matrixversion.** *Zu jeder symmetrischen $n \times n$-Matrix $S$ (mit Koeffizienten aus einem Körper mit von zwei verschiedener Charakteristik) existiert eine invertierbare $n \times n$-Matrix $A$, so dass $A^\top SA$ Diagonalmatrix ist.*

Der Beweis ist ähnlich wie im Euklidischen Fall. Mann kann annehmen, dass ein Vektor $a$ mit $q(a) \neq 0$ existiert. Andernfalls wäre die Bilinearform Null und somit jede Basis Orthogonalbasis. Die Einschränkung von $q$ auf $Ka$ ist nicht ausgeartete, folgedessen gilt $V = Ka \oplus Ka^\top$. Der Beweis erfolgt nun leicht durch Induktion nach der Dimension. □

Das Klassifikationsproblem ist damit allerdings noch nicht gelößt, denn es kann durchaus sein, dass es zu zwei verschiedenen Diagonalmatrizen $S$ und $T$ eine invertierbare Matrix $A$ mit $T = A^\top SA$ gibt. In der Tat ist dieses Problem in voller Allgemeinheit nicht gelöst. Lösungen sind in den beiden Fällen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ bekannt und einfach und werden unten gleich dargestellt. Bakannt ist auch die Lösung im Fall endlicher Körper und auf im Falle des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Dies führt allerdings tief in die Zahlentheorie und kann hier nicht behandelt werden.

**6.6 Satz.** *Jeder nicht ausgeartete quadratische Raum $(V, q)$ über dem Körper der komplexen Zahlen ist isometrisch zu* Kcq

$$\mathbb{C}^n, \quad q(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2.$$

*Die zugehörige Bilineraform ist $z_1 w_1 + \ldots + z_n w_n$.*

*Beweis.* Sei $S$ die Grammatrix bezüglich einer geeigneten Basis. Wir können annehmen, dass $S$ diagonal ist. Außerdem können wir $S$ durch $A^\top SA$ mit einer invertierbaren Matrix ersetzen. Wir neh,em für $A$ selbst eine Diagonalmatrix. Wir sehen, dass man ein beliebiges Diagonalelement $d$ von $S$ durch $da^2$ mit einer von Null verschiedenen Zahl ersetzen können. Nach Voraussetzung ist $d$ von Null verschieden. Für $a$ nehme man eine der beiden Wurzeln von $1/d$.

□

**6.7 Satz.** *Jeder nicht ausgeartete quadratische Raum $(V, q)$ über dem Körper der rellen Zahlen ist isometrisch zu* Krq

$$\mathbb{R}^n, \quad q(x) = x_1^2 + \cdots + x_a^2 - x_{a+1}^2 - \cdots - x_{a+b}^2 \qquad (a + b = n).$$

**Sylvesterscher Trägheitssatz.** *Das Zahlenpaar $(a, b)$ ist eindeutig bestimmt. (Man nennt es auch den **Index** der quadratischen Form.)*

*Beweis.* Ist $d$ eine von Null verschiedene reelle Zahl, so gilt $da^2 = \pm 1$, wenn man $a = 1/\sqrt{|d|}$ setzt. Derselbe Beweis wie im komplexen Fall zeigt, dass man die angegebene Normalform erreichen kann. Es bleibt die Eindeutigkeit von $(a, b)$ zu beweisen. Es ist etwas durchsichtiger, wenn man mit einem abstrakten quadratischen Raum $(V, q)$ arbeitet. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis, bezüglich derer die Grammatrix eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ ist ($a$ Einsen und $b$ Minuseinsen). Wir betrachten die Unterräume

$$V_1 = \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_a, \quad V_2 = \mathbb{R}e_{a+1} + \cdots \mathbb{R}e_n.$$

Es gilt

$$\dim V_1 = a, \quad \dim V_2 = b \qquad (a + b = n).$$

Die Einschränkung von $q$ auf $V_1$ ist positiv definit, die auf $V_2$ negativ definit. Eine zweite Basis derselben Art führt zu einer analogen Aufspaltung

$$\dim V_1' = a', \quad \dim V_2' = b \qquad (a' + b' = n)$$

mit positiv definitem $V_1'$ und negativ definitem $V_2'$. Unsere Aufgabe ist es, $a = a'$ zu beweisen. Dies geht folgendermaßen: Da $V_1$ positiv und $V_2'$ negativ definit ist, gilt

$$V_1 \cap V_2' = 0.$$

Hieraus folgt $a + b' \le n$. Wegen $a' + b' = n$ folgt $a \le a'$. Aus Symmetriegründen gilt auch $a' \le a$. Es folgt $a = a'$ (und damit auch $b = b'$). □

## 7. Orthogonale Gruppen

Sei $(V, q)$ ein quadratischer Raum über einem Körper $K$. Unter einer orthogonalen Transformation von $(V, q)$ versteht man einfach einen isometrischen Isomorphismus von $(V, q)$ auf sich selbst. Die Menge der isometrischen Isomoorphismen bezeichnet man mit $\mathrm{O}(V, q)$ oder einfach mit $\mathrm{O}(V)$, wenn aus dem Zusammenhang heraus klar ist, welches $q$ gemeint ist. Ist $B$ die $q$ entspechende symmetrische Bilinearform, so kann auch $\mathrm{O}(V, B)$ anstelle von $\mathrm{O}(V, q)$ geschrieben werden.

**7.1 Bemerkung.** *Sei $(V, q)$ ein quadratischer Raum. Die Zusammensetzung zweier orthogonaler Transformationen ist wieder eine orthogonale Transformation. Das Inverse einer orthogonalen Transformation ist wieder eine orthogonale Transformation. Insbesondere ist $\mathrm{O}(V, q)$ eine Gruppe, wobei verknüpfung die Hintereinanderausführung ist.* OGd

Man nennt $V$ die orthogonale Gruppe. Man kann die orthogonale Gruppe auch mit Matrizen beschreiben: Sei $S$ eine symmetrische $m \times n$-Matrix. Wir bezeichnen mit $\mathrm{O}(S)$ die Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft $A^\top SA = S$. Es ist leicht nachzurechnen, dass auch $\mathrm{O}(S)$ eine Gruppe ist, wenn als Verknüpfung die Matrizenmultiplikation nimmt.

**7.2 Bemerkung.** *Sei $(V, q)$ ein quadratischer Raum und $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $V$. Die zugehörige Grammatric sei $S$. Ordnet man jeder orthogonalen Transformation die zugehörige Matrix zu, so erhält man einen Gruppenisomorphismus* MdO

$$\mathrm{O}(V, q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(S).$$

Es ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und auch ein wenig des Geschmacks, ob man die abstrakte Version $\mathrm{O}(V)$ oder die Matrixversion $\mathrm{O}(S)$ benutzt.

### Spiegelungen

Will man orthogonale Gruppen verstehen, so muss man zunächst einmal Elemente konstruieren. Dazu betrachtet man Zerlegung $V = A \oplus B$, wobei $A, B$ Untervektorräume sind, welche aufeinander senkrecht stehen. Jedes Element von $V$ ist also eindeutig in der Form $a + b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ darstellbar und es ist $q(a + b) = q(a) + q(b)$. Die Zuordnung

$$a + b \longmapsto -a + b$$

ist offenbar orthogonal. Wir interessieren uns hauptsächlich für einen Spezialfall: Sei $a \in V$ ein Vektor mit $q(a) \neq 0$. Dann ist die Einschränkung von $q$ auf den eindimensionale Raum $Ka$ nicht ausgeartet. Nach 6.4 hat man dann eine orthogonale Zerlegung $V = Ka + (Ka)^\perp$. Man kann also obige orthogonale Transformation betrachten. Es ist leicht, eine geschlossene Formel zu finden:

$$x \longmapsto x - \frac{(x, a)}{q(a)} a.$$

Dies ist eine lineare Abbildung, die offenbar $a$ in $-a$ abbildet und die auf dem orthogonalen Komplement von $a$ als Identität wirkt.

**7.3 Definition.** *Eine Spiegelung $f$ eines quadratischen Raums $(V, q)$ ist eine orthogonale Transformation aus $\mathrm{O}(V, q)$, so dass die Menge der Fixpunkte $f(x) = x$ eine Hyperbene $H$ ist, so dass die Einschränkung von $q$ auf $H$ nicht ausgeartet ist.* DSp

Offenbar gilt:

**7.4 Bemerkung.** *Eine orthogonale Transformation $f$ eines quadratischen Raumes ist genau dann eine Spiegelung, wenn es einen Vektor $a$ mit $q(a) \neq 0$ gibt, so dass $f$ durch die Formel* BoS

$$x \longmapsto x - \frac{(x,a)}{q(a)} a$$

*gegeben wird. Dieser Vektor ist bis auf konstantes Vielfaches eindeutig bestimmt.*

## 8. Die Lorentzgruppe

## 9. Weitere Bilinearformen

## 10. Hermitesche Formen

## 11. Alternierende Formen