3. November 2020

$\mathrm{GL}(n,K)$ general linear
$\mathrm{SL}(n,K)$ special linear

$K$ kommutativer Ring mit 1

$E_n$: $n\times n$-Einheitsmatrix

$$E_{pq} = \begin{pmatrix} -E_q & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}$$

$$E_{31} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

reelle orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(p,q)$
$\{A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R});\quad A'E_{pq}A = E_{pq}\}$ $(n=p+q)$

unitäre Gruppe $\mathrm{U}(p,q)$
$\{A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C});\quad \bar{A}'A = E_{pq}\}$

spezielle orthogonale (unitäre) Gruppe
$\mathrm{SO}(p,q),\quad \mathrm{SU}(p,q)$

Kompakte Gruppen, falls $q=0$
$\mathrm{O}(p) = \mathrm{O}(p,0),\dots$

maximal kompakt
$\mathrm{SO}(2)\subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),\quad \mathrm{SU}(2)\subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

$$\mathrm{U}(1) = S^1 = \{\zeta\in\mathbb{C};\ |\zeta| = 1\}$$

$$\mathrm{SO}(2) \xrightarrow{\sim} S^1;\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto a - \mathrm{i}b$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \longmapsto e^{\mathrm{i}\varphi}$$

Lorentzgruppe: $\mathrm{O}(3,1)$
2 Untergruppen vom Index 2
$\mathrm{SO}(3,1)$ eigentliche Lorentzgruppe
$\mathrm{O}^+(3,1)$ orthochrone Lorentzgruppe
definiert durch $a_{11}\geq 1$

$\mathrm{SO}^+(3,1)$ eigentlich orthochron sind alle offen und abgeschlossen

offene Untergruppen sind abgeschlossen

abgeschlossene Untergruppen
von endlichem Index sind offen

$\mathrm{SO}^+(3,1)$ ist zusammenhängend
Normalteiler, Index 4
Faktorgruppe $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$

$$E_4, \quad -E_4, \quad E_{31}, \quad -E_{31}$$

Fundamentale Konstruktion
$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}^+(3,1)$
2-blättrig

allgemeiner $\mathrm{Spin}(p,q) \longrightarrow \mathrm{SO}(p,q)$
via Cliffordalgebra

$$\mathrm{O}(3) \longrightarrow \mathrm{O}(3,1), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$\mathrm{O}(3) \longrightarrow \mathrm{O}^+(3,1)$, $\mathrm{SO}(3) \longrightarrow \mathrm{SO}^+(3,1)$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(3) & \longrightarrow & \mathrm{SO}^+(3,1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{SU}(2) & \longrightarrow & \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \end{array}$$

Inhomogene Lorentzgruppe
besteht aus Transformationen

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad v \longmapsto Av + a$$

$$A \in \mathrm{O}(3,1),\ a \in \mathbb{R}^4$$

als Menge $\mathrm{O}(3,1) \times \mathbb{R}^4$

$$(g,a)(h,b) = (gh, a + gb)$$

Matrixgruppe
topologisch isomorph zu
abgeschlossener Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$

$$\mathrm{O}(3,1)\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathrm{GL}(5,\mathbb{C})$$
$$(g,a) \longmapsto \begin{pmatrix} g & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{R}^4$

Poincarégruppe $P(3)$
als Menge $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4$

$$(g,a)(h,b) = (gh, a+gb)$$

$$\begin{aligned} P(3) &\longrightarrow \mathrm{GL}(7,\mathbb{C}) \\ (G,a) &\longmapsto \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & g & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$G \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $g$ Bild in $\mathrm{O}(3,1)$

**Wichtige Gruppen**

$$\boxed{\begin{array}{c} S^1 \cong \mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \\ \mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\[1em] \mathrm{SO}(3) \subset \mathrm{SO}^+(3,1) \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \\ \mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\[1em] P(3) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\mathbb{R}^4 \end{array}}$$

Kleine Gruppen (little groups)

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad \mathrm{SU}(2), \quad \mathrm{Iso}(2)$$

$$\mathrm{Iso}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & z \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \quad \zeta \in S^1,\ t \in \mathbb{C} \right\}$$

| |
|---|
| Jede irreduzible unitäre Darstellung einer der kleinen Gruppen „induziert“ eine (oder 2) irreduzible Darstellungen der Poincarégruppe. So bekommt man alle (6 Typen) |

Bargmann $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, Gelfand und Naimark $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$
Harish Chandra, halbeinfache Liegruppen
Wigner (Darstellungen positiver Energie), Mackey

# Liealgebren

Matrixwertige Exponentialfunktion

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

konvergiert immer

$$B^{-1}\exp(A)B = \exp(B^{-1}AB)$$
$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}A)$$
$$AB = BA \Longrightarrow$$
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

Matrixwertiger Logarithmus

$$-\log(E-A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n}$$

konvergiert in Umgebung von 0

$$\log(A) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(E-A)^n}{n}$$

konvergiert in Umgebung von E

$$\log(\exp A) = A, \quad \exp(\log A) = A$$

$$\log(\exp(tA)\exp(tB)) =$$
$$tA + tB + \frac{1}{2}t^2[A,B] + \cdots$$

$[A,B] = AB - BA$ Lieklammer

$$\exp(tA)\exp(tB) = \exp(t(A+B)) + \frac{1}{2}t^2[A,B] + \cdots)$$

5. November 2020

Algebren (reell oder complex)
$A$ Vektorraum, $A \times A \to A$ bilinear
Homomorphismus, Isomorphismus, Unteralgebra

Lie-Algebra (reell oder complex)
isomorph zu einer Unteralgebra von $\mathbb{C}^{n\times n}$
Verknüpfung: Lieklammer $[A,B] = AB - BA$

$G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ abgeschlossene Untergruppe

$$\mathfrak{g} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n}; \quad e^{tA} \in G \ (t \in \mathbb{R})\}$$

ist immer reeller Vektorraum

$$A, B \in \mathfrak{g} \Longrightarrow [A,B] \in \mathfrak{g}$$

also: $\mathfrak{g}$ ist reelle Liealgebra

Allgemeine Theorie
bei uns immer klar

$\exp : \mathfrak{g} \to G$ lokal topologisch bei 0
also $G$ Liegruppe, $\dim G = \dim \mathfrak{g}$

$G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}), \quad H \subset \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$
$G \to H$ stetiger Homomorphismus
existiert reeller Lie-homomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{h} \end{array}$$

Liealgebra unbhängig von der Wahl der Einbettung in eine $\mathrm{GL}(n)$

$G \subset H$ offen $\Longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$
$G \to H$ surjektiv, diskreter Kern $\Longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) &= \mathbb{C}^{n\times n}, \\
\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) &= \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \quad \mathrm{tr}(A) = 0\}, \\
\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) &= \mathbb{R}^{n\times n}, \\
\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) &= \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}(A) = 0\}, \\
\mathfrak{o}(p,q) &= \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \quad A'E_{p,q} + E_{p,q}A = 0\}, \\
\mathfrak{so}(p,q) &= \mathfrak{o}(p,q) \cap \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R}), \\
\mathfrak{u}(p,q) &= \{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \quad \bar{A}'E_{p,q} + E_{p,q}A = 0\}, \\
\mathfrak{su}(p,q) &= \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C}) \\
\mathfrak{o}(p) &= \mathfrak{o}(p,0) \ldots
\end{aligned}$$

Beispiel: $\mathrm{O}(p)$

$$A \in \mathfrak{o}(p) : \exp(tA)' \exp(tA) = E \ (t \in \mathbb{R})$$

$$\exp(tA)\exp(tA') = \exp(t(A+A')) + \frac{1}{2}t^2[A,A'] + \cdots)$$

Leite Produktformel nach $t$ ab und setze $t$=0
Man erhält $A + A' = 0$
Umgekehrt folgt hieraus $\exp(tA)' \exp(tA) = E$
$A$ und $A'$ kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{SO}^+(3,1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{so}(3,1) \end{array}$$

Die Gruppen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ und $\mathrm{SO}(3,1)$ haben dieselbe Liealgebra. Aber sie sind nicht isomorph

Liealgebra der inhomogenen Lorentzgruppe
reelle $5 \times 5$ Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{so}(3,1),\ a \in \mathbb{R}^4$$

kann identifiziert werden mit

$$\mathfrak{so}(3,1) \times \mathbb{R}^4$$

$$[(A,a),(B,b)] = ([A,B], Ab - Ba)$$

Liealgebra der Poincarégruppe
isomorph zu der von der inhomogenen Lorentzgruppe

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\mathbb{R}^4$$

$$[(A,a),(B,b)] = ([A,B], Ab - Ba)$$

# Inhalt



# Banachräume

Vektorraum $E$, reell oder komplex

$$\mathrm{Hom}(E,F), \quad \text{genauer } \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F),\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E,F)$$

$$\mathrm{End}(E) = \mathrm{Hom}(E,E) \text{ ist eine assozative Algebra}$$

Begriff der Norm auf reellem oder komplexen Vektorraum

$$E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \|a\|$$

$$\|a\| = 0 \Longleftrightarrow a = 0, \quad \|Ca\| = |C|\|a\|, \quad \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$$\|a-b\| \quad \text{ist Metrik}$$

Banachraum: Jede Cauchyfolge konvergiert

Jeder normierte Raum $E$ ist Unterraum eines Banachraums $\bar{E}$
(Norm von $E$ ist Einschränkung der Norm von $\bar{E}$)
$E$ is dicht in $\bar{E}$
im wesentlichen eindeutig bestimmt
heißt Komplettierung oder Vervollständigung

Ein Unterraum eines Banachraums ist genau dann
ein Banachraum, falls er abgeschlossen ist

Jeder endlich dimensionale normierte Raum
ist ein Banachraum

$A : E \to E$ lineare Abbildung normierter Vektorräume
heißt **beschränkt**, falls $C \geq 0$ existiert, so dass

$$\|Aa\| \leq C\|a\|$$

Das Infimum aller $C$ heißt die Norm von $A$
Bezeichnung $\|A\|$
Es gilt: $A$ beschränkt $\iff A$ stetig (in 0 genügt)

$B(E,F)$ Menge aller beschränkten linearen Operatoren
ist eine Vektorraum, normiert durch $\|A\|$
ist Banachraum, falls $F$ einer ist

Spezialfall: Sei $F = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und entsprechend
$E$ eine reeller oder komplexer normierter Raum
$E' = \mathcal{B}(E,F)$ heißt Dualraum
ist Banachraum

Wichtige Sätze
**Hahn-Banach**
$E$ Banachraum, $a \in E$, $a \neq 0$
Es existiert $L \in E'$ mit $L(a) \neq 0$ und $\|L\| = \|a\|$

**Open mapping theorem**
$E, F$ Banachräume, $A : E \to F$
beschränkt linear und surjektiv
$\Longrightarrow A$ ist offen
Folgerung: $A$ bijektiv $\Longrightarrow A$ topologisch

**Satz vom abgeschlossenen Graphen**
$E, F$ Banachräume $A : E \to F$ linear
$\text{Graph}(A) = \{(a, Aa)\}$ abgeschlossen $\Longrightarrow A$ beschränkt

Beweis. Versehe $E \times F$ mit Produktnorm (Maximumsnorm)
Dann bekommt $E \times F$ Produktopologie
dies ist Banachraum
also ist $\text{Graph}(A)$ eine Banachraum
Projektion $\text{Graph}(A) \to E$ stetig und bijektiv
Umkehrung $E \to \text{Graph}(A)$ stetig (open mapping)
also $E \to \text{Graph}(A) \to F$ (2. Proktion) stetig

**Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit**
Uniform boundedness principle
(Banach-Steinhaus)
$E, F$ Banachräume, $\mathcal{M} \subset B(E,F)$
$\mathcal{M}$ beschränkt $\iff \mathcal{M}$ punktweise beschränkt
(Für jedes $a \in E$ ist $\{Aa;\ A \in \mathcal{M}\}$ beschränkt)

Banachräume sind in der Regel komplexe Vektorräume

## Hilberträume

$H$ komplexer Vektorraum
$\langle\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ Hermitesche Form
in erster Variablen $\mathbb{C}$-linear, $\overline{\langle a, b\rangle} = \langle b, a\rangle$
heißt positiv definit, falls $\langle a, a\rangle \geq 0$ und $= 0$ nur für $a = 0$

$\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ ist eine Norm

$(H, \langle\cdot\rangle)$ Hilbertraum, Banachraum bezüglich $\|a\|$

Die Komplettierung eines Vektorraumes mit positiv
definiter Hermitescher Form ist ein Hilbertraum
stetige Ausdehnung das Skalarprodukts

Orthogonales Komplement von $A \subset H$
$A^\perp = \{a \in H; \quad \langle a, x\rangle = 0 \quad \forall x \in A\}$
ist abgeschlossener Untervektorraum
$A$ abgeschlossener Untervektorraum
$\Longrightarrow E = A \oplus A^\perp$

**Satz von Riesz**
Jede stetige Linearform $L : H \to \mathbb{C}$
ist von der Form
$L(x) = \langle x, a\rangle$ mit eindeutigem $a \in H$
$H \xrightarrow{\sim} H', \quad a \longmapsto L$

Eine Schar von Vektoren $(a_i)_{i\in I}$ heißt orthonormal,
falls $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

Hilbertraumbasis: maximales Orthonormalsystem

Jedes Orthonormalsystem
ist in einer Hilbertraumbasis enthalten
Zorn'sches Lemma

Ein Banachraum heißt separabel
falls abzählbare dichte Teimenge

Hilbertraum separabel
$\Longleftrightarrow$ jede Hilbertraumbasis höchstens abzählbar
$\Longleftrightarrow$ mindestens eine höchstens abzählbar

Hilberträume werden immer als separabel vorausgesetzt

Dienstag, 10. November 2020

Unendliche Reihe in Banachraum konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert

Absolute Konvergenz $\Longrightarrow$ Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \text{ konvergiert} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$(a_n)$ paarweise orthogonal in Hilbertraum

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^2 \text{ konvergiert}}$$

$V$ Vektorraum, $V_i$ Unterräume

algebraische Summe $\displaystyle\sum_{i \in I} V_i$

besteht aus endlichen Summen $\sum_{i \in I} a_i$

$H$ Hilbertraum, $H_i$ Unterhilberträume
paarweise orthogonal

(direkte) Hilbertraumsumme: $\overline{\displaystyle\sum_{i \in I} H_i}$

Betrachtet man in jedem $H_i$
eine Orthonormalbasis, so bilden alle zusammen
eine Orthonormalbasis der Hilbertraumsumme

$I$ höchstens abzählbar
Die Elemente der Hilbertraumsumme

$$\sum_{i \in I} a_i, \quad \sum_{i \in I} \|a_i\|^2 < \infty$$

Abstrakte direkte Summe $V$
einer Schar $(V_i)$ von Vektorräumen

besteht aus allen $(a_i)$, $a_i \in V_i$
fast alle $a_i = 0$

$V_i$ kann man in $V$ einbetten
Bild $\tilde{V}_i$ nur an der $i$-ten Stelle $\neq 0$

$V$ (konkrete) algebraische
direkte Summe der $\tilde{V}_i$

Variante: $H_i$ Schar von Hilberträumen

abstrakte direkte Hilbertraumsumme $H$

besteht aus allen

$$(h_i), \ \sum \|h_i\|^2 < \infty$$

offensichtliche Struktur als Hilbertraum $H$

$$\langle (a_i), (b_i) \rangle = \sum_i \langle a_i, b_i \rangle$$

$H$ ist direkte Hilbertraumsumme der Bilder $\tilde{H}_i$

Spezialfall $\ell^2$

Folgen komplexer Zahlen $(a_n)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

Skalarprodukt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n$

(Hilbertraumsumme eindimensionaler)

Jeder separable unendlichdimensionale Hilbertraum
ist Hilbertraum-isomorph zu $\ell^2$

Wähle Orthonormalbasis $(e_n)$

$$\ell^2 \xrightarrow{\sim} H, \quad (a_n) \longmapsto \sum a_n e_n$$

## Maßtheorie

Analysis: Lebesgueintegral des $\mathbb{R}^n$ fundamental. Die Integration von Funktionen ist wichtiger als das Bestimmen von Volumina von Mengen

Die Klassifikation von Mengen ist einer höheren Wissenschaft (Didaktik) vorbehalten

In der Analysis kommen nur Maße auf lokal kompakten topologischen Räumen mit abzählbarer Basis der Topologie vor.

Meist is es sehr einfach, das Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu definieren. Beispiel:

$$\mathbb{R}^n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx_1 \dots dx_n$$

iteriertes $n$-faches Riemannintegral

Daher liegt in der Analysis folgende Situation vor

Vorgegeben ein Radonmaß $(X, dx)$

$X$ lokal kompakter Raum
mit abzählbarer Basis der Topologie
$\mathcal{C}_c(X)$ Raum der stetigen komplexen
Funktionen mit kompaktem Träger
$I : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ linear und positiv
$\overline{I(f)} = I(\bar{f})$, $I(f) \geq 0$ falls $f \geq 0$

Schreibweise: $I(f) = \displaystyle\int_X f(x)dx$

Beispiel: $X = \mathbb{R}^n$, $I$ $n$-faches Riemannintegral

Man definiert $\mathcal{L}^1(X, dx)$

Raum der integrierbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$

Das ist ein Vektorraum von Funktionen

$$\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{L}^1(X, dx)$$

$I$ läßt sich zu einer linearen Abbildung ausdehnen

$$I : \mathcal{L}^1(X, dx) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\overline{I(f)} = I(\bar{f}), \quad I(f) \geq 0 \text{ falls } f \geq 0$$

$$f \in \mathcal{L}^1(X, dx) \Longrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(X, dx)$$

(nur absolut konvergente Integrale)

Halbnorm $\|f\|_1 = I(|f|)$
$\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{L}^1(X, dx)$ ist dicht
$f \in \mathcal{L}^1(X, dx) \Longrightarrow \exists\ (f_n)$ in $\mathcal{C}_c(X)$
mit $\|f - f_n\|_1 \to 0$

charakteristische Funktion von $A \subset X$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$A$ hat endliches Volumen falls $\chi_A$ integrierbar

$$\mathrm{vol}(A) = \int \chi_A(x) dx$$

$f : X \to \mathbb{C}$ heißt Nullfunktion
falls integrierbar und $I(|f|) = 0$
$A \subset X$ Nullmenge $\Longleftrightarrow \chi_A$ Nullfunktion

Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen
Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen ist Nullmenge
(z.B. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Nullmenge)

$\mathcal{N}$ Menge aller Nullfunktionen
$\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^1(X, dx)$ Untervektorraum

$$\boxed{L^1(X, dx) = \mathcal{L}^1(X, dx)/\mathcal{N}}$$

$L^1(X, dx)$ besteht aus Klassen $[f]$ von Funktionen
die sich nur um Nullfunktion unterscheiden

Integral für Klassen wohldefiniert

$\| \cdot \|_1$ ist auf $L^1(X, dx)$ wohldefiniert

$$I([f]) := I(f)$$

Damit $L^1(X, dx)$ normierter Raum
Fundamental: $L^1(X, dx)$ ist Banachraum
Bild von $\mathcal{C}_c(X, dx) \longrightarrow L^1(X, dx)$ ist dicht

Bei interessanten Radonmaßen ist dies injektiv

$$f \in \mathcal{C}_c(X),\ f \geq 0,\ \int_X f(x)dx = 0 \Longrightarrow f = 0$$

In diesem Falle ist $L^1(X, dx)$
eine konkrete Komplettierung von $\mathcal{C}_c(X)$

Was bedeutet Konvergenz in $L^1(X, dx)$?

$[f_n] \longrightarrow [f]$ bedeutet $\|f - f_n\|_1 \longrightarrow 0$

Man nennt das Konvergenz im Mittel

hat zunächst nichts mit punktweiser Konvergenz zu tun

aber es gilt

Konvergenz im Mittel impliziert, dass eine geeignete Teilfolge außerhalb einer geeigneten Nullmenge punktweise konvergiert

Begriff der messbaren Funktion (Menge)

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt messbar, falls für jede Funktion $g \in \mathcal{C}_c(X)$, $g \geq 0$, die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } |f(x)| \leq g(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist

Eine Menge $A \subset X$ heißt messbar, falls ihre
charakteristische Funktion messbar ist

Summe und Produkt von messbaren Funktionen sind messbar
Integrierbare Funktionen sind messbar
Stetige Funktionen sind messbar
Messbarkeit stabil gegenüber punktweiser Konvergenz (!!)
Offene und abgeschlossene Mengen sind messbar
abzählbare Vereinigung und Durchschnitt
Borelmengen sind messbar

| |
|---|
| Die Standardkonstruktionen der Analysis führen niemals aus dem Bereich der messbaren Funktionen heraus |

fast richtig: Jede Funktion messbar
Gegenbeispiele brauchen Auswahlaxiom

Sei $f$ messbar, $g$ integrierbar
$|f| \leq |g| \Longrightarrow f$ integrierbar

Höhere $L^p$-Räume, $p \geq 1$

$$\mathcal{L}^p(X, dx) = \left\{\ f \text{ messbar}, \quad |f|^p \text{ integrierbar}\ \right\}$$

ist ein Vektorraum $\supset \mathcal{N}$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p dx}$$

ist eine Halbnorm (Hölder)

$$L^p(X, dx) = \mathcal{L}^p(X, dx)/\mathcal{N} \text{ ist Banachraum}$$

Sonderfall $p = 2$
Man kann zeigen

$$f, g \in \mathcal{L}^2(X, dx) \Longrightarrow f\bar{g} \in \mathcal{L}^1(X, dx)$$

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_X f(x)\overline{g(x)}dx$$

Drückt auf $L^2(X, dx)$ durch

$L^2(X, dx)$ ist ein Hilbertraum

**Bochner Integral**

Bourbaki

$E$ ein Banachraum
$\mathcal{C}_c(X,E)$ stetige Funktionen
mit kompaktem Träger, Werte in $E$

$(X,dx)$ Radonmaß
Man kann für $f \in \mathcal{C}_c(X,E)$
$\displaystyle\int_X f(x)dx \in E$ definieren

definierende Eigenschaft

$$\forall\ L \in E' :\ L\left(\int_X f(x)dx\right) = \int_X L(f(x))dx$$

Speziell $E = H$ Hilbertraum

$$\forall\ a \in H :\ \left\langle a, \int_X f(x)dx\right\rangle = \int_X \langle a, f(x)\rangle dx$$

$E$ sei separabel

$f$ heißt messbar, falls $L \circ f$ messbar $\forall L \in E'$

$f$ Nullfunktion $\Longleftrightarrow \|f\|$ Nullfunktion

$f : X \to E$ heißt integrierbar

falls messbar und falls $\|f\|$ integrierbar

damit definierbar: $\mathcal{L}^p(X,E,dx)$, $L^p(X,E,dx)$

$L^p(X,E,dx)$ Banachräume

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X \|f(x)\|^p dx}$$

$L^2(X,H,dx)$ Hilbertraum

$$\langle f,g\rangle_2 = \int_X \langle f(x), g(x)\rangle dx$$

## Produktmaß

$(X, dx)$, $(X, dy)$
$X \times Y$ Produkttopologie

$$\int_{X \times Y} f(z)dz = \int_Y \left( \int_X f(x,y)dx \right) dy$$
$$= \int_X \left( \int_Y f(x,y)dy \right) dx$$

klar für $g(x)h(y)$

Stone-Weierstraßscher (Approximationssatz)

Donnerstag, 12. November 2020

**Haarsches Maß**

$G$ eine lokal kompakte Gruppe

$G$ ist eine Gruppe und gleichzeitg
ein lokal kompakter topologischer
Hausdorffraum, abzählbare Basis der Topologie

(es gibt abzählbares System offener Mengen
so dass jede offene Menge Vereinigung solcher
Beispiel, $\mathbb{R}^n$, abgeschlossene Teile)

mult: $G \times G \to G$ und inv: $G \to G$ stetig

$\Longrightarrow$ abgeschlossen=folgenabgeschlossen ...

Beispiele: Matrixgruppen
abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Radonmass $dx$ auf $G$ heißt linksinvariant, falls

$$\int_G f(x)dx = \int_G f(gx)dx \; \forall g \in G$$

$$(L_g f)(x) = f(gx), \quad (R_g f)(x) = f(xg)$$

Konzept des Haarmaßes

| |
|---|
| Auf einer lokal kompakten Gruppe $G$ existiert ein von 0 verschiedens linksinvariantes Radonmaß. Es ist bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt |

Einfache Beispiele
additive Gruppe $\mathbb{R}^n$
Haarmaß ist das gewöhnliche Integral

multiplikative Gruppe $\mathbb{R}_{>0}$
Haarmass ist $dx/x$

$$\int_{\mathbb{R}>0} f(x)\frac{dx}{x}dx = \int_{\mathbb{R}>0} f(ax)\frac{dx}{x}dx$$

## Modularfunktion

Ist $dx$ eine Haarmaß, so ist

$$f \longmapsto \int_X f(xg)dx$$

ebenfalls ein Haarmaß

also $\displaystyle\int_X f(xg)dx = \Delta(g)^{-1} \int_X f(x)dx$

$\Delta : G \to \mathbb{R}_{>0}$ heißt Modularfunktion
(hat nichts mit „Modulfunktion“ zu tun)

ist stetiger Homomorphismus

unimodular: $\Delta = 1$
linksinvariant=rechtsinvariant

Beispiele unimodularer Gruppen

Abelsche Gruppen

Diskrete Gruppen $\displaystyle\int_G f(x) = \sum_{x \in G} f(x)$

Kompakte Gruppen
$\mathbb{R}_{>0}$ hat außer 1 keine kompakte Untergruppen

Die von den Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$ erzeugte
Untergruppe ist dicht in $G$

Beispiele: $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathrm{O}(p)$, $\mathrm{U}(p)$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$

Eine nicht unimodulare Gruppe

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix},\ \text{reell } \alpha > 0 \right\}$$

Jedes $p \in P$ eindeutig $p = an$

$$A = \left\{ a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix},\ \alpha > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$P = AN$$

topologisch direktes Produkt
(kein Gruppenisomorphismus)

betrachte Haarmaße $da$ auf $A$ und $dn$ auf $N$

$da$ entspricht $d\alpha/\alpha$, $\quad dn$ entspricht $dx$

Betrachte Produktmass, also

$$\int_P f(p)dp = \int_N \int_A f(an)dadn = \int_A \int_N f(an)dnda$$

$$\boxed{\Delta(p) = \alpha^{-2}, \quad p = an,\ a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}}$$

Man muss zeigen

$$\int_P (f(p_0 p)dp = \int_P f(p)dp, \quad \int_P f(pp_0)dp = \Delta(p^{-1}) \int_P f(p)dp$$

Getrennt für $p = n_0$ und $a = a_0$
reicht für $p_0 = a_0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0^{-2} x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(\alpha_0^{-2} x)dx = \alpha_0^2 \int_{\mathbb{R}} h(x)dx$$

$$dx \text{ linksinvariant} \Longrightarrow \int_X f(x^{-1})dx \text{ rechtsinvariant}$$

*manche meinen*
*lechts und rinks*
*kann man nicht velwechsern*
*werch ein Illtum*
*(Ernst Jandl)*

$$dx \text{ linksinvariant} \Longrightarrow \int_X f(x^{-1})\Delta(x)dx \text{ linksinvariant}$$

zu zeigen

$$\int_X (L_g f)(x^{-1})\Delta(x)dx = \int_X f(x^{-1})\Delta(x)dx$$

oder

$$\int_X f(gx^{-1})\Delta(x)dx = \int_X f(x^{-1})\Delta(x)dx$$

Ersetze im linken Integral $x \mapsto xg$

$$\Delta(g)^{-1} \int_X f(x^{-1})\Delta(xg)dx = \int_X f(x^{-1})\Delta(x)dx$$

dies ist richtig
$\Delta(g)$ wird gekürzt

zweimalige Anwendung liefert

$$\boxed{\int_X f(x^{-1})\Delta(x)dx = \int_X f(x)dx}$$

**Quotientenmaße**

$H$ abgeschlossene Untergruppe von $G$

Nebenklasse $Hg = \{hg;\ h \in H\}$

$H\backslash G$: Menge aller (Rechts-)Nebenklassen

$G \to H\backslash G$, Quotientopologie, wieder lokal kompakt

z.B: Zeige, Diagonale in $H\backslash G \times H\backslash G$ abgeschlossen
oder Urbild in $G \times G$ abgeschlossen
gleich Urbild von $H$ unter $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$

$$(H\backslash G) \times G \to H\backslash G \quad (Hg, g') \mapsto Hgg'$$

Frage nach invariantem Maß auf $H\backslash G$

$$\int_{H\backslash G} f(xg)dx = \int_{H\backslash G} f(x)dx$$

Lehrreich: $X$ endliche Menge, diskrete Topologie
Haarmaß: $\displaystyle\int_X f(x)dx = \sum_{x\in X} f(x)dx$
Volumen eines Punktes 1

Dieses Maß auf $H\backslash G$ ist $G$-invariant

$f : G \to \mathbb{C}$. Es gilt

$\sum_{x\in H} f(xg)$ Funktion of $H\backslash G$

trivial: $\displaystyle\sum_{x\in G} f(x) = \sum_{x\in H\backslash G} \sum_{h\in H} f(hx)$

oder: $\displaystyle\int_X f(x)dx = \int_{H\backslash G} \int_H f(hx)dhdx$

Idee: Diese Formel zur Definition verwenden

beachte: $\displaystyle\int_H f(hg)dh$ bei $g \mapsto h_0 g$ invariant
sofern $\int_H$ rechtsinvariant

Man hätte gern allgemein

Sei $dx$ rechtsinvariant of $G$, $dh$ rechtsinvariant of $H$
Dann existiert invariantes $dy$ auf $H\backslash G$, so dass

$$\boxed{\int_G f(x)dx = \int_{H\backslash G}\int_H f(hx)dh dx}$$

Theorem: Invariantes Maß existiert
und ist bis auf Faktor eindeutig, falls

$$\Delta_G|H = \Delta_H$$

(z.B. beide unimodular)

Man muss zeigen

$$\mathcal{C}_c(G) \longrightarrow \mathcal{C}_c(H\backslash G), \quad f \longmapsto \int_H f(hg)dh$$

ist surjektiv

außerdem Wohldefiniertheit

(Hier geht $\Delta_G|\Delta_H$ ein)

Später (z.B. in der Mackey-Theorie) werden wir in viel allgemeineren Situationen ein Maß auf $H\backslash G$ konstruieren. Die definierende Formel muß dann modifiziert werden

Dienstag, 17.11.2020

Erinnerung

$$\int_G f(gx)dx = \int_G f(x)dx$$
$$\int_G f(xg)dx = \Delta(g)^{-1} \int_G f(x)dx$$

$$\Delta_P(p) = \alpha^{-2}, \qquad p = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

## Darstellungen

$G$ Gruppe, $V$ Vektorraum (bei uns komplex)
$\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ Homomorphismus
z.B. $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Schreibweise $\pi(g)(v) = g(v) = gv$

$$G \times V \longrightarrow V, \quad (g, v) \longmapsto gv$$
$$ea = a$$
$$(gh)a = g(ha)$$
$$g(a + b) = g(a) + g(b),\ g(Ca) = Cga$$

Umkehrung gilt

$G$ operiert auf Menge $X$
$G \times X \to X, \quad (g, x) \longmapsto gx$
von links $ea = a, \quad (gh)a = g(ha)$
von rechts $ea = a, \quad (gh)a = h(ga)$

Operationen von rechts besser so schreiben
$X \times G \to X, \quad (x, g) \mapsto xg$
dann $x(gh) = (xg)h$

$gx$ von links $\Longleftrightarrow$ $g^{-1}x$ von rechts

Darstellungen sind Operationen von links

## Banachdarstellungen

$E$ Banachraum, $G$ lokal kompakte Gruppe
Wann heißt $\pi : G \to \mathrm{GL}(E)$ stetig?
(oder eine Banachdarstellung)

3 äquivalente Definitionen

1) $G \times E \to E$ ist stetig

2) Alle $\pi(g)$ sind beschränkt
und $G \to E$, $g \mapsto g(a)$ stetig $\forall a$

3) $\exists$ Umgebung $U$ von $e \in G$
$\pi(U)$ beschränkt in $\mathcal{B}(E)$

Beweise: Banach Steinhaus

Rat: Kümmere dich nicht um Stetigkeit
(eine der 3 funktioniert immer)

Man kann mit $B^*(E)$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $B(E)$ bezeichnen und eine stetige Darstellung als Homomorphismus $\pi : G \to B^*(E)$ lesen

Man kann versuchen $B^*(E)$ mit einer Topologie zu versehen, so dass die Stetigkeit von $\pi$ auf die Stetigkeit dieser Abbildung hinausäuft. Wir machen das nicht

## Unitäre Darstellungen

Unter einer unitären Darstellung einer kokal kompakten Gruppe versteht man eine Banachdarstellung $\pi : G \to \mathrm{GL}(H)$, wobei $H$ sogar ein Hilbertraum ist. Es gelte zusätzlich, dass alle $\pi(g)$ unitär sind, $\langle ga, gb\rangle = \langle a, b\rangle$

Man kann $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ schreiben

**Reguläre Darstellung**

Unter der Translation von rechts einer Funktion
$f : G \to \mathbb{C}$ mit einem $g \in G$
versteht man die Funktion

$$(R_g f)(x) = f(xg)$$

Merke: Translation von rechts
ist Operation von links

$$R_g \circ R_h = R_{gh}$$

$(R_{gh} f)(x) = f(xgh),\ (R_h f)(x) = f(xh),$
$(R_g(R_h f))(x) = f(xgh)$

Reguläre Darstellung

$$G \times L^2(G, dx) \longrightarrow L^2(G, dx), \quad (g, f) \mapsto R_g f$$
ist stetig

unitär, wenn $dx$ rechtsinvariant

$$\int_G f(x)\overline{h(x)}dx = \int_G f(xg)\overline{h(xg)}dx$$

Harmonische Analyse : Spektralzerlegung der regulären Darstellung bis hin zur Plancherelformel. Harish-Chandra's Thesis $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, Lebenswerk: $G$ halbeinfach

Erster Schritt: Klassifkation der irreduziblen unitären Darstellungen

2 wichtige (jeweils 2-bändige Werke)

zur Theorie von Harish-Chandra

Warner: *Harmonic analysis on semisimple Liegroups*
Wallach: *Real reductive groups I und II*

Was bedeutet Spektralzerlegung?

Beispiel $S^1$

Funktionen of $S^1$ kann man identifizieren
mit periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$
$F(x) = f(e^{\mathrm{i}x})$

Haarmaß: $\int_0^{2\pi} F(x)dx$

Eindimensionale invariante Unterräume

$$H(n) = \mathbb{C}e^{inx}$$

Theorie der Fourierreihen

$$L^2(S^1, dx) = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} H(n) \quad \text{(Hilbertraumsumme)}$$

Zweites Beispiel: $G = \mathbb{R}$

$$H(t) = e^{\mathrm{i}tx}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Sind eindimensional, invariant unter Translation

Unterschied: Nicht enthalten in $L^2(\mathbb{R}, dx)$

Dennoch hat man Zerlegung

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{-\mathrm{i}tx}dt$$

Fourierscher Umkehrsatz

Man spricht von kontinuierlichem Spektrum

Verallgemeinerung der regulären Darstellung

$H \subset G$ abgeschlossene Untergruppe

beide unimodular

$(G, dx)$, $(H, dh)$ Haarmaße

$(H\backslash G, dy)$ Quotientenmaß

$$G \times L^2(H\backslash G, dx) \longrightarrow L^2(H\backslash G, dx), \quad (g, f) \mapsto R_g f$$

auch unitäre Darstellung

zwei wichtige Fälle

$H = K$ maximal kompakt (Harish-Chandra)

$H = \Gamma$ arithmetische Gruppe (z.B. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$)

Theorie der automorphen Formen (Langlands)

**algebraische Irreduzibiltät**

Sei $G \to \mathrm{GL}(V)$ Darstellung

Unterraum $W \subset V$ invariant
bedeutet $g(W) \subset W \ \forall\ g \in G$

Man erhält $\pi' : G \to \mathrm{GL}(W)$

Eine Darstellung heißt algebraisch irreduzibel, falls $V \neq 0$ und falls es außer 0 und $V$ keine invarianten Unterräume gibt

Jede eindimensionale Darstellung ist irreduzibel

Was sind eindimensionale Darstellungen?

$\pi(g)(h) = \chi(g)h$
$\chi : G \to \mathbb{C}^*$ Homomorphismus

Eindimensionale Darstellungen und Homomorphismen $G \to \mathbb{C}^*$ laufen auf dasselbe hinaus

**Topologische Irreduzibiltät**

Eine Banachdarstellung heißt topologisch irreduzibel, falls $V \neq 0$ und falls es außer 0 und $V$ keine abgeschlossenen invarianten Unterräume gibt

Eindimensionale Banachdarstellung $\pi$
assoziiertes $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ stetig (Quasicharakter)
$\pi$ unitär $\Longleftrightarrow \chi : G \to S^1$ stetig (Charakter)

**Intertwiningoperatoren**

$\pi_1 : G \to \mathrm{GL}(E_1),\ \pi_2 : G \to \mathrm{GL}(E_2)$ Banachdarstellungen
Morphismus von $\pi_1$ nach $\pi_2$
$A \in B(E_1, E_2),\ \pi_2(g) \circ A = A \circ \pi_1(g)$
beachte, $A$ muss nicht normerhaltend sein
Intertwiningoperator=Morphismus
Klar, was Isomorphimus von Banachdarstellungen

**Unitäre Intertwiningoperatoren**

$\pi_1$, $\pi_2$ unitär
Man fordert, dass Intertwining operator unitär
Unitär isomorphe unitäre Darstellungen

unitäres Dual

$\hat{G}$ = Menge der unitären Isomorphieklassen (topologisch) irreduziblen unitären Darstellungen von $G$

später
irreduzible unitäre Darstellungen
abelscher Gruppen sind eindimensional

$G$ abelsch: $\hat{G} = \mathrm{Homstet}(G, S^1)$

Ziel der Vorlesung: $\hat{P}$
Dazu braucht man $\hat{G}$ für kleine Gruppen

Donnerstag, 19.11.2020

## Faltungsalgebra

$(G, dx)$ lokal kompakt mit Haarmaß
Faltung zweier $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy$$

$\mathcal{C}_c(G)$ wird Algebra
assoziativ

$$F(x) = (f * g)(x) = \int_G f(y_1) g(y_1^{-1}x) dy_1$$

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \int_G F(y_2) h(y_2^{-1}x) dy_2 \\ &= \int_G \int_G f(y_1) g(y_1^{-1}y_2) h(y_2^{-1}x) dy_1 dy_2\end{aligned}$$

$$H(x) = (g * h)(x) = \int_G g(y_2) h(y_2^{-1}x) dy_2$$

$$\begin{aligned}(f * (g * h)(x) &= \int_G f(y_1) H(y_1^{-1}x) dy_2 \\ &= \int_G \int_G f(y_1) g(y_2) h(y_2^{-1}y_1^{-1}x) dy_2 dy_1\end{aligned}$$

Linkstranslation $y_2 \mapsto y_1^{-1}y_2$
führt zweites in erstes Integral über

Algebra ohne Eins für Mathematiker
Mit eins für Physiker (Deltafunktion bei $e$)

$\pi : G \to \mathrm{GL}(H)$ Banachdarstellung

$$f \in \mathcal{C}_c(G),\ \ h \in H$$

betrachte $G \to H$, $x \to f(x)\pi(x)h$

Bochnerintegral $\int_G f(x)\pi(x)h$

gibt Operator ($f$ fest) $H \to H$

Bezeichnung: $\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)dx$

$\pi(f)$ ist beschränkt, also

$$\pi : \mathcal{C}_c(G) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$$

$$\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1) \circ \pi(f_2)$$

Man zeigt zunächst

$$\pi(f_1) \circ \pi(f_2) = \int_G \int_G f(x_1)f(x_2)\pi(x_1)\pi(x_2)dx_1dx_2$$

denn

$$\begin{aligned}\pi(f_1)(\pi(f_2)h) &= \pi(f_1)\left(\int_G f(x_2)\pi(x_2)hdx_2\right)\\ &= \int_G f_1(x_1)\pi(x_1)\int_G f(x_2)\pi(x_2)hdx_2dx_1\end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned}\pi(f_1 * f_2) &= \int_G (f_1 * f_2)(x)\pi(x)dx\\ &= \int_G \int_G f_1(y)f_2(y^{-1}x)\pi(x)dydx\end{aligned}$$

$\pi : \mathcal{C}_c(G) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ ist Algebrenhomomorphismus

linear, verträglich mit Multiplikation

Jetzt $\pi$ unitär

adjungierter Operator $B(H) \to B(H),\ A \longmapsto A^*$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

($A^*$ existiert nach Satz von Riesz)

$$\begin{aligned} &A \text{ unitär} \iff \langle a, b \rangle = \langle Aa, Ab \rangle \\ &\iff AA^* = \mathrm{id} \quad (A^* = A^{-1}) \end{aligned}$$

Frage: Existiert $f \mapsto f^*$, so daß $\pi(f)^* = \pi(f^*)$

Antwort ja

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}$$

Beweis im unimodularen Fall

zu zeigen

$$\langle \pi(f)a, b \rangle = \langle a, \pi(f^*)b \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_G \langle f(x)\pi(x)a, b \rangle dx &= \int_G \langle a, \overline{f(x)}\pi(x)^{-1}b \rangle dx \\ &= \int_G \langle a, f^*(x^{-1})\pi(x^{-1})b \rangle dx \end{aligned}$$

invariant unter $x \mapsto x^{-1}$ (wegen unimodular)

**Darstellungen von assoziativen Algebren**

$A$ assoziative Algebra, $V$ Vektorraum
$\pi : A \to \mathrm{End}(V)$ Algebren-Homomorphismus

$$\pi : \mathcal{C}_c(G) \longrightarrow B(H)$$

kommt von $G \longrightarrow B^*(H)$

Involution einer Algebra $A$

$A \to A$, $a \mapsto a^*$
anti-linear, $(a+b)^* = a^* + b^*,\ (Ca)^* = \bar{C}a^*$
$(ab)^* = b^*a^*$
involutiv, $** = \mathrm{id}$

Sternalgebra $(A, *)$

Beispiele $B(H)$, $\mathcal{C}_c(G)$

$*$-Darstellung

$A$ Sternalgebra, $H$ Hillbertraum

$\pi : A \to \mathcal{B}(H)$, Homomorphismus, $\pi(T^*) = \pi(T)^*$
keine Stetigkeitsforderung

Jede unitäre Darstellung $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ zieht eine $*$-Darstellung $\pi : \mathcal{C}_c(G) \to B(H)$ nach sich

Darstellung von Algebren (algebraisch) irreduzibel, keine invarianten Unterräume außer 0, $V$

$*$-Darstellung von Algebren (topologisch) irreduzibel, keine abgeschlossenen invarianten Unterräume außer 0, $V$

(Wedderburn) Sei $\pi : A \to \mathrm{End}(V)$ eine irreduzible Darstellung einer assoziativen Algebra auf einem endlich dimensionalen Vektorraum. Dann ist $\pi$ surjektiv (s. Serge Lang, Algebra)

(Schur) Wenn ein $T \in \mathrm{End}(V)$ mit allen $\pi(a)$ vertauscht, so ist $T$ Vielfaches der Identität

Schur'sches Lemma für $*$-Darstellungen

Sei $\pi : A \to B(H)$ eine (topologisch) irreduzible Sterndarstellung. Sei $T \in B(H)$ ein Operator, der mit allen $\pi(a)$ vertauscht. Dann ist $T$ Vielfaches der Identität

folgt leicht aus Spektralsatz

Schur'sches Lemma für unitäre Darstellungen

Sei $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ eine (topologisch) irreduzible unitäre Darstellung. Sei $T \in B(H)$ ein Operator, der mit allen $\pi(g)$ vertauscht. Dann ist $T$ Vielfaches der Identität

wollen zeigen
Schur'sches Lemma für $*$-Algebren impliziert
Schur'sches Lemma für unitäre Darstellungen

muss zeigen
Sei $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ unitär
$W \subset H$ abgeschlossener Unterraum
$W$ invariant unter allen $\pi(g) \Longleftrightarrow$
$W$ invariant unter allen $\pi(f)$

klar für Physiker, $\pi(g) = \pi(\delta_g)$
Mathematiker brauchen Ersatz

Diracfolge

Auf jeder lokal kompakten Gruppe (mit abzählbarer Basis der Topologie) existiert eine Folge $\delta_n \in \mathcal{C}_c(G)$, so dass

a) $\mathrm{supp}(\delta_{n+1}) \subset \mathrm{supp}(\delta_n)$
b) zu jeder Umgebung $U$ der Eins existiert $n$ mit $\mathrm{supp}(\delta_n) \subset U$.
c) $\delta(x^{-1}) = \delta(x)$
d) $\delta_n \geq 0$, $\int_G \delta_n(x)dx = 1$

Existenz: Technik der Zerlegung der Eins

$$\|\pi(\delta_n)h - h\| \longrightarrow 0$$

denn

$$\pi(\delta_n)h - h = \int_G \delta_n(x)\pi(x)hdx - \int_G \delta_n(x)hdx$$

$$\|\pi(\delta_n)h - h\|dx \leq \int_G \delta_n(x)\|\pi(x)h - h\|dx$$

benutze

$$\|\pi(x)h - h\| < \varepsilon \ (x \in U)$$

$U$ kleine kompakte Umgebung von $e$

also

$$\pi(\delta_n) \longrightarrow \mathrm{id}$$

(punktweise)

allgemeiner

$$\pi(R_{g^{-1}}\delta_n) \longrightarrow \pi(g)$$

Sei $\pi : G \to B^*(H)$ eine unitäre Darstellung, und sei $W \subset H$ ein angeschlossener Unterraum. $W$ ist genau dann invariant unter $G$, wenn es invariant unter $\mathcal{C}_c(G)$ ist

Irreduzible unitäre Darstellungen einer abelschen lokal kompakten Gruppe sind eindimensional

$\hat{G}$ : stetige Charaktere $G \to S^1$

kommutative harmonische Analyse:
Charaktere

nicht kommutative harmonische Analyse:
irreduzible unitäre Darstellungen

Dienstag, 24.11.2020

Banachdarstellungen und unitäre Darstellungen werden immer als stetig angenommen (meist ohne Überprüfung). Irreduzibel bedeute hier immer topologisch irreduzibel

Vorsicht

Bei unitären Darstellungen gibt es zwei Isomorphiebegriffe: isomorph als Banachdarstellungen oder unitär isomorph. Wir sind mehr an „unitär isomorph“ interessiert

Erinnerung

Schur'sches Lemma für unitäre Darstellungen
Sei $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ eine (topologisch) irreduzible unitäre Darstellung. Sei $T \in B(H)$ ein Operator, der mit allen $\pi(g)$ vertauscht. Dann ist $T$ Vielfaches der Identität

Folgerung

Jede irreduzible unitäre Darstellung einer kommutativen lokal kompakten Gruppe ist eindimensional

denn

jedes $\pi(g)$ ist Vielfaches von id

Erinnerung

Jede eindimensionale unitäre Darstellung kommt von einem (stetigen) Charakter

$$\chi : G \longrightarrow S^1$$

$$(\pi(g)h = \chi(g)h$$

Erinnerung

$\hat{G}$ ist Menge der (unitären)
Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen
(heißt unitäres Dual)

$G$ abelsch: $\hat{G} = \mathrm{Homstet}(G, S^1)$

$$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\ (e^{itx}), \quad \hat{S}^1 = \mathbb{Z}\ (\zeta^n), \quad \hat{\mathbb{Z}} = S^1$$

Pontryagin-Dualität

Ist $G$ eine lokal kompakte abelsche Gruppe, so trägt auch $\hat{G}$ ein solche Struktur und es gilt $\hat{\hat{G}} = G$

## Einfaches über unitäre Darstellungen

Eine unitäre Darstellung $\pi_1 : G \to \mathrm{U}(H_1)$ kommt in einer unitären Darstellung $\pi_2 : G \to \mathrm{U}(H_2)$ vor, falls es einen abgeschlossenen invarianten Unterraum $H_0 \subset H_2$ gibt, so dass die unitären Darstellungen von $G$ auf $H_1$ und auf $H_0$ (unitär) isomorph sind

$$\begin{gathered}\pi : G \to \mathrm{U}(H) \text{ unitäre Darstellung}\\ A \subset H \text{ invarianter Unterraum}\\ \Longrightarrow A^\perp \text{ invariant}\end{gathered}$$

$$b \in A^\perp \Longrightarrow \langle \pi(x^{-1})a, b\rangle = 0 \ (a \in A) \Longrightarrow \langle a, \pi(x)b\rangle = 0$$

$$\begin{gathered}\text{Unitäre Darstellung } \pi : G \to \mathrm{U}(H)\\ A,\ B \text{ abgeschlossene invariante Unterräume}\\ A \text{ irreduzibel}\\ \text{entweder } A \perp B\\ \text{oder } A \text{ kommt in } B \text{ vor}\end{gathered}$$

Beweis. Nehme an, dass $A \not\perp B$. Betrachte $\langle a, b\rangle$ als Linearform auf $B$. Nach Satz von Riesz gibt es Element $f(a) \in B$ mit $\langle a, b\rangle = \langle f(a), b\rangle$. Lies $f : A \to B$. Zeige, ist linear und injektiv und Intertwiningoperator, Zum letzteren

$$\begin{aligned}&\langle a, b\rangle = \langle f(a), b\rangle = \langle ga, gb\rangle =\\ &\langle f(g(a)), gb\rangle = \langle g^{-1} f(ga), b\rangle\end{aligned}$$

also $g^{-1} f(ga) = f(a)$ oder

$$f \circ \pi(g) = \pi(g) \circ f$$

(das ist Intertwiningbedingung)

## Vollständige Reduzibilität

$$\begin{gathered}\pi : G \to \mathrm{U}(H) \text{ unitäre Darstellung}\\ \text{heißt vollständig reduzibel}\\ \text{falls } H = \widehat{\bigoplus} H_i\\ \text{Hilbertraumsumme}\\ H_i \text{ invariant, irreduzibel}\end{gathered}$$

Vorsicht: nicht eindeutig

Jede endlich dimensionale unitäre
Darstellung ist vollständig reduzibel

denn

Wenn nicht schon $G \to \mathrm{U}(H)$ irreduzibel
dann existiert $A \subset H$ invariant
Dann auch $A^{\perp}$ invariant.
Induktion nach Dimension

**Isotypen**

Sei $\tau \in \hat{G}$

Man kann Isotyp $H_\tau$ definieren als topologische Summe aller irreduziblen abgeschlossenen $A \subset H$ vom Typ $\tau$

$H = \widehat{\bigoplus} H_i$ vollständig reduzibel
$H_\tau$: Topologische Summe aller $H_i$ vom Typ $\tau$.

Wir sehen also, $H_\tau$ wohldefiniert
invariant, paarweise senkrecht
$H$ Hilbertraumsumme der Isotypen

noch etwas: Die Mächtigkeit alle $i$, so dass $H_i \subset H_\tau$ ist unabhängig von der Wahl der vollständigen Zerlegung

Man nennt dies die Multiplizität von $\tau$ in $\pi$

Interessant: Multiplizitäten endlich
Man spricht von diskretem Spektrum

Jeder unitären Darstellung mit diskretem Spektrum ist also eine Abbildung

$$m : \hat{G} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

zugeordnet, welche außerhalb höchstens abzählbar vieler gleich 0 ist. Die Isomorphieklassen unitärer Darstellungen mit diskretem Spektrum entsprechen umkehrbar eindeutig solchen Abbildungen

Berechnung von $m$ oft tiefliegend

z.B: Dimensionen von Vektorräumen von Modulformen deutbar als Multiplizitäten

## Kompakte Gruppen

3 fundamentale Sätze

Unitäre irreduzible Darstellungen
kompakter Gruppen sind endlichdimensional

Jede unitäre Darstellung einer
kompakten Gruppe ist vollständig reduzibel

Zerlegung der regulären Darstellung
einer kompakten Gruppe
Peter-Weyl

Bei uns einzig interessante nicht
abelsche kompakte Gruppe ist SU(2)

Donnerstag, 26.11.2020

# Bargmann-Theorie

$$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

Die einfachste kompakte Gruppe

$$\mathrm{SO}(2) \quad \text{kompakt und abelsch}$$

$$k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(k) = 1, \quad k'k = E$$

$$k' = k^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = 1$$

$$k = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$K \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1 \quad (k \longleftrightarrow \varphi \longleftrightarrow e^{\mathrm{i}\varphi})$$

Irreduzible unitäre Darstellungen alle eindimensional (!!)
entsprechen Charakteren, sind von der Form

$$\chi_n(k) = k^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{K} \cong \mathbb{Z}$$

**Haarmass von** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}),$$
$$A = \left\{ a_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix};\quad \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$$
$$N = \left\{ n_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$K = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};\quad \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A \cong \mathbb{R}_{>0},\quad N \cong \mathbb{R},\quad K = S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Iwasawa-Zerlegung: $G = ANK$

$$A \times N \times K \longrightarrow G,\quad (a,n,k) \longmapsto ank,$$

ist topologisch

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{c^2+d^2} \end{pmatrix} \cdot \\ \begin{pmatrix} 1 & ac+bd \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

schöner

$g^{-1}$ bildet $x$-Achse auf Gerade durch Null ab. Betrachte Drehung $k$, welche dies Gerade wieder auf $x$-Achse abbildet. Dann läßt $kg^{-1}$ die $x$-Achse fest, is also Dreiecksmatrix $p$, also $g = p^{-1}k$. Man bekommt Diagonale positiv, indem man eventuell $k$ durch $-k$ ersetzt

$da = d\alpha/\alpha$, $dn = dx$
$dk$ so, dass $\mathrm{vol}(S^1) = 1$
Funktionen auf $S^1$ entsprechen
periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$
$F(x) = f(e^{\mathrm{i}x})$ (Periode $2\pi$)

$$\int_{S^1} f(k)dk = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)dx$$

Erinnerung: $dp = dadn$ ist Haarmaß auf $P = AN$

Versuch: Haarmaß von $G$ ist

$$\int_G f(x)dx = \int_A \int_N \int_K f(ank)dkdnda$$

Blöder Beweis, kaum verallgemeinerbar:

Da es sich um ein gewöhnliches Integral im $\mathbb{R}^3$ handelt, muß sich der Beweis aus der Transformationsformel ergeben. Man muß dazu eine blöde Funktionaldeterminante ausrechnen

Sehr schöner Beweis, verallgemeinerbar
Technik des Haarmaßes
$G$ und $K$ unimodular
existiert (links-) invariantes Mass auf $G/K$

$$P \overset{\sim}{\longrightarrow} G/K, \quad p \longmapsto pK$$

Quotientemaß entspricht Haarmaß auf $P$
benutze

$$\int_G f(x)dx = \int_{G/K} \left[ \int_K f(pk)dk \right] dp$$

oder

$$\int_G f(x)dx = \int_P \left[ \int_K f(pk)dk \right] dp$$

oder

$$\boxed{\int_G f(x)dx = \int_A \int_N \int_K f(ank)dkdadn}$$

Unitäre Darstellungen von $G$

Die eindimensionale triviale Darstellung

werden sehen
dies ist die einzige endlichdimensionale
irreduzible unitäre Darstellung

## Die Hauptserie

zunächst eine Serie von Banachdarstellungen
parametrisiert durch $s \in \mathbb{C}$

Mechanismus der Induktion

$H \subset G$ Untergruppe

Man macht aus einer Darstellung von $H$
eine Darstellung von $G$
und nennt dies induzierte Darstellung
führt zu Mackeytheorie

$$\sigma : H \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

$$\mathrm{Ind}_H^G(\sigma) = \left\{ f : G \longrightarrow V; \quad f(hg) = \sigma(h)f(g) \right\}$$

Auf $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ operiert $G$ durch Translation von rechts

$$G \times \mathrm{Ind}_H^G(\sigma) \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$$

Im Moment eindimensionale Darstellung von $H$
entspricht Homomorphismus $\chi : H \to \mathbb{C}^*$

$$\mathrm{Ind}_H^G(\chi) = \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f(hg) = \chi(h)f(g) \right\}$$

(Später Integrierbarkeitsbedingungen

im Moment nur algebraischer Mechanismus)

bekannter Spezialfall

$\chi$=trivial, dann $\mathrm{Ind}_H^G$ = Funktionen auf $H\backslash G$

vergleiche reguläre Darstellung

**Hauptserie**

$$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}),\ H = P$$

$$\chi(p) = \chi(an) = \alpha^{1+s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

$$\alpha^s := e^{s \log \alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix},\ n = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schreibe $\operatorname{Ind}(s) = \operatorname{Ind}_P^G(\chi)$

Brauchen Banachdarstellung

Eine Funktion $f \in \operatorname{Ind}(s)$
bestimmt durch Einschränkung auf $K$

$$f(pk) = \alpha^{1+s} f(k)$$

Umgekehrt kommt jede Funktion auf $K$
von einer Funktion aus $\operatorname{Ind}(s)$

Funktionen auf $K$=
Funktionen aus $\operatorname{Ind}(s)$

Banachraum für die Hauptserie

$$H = L^2(K, dk)$$

ist zwar Hilbertraum aber
Hauptserie zunächst nur Banachdarstellung

Definition von $\pi(g)f$:
beginne mit $f \in L^2(K, dk)$
wähle Repräsentanten $\varphi \in \mathcal{L}^2(K, dk)$
Ausdehnung zu $\Phi \in \operatorname{Ind}(s)$
$R_g\Phi$ Rechtstranslation
Schränke $R_g\Phi$ auf $K$ ein
Zeige: Dies ist in $\mathcal{L}^2(K, dk)$
Betrachte Klasse in $L^2(K, dk)$
Zeige: Hängt nur von Klasse von $f$ ab
Nenne das Resultat $\pi(g)f$

Zeige, dass

$$G \times L^2(K) \longrightarrow L^2(K)$$

Banachdarstellung

Hätten gerne unitär
hier grundlegendes Problem

$G$ unimodular, $P$ nicht
also $\Delta_G|P \neq \Delta_P$

kein invariantes Maß auf $P\backslash G$

Man hat sehr wohl Maß auf $P\backslash G$

benutze $G = PK$
also $K \overset{\sim}{\longrightarrow} P\backslash G$, $k \longmapsto Pk$

das Haarmaß auf $K$ gibt Maß auf $P\backslash G$

beachte $G$ operiert auf $K$ von rechts

via $P\backslash G \overset{\sim}{\longrightarrow} K$

wie transformiert sich $dk$
bei Operation von $G$

anders betrachtet:

Wir haben Operation von rechts von $G$ auf $K$

wie folgt definiert

benutze

$$K \overset{\sim}{\longrightarrow} P\backslash G, \quad k \longmapsto Pk$$

Auf $P\backslash G$ operiert $G$

Übertrage diese auf $K$

also

betrachte $k \in K$ und $g \in G$

bilde $kg$

und zerlege dies Iwasawa

$$kg = \tilde{p}\tilde{k}$$

$$K \times G \longrightarrow K, \quad (k, g) \longmapsto \tilde{k}$$

schreibe besser

$$kg = \tilde{p}_g(k)\tilde{k}_g(k),\ \tilde{p}_g(k) \in P,\ \tilde{k}_g(k) \in K$$

falsche Annahme

invariantes Maß auf $P\backslash G$ existiert

es würde folgen, dass dieses
gleich dem Haarmaß auf $K \cong P\backslash G$

also

$$\int_K f(\tilde{k}_g(k))dk = \int_K f(k)dk$$

dies ist falsch
aber es gibt Korrektur

$$\boxed{\int_K f(\tilde{k}_g(k))\Delta(\tilde{p}_g(k))^{-1}dk = \int_K f(k)dk}$$

Beweis einfach aber trickreich

Wähle $\varphi \in \mathcal{C}_c(P)$ mit $\int_P \varphi(p)dp = 1$

Definiere $F(x) = F(pk) = \varphi(p)f(k)$

Auf $G/K$ existiert Quotientenmaß
Entspricht Haarmaß auf $P \cong G/K$
Definierende Formel Quotientenmaß

$$\int_G F(x)dx = \int_P \int_K F(pk)dkdp = \int_K f(k)dk$$

Haarmaß auf $G$ rechtsinvariant

$$\int_K f(k)dk = \int_G F(xg)dx = \int_P \int_K F(p\tilde{p}_g(k)\tilde{k}_g(k))dkdp$$

Erst Integration über $p$
Faktor $\tilde{p}_g(k)$ steht rechts von $p$

$$= \int_K f(\tilde{k}_g(k))\Delta(\tilde{p}_g(k)^{-1}dk$$

Folgerung

$f : G \to \mathbb{C}$ , $f|K$ integrierbar und
$f(pg) = \alpha^2 f(p) = \Delta(p)^{-1} f(p)$ $(p \in P,\ g \in G)$

dann

$\tilde{f}(x) = f(xg)$ $(g \in G)$ transformiert sich genauso

und es gilt

$$\int_K f(x)dx = \int_K \tilde{f}(x)dx$$

Beweis

$$\int_K f(kg)dk = \int_K f(\tilde{p}_g(k)\tilde{k}_g(k)dk = \int_K \Delta(\tilde{p}_g(k))^{-1} f(\tilde{k}_g(k))dk$$

Wichtige Konsequenz

Sei $s$ rein imaginär ($\in \mathrm{i}\mathbb{R}$

dann $\pi_s$ unitäre Darstellung
von $G$ auf $L^2(K, dk)$

denn

$f, g \in \mathcal{H}(s) \Longrightarrow$
$f\bar{g}$ transformiert sich mit $\alpha^{2+s+\bar{s}}$
also mit $\alpha^2$ für $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Dienstag, 1. Dezember 2020

Wiederholung: Hauptserie

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $P$ obere
Dreiecksmatrizen mit positiver Diagonale

$$\chi_s : P \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad p \longmapsto \alpha^{1+s}$$

$$p = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_s(p_1p_2) = \chi_s(p_1)\chi_s(p_2)$$

(so bekommt man alle stetigen Homomorphismen)

induzierte Darstellung
algebraischer Formalismus

$$\mathrm{Ind}(s) = \mathrm{Ind}_P^G(\chi_s) = \{\, f : G \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(px) = \alpha^{1+s} f(x) \,\}$$

Hierauf operiert $G$ durch Translation von rechts

$$(R_g f)(x) = f(xg)$$

$$G \times \mathrm{Ind}(s) \longrightarrow \mathrm{Ind}(s), \quad (f,g) \longmapsto R_g(f)$$

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Ind}(s)), \quad g \longmapsto R_g$$

$$\mathrm{Ind}(s) \xrightarrow{\sim} \{f : K \longrightarrow \mathbb{C}\}, \quad F \longmapsto f = F|K$$

Umkehrung: $f \longmapsto F$, $F(pk) = \alpha^{1+s} f(k)$

Banachraumstruktur

betrachte $\mathcal{L}^2(K, dk)$
$\mathcal{H}(s)$ entsprechender Unterraum von $\mathrm{Ind}(s)$

$$\mathcal{H}(s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^2(K, dk)$$

man muß prüfen

$f$ Nullfunktion $\Longleftrightarrow$ $F$ Nullfunktion
$f \in \mathcal{H}(s) \Longrightarrow R_g(f) \in \mathcal{H}(s)$

Übergang zu

$$H(s) \xrightarrow{\sim} L^2(K, dk), \quad H(s) = \mathcal{H}(s)/\mathcal{N}$$

Man erhält Banachdarstellung

$G \times H(s) \longrightarrow H(s)$ Translation von rechts

oder

$$G \times L^2(K) \longrightarrow L^2(K)$$

Dies ist die induzierte Darstellung $\pi_s$

wollen mehr: unitäre Darstellung

Würde auf $P\backslash G$ ein Quotientenmaß existieren
so hätte man für $1+s=0$ unitäre Darstellung
(reguläre Darstellung)

man hat ein Maß auf $P\backslash G$
via $K \xrightarrow{\sim} P\backslash G$ $(k \longmapsto Pk)$
dies ist nicht invariant
man hat Formel für Abweichung von Invarianz
daraus ergibt sich

$f \in \mathcal{H}(1)$, $(f(px) = \alpha^2 f(x))$

$$\Longrightarrow \int_K f(k)dk = \int_K (R_g f)(k)dk$$

$$f, g \in \mathcal{H}(s) \Longrightarrow (f\bar{g})(px) = \alpha^{2+s+\bar{s}}(f\bar{g})(x)$$

also

$\pi_s$ ist unitär für $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

nicht irreduzibel, aber nahe daran

Aufspaltung

$H(s) = H^{\mathrm{even}}(s) \oplus H^{\mathrm{odd}}(s)$ ist orthogonal

definiert durch $f(-x) = \pm f(x)$

Hilbertraumbasis $\zeta^n = e^{\mathrm{i}n\varphi}$, $n$ gerade bzw. ungerade

Später

$H^{\mathrm{even}}(s)$ ist immer irreduzibel

$H^{\mathrm{odd}}(s)$ ist irreduzibel, falls $s \neq 0$

Sonderfall $H^{\mathrm{odd}}(0)$

ist orthogonale Summe
zweier unitärer Darstellungen

$$H^{\mathrm{odd}}(0) = H^{\mathrm{odd}}(0)_+ \oplus H^{\mathrm{odd}}()_-$$

wie folgt definiert

$H^{\text{odd}}(0)_+$ erzeugt von $e^{inx}$
$n$ ungerade, $n > 0$

$H^{\text{odd}}(0)_-$ erzeugt von $e^{inx}$
$n$ ungerade, $n < 0$

Irreduzible unitäre Darstellungen
(wird später gezeigt)

| | | |
|---|---|---|
| gerade Hauptserie | $H^{\text{even}}(s)$ | $(s \in \mathrm{i}\mathbb{R})$ |
| ungerade Hauptserie | $H^{\text{odd}}(s)$ | $(s \in \mathrm{i}\mathbb{R},\ s \neq 0)$ |
| Mock diskrete Serie | $H^{\text{odd}}(0)_\pm$ | (2 Darstellungen) kommt von der ungeraden Hauptserie für $s = 0$ |

unitär isomorph $s \longleftrightarrow -s$
sonst keine unitären Isomorphien
(Intertwiningoperator wird gleich konstruiert)

**Der Intertwiningoperator**

Wollen zeigen, das $H(s)$ und $H(-s)$ für $s \notin \mathbb{Z}$

isomorphe Banachdarstellungen sind

im Falle $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ sogar unitär isomorph

Arbeiten zunächst mit $\mathcal{H}^\infty(s)$
(diffenzierbare Funktionen in $\mathcal{H}(s)$)
(im Sinne $f(a_\alpha n_x k_\varphi) = f_0(\alpha, x, \varphi)$)

entspricht $\mathcal{C}^\infty(K)$

Satz aus der Analysis

Jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$ ist Fourierreihe
(entspricht periodischer Funktion $F(x) = f(e^{\mathrm{i}x})$

$$f(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n \quad (\zeta = e^{\mathrm{i}x})$$

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ kommt vor
$\iff a_n$ temperiert
(stark abfallend)

d.h. $a_n P(n)$ beschränkt für jedes Polynom

im Falle $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$M(s) : \mathcal{H}^\infty(s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^\infty(-s)$$

$$(M(s)f)(x) = \int_N f(wnx)dn, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

einiges zu zeigen

Kovergenz des Integrals

Zeige

$f \in \mathcal{H}(s)$ stetig, $\mathrm{Re}\, s > 0$. Dann konvergiert

$$\int_N f(wn)dn, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis

Iwasawa-Zerlegung

$$wn = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{pmatrix}$$

also

$$f(wn) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^{1+s}} f \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{pmatrix}$$

$f$ beschränkt, Vergleichsintegral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+s}} dx$$

Konvergenz für $\mathrm{Re}\, s > 0$

Damit $M(s)$ definiert, noch zu zeigen

$$f \in \mathcal{H}(s) \Longrightarrow M(s)f \in \mathcal{H}(-s)$$

Beweis

$$f(px) = \alpha^{1+s} f(x), \; g(x) = \int_N f(wnx)dn$$

zu zeigen

$$g(px) = \alpha^{1-s} g(x)$$

getrennt für $p = a$ und $p = n$
problematisch nur $p = a$

$$g(x) = \int_N f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\right) d\mu$$

$$x = ank = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k$$

$$g(x) = \int_N f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) d\mu$$

$$g(x) = \int_N f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-2}\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) d\mu$$

$$g(x) = \alpha^2 \int_N f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) d\mu$$

$$g(x) = \alpha^2 \int_N f\left(\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) d\mu$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \alpha^2 \alpha^{-1-s} \int_N f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) d\mu \\ &= \alpha^{1-s} g(k) \end{aligned}$$

**Analytische Fortsetzung von $M(s)$**

Idee: Berechne $M(s)$ auf einer konkreten Basis
durch explizite Formeln
setze diese Formeln fort

Donnerstag, 3. Dezember 2020

Erinnerung an die Hauptserie

$G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

$P$ obere Dreiecksmatrizen mit positiver Diagonale

$N$ strikte obere Dreiecksmatrizen

$K = \mathrm{SO}(2)$

Iwasawazerlegung $G = PK$

$$K \xrightarrow{\sim} P\backslash G, \quad P \xrightarrow{\sim} G/K$$

$$\chi_s : P \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad p \longmapsto \alpha^{1+s}$$

ist (stetiger) Quasicharakter

$$\mathrm{Ind}(s) = \big\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f(px) = \alpha^{1+s} f(x) \big\}$$

$$\mathrm{Ind}(s) \xrightarrow{\sim} \{f : K \longrightarrow \mathbb{C}\}$$

$$F \longmapsto f = F|K$$
$$f \longmapsto F,\ F(pk) = \alpha^{1+s} f(k)$$

$G \times \mathrm{Ind}(s) \longrightarrow \mathrm{Ind}(s)$, Rechtstranslation

$\mathcal{H}(s)$ entspricht $\mathcal{L}^2(K, dk)$

(modulo Nullfunktionen) $H(s) \cong L^2(K, dk)$

$H(s)$ wird so Hilbertraum

Banachdarstellung: $G \times H(s) \longrightarrow H(s)$

ist unitär für $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

**Intertwiningoperator**

zunächst für $\mathcal{H}^\infty(s)$ ($\cong \mathcal{C}^\infty(K)$)

$$M(s) : \mathcal{H}^\infty(s) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(-s)$$

$$(M(s)(f))(x) = \int_N f(wnx)dn, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(verträglich mit $G$)

Zunächst nur für $\mathrm{Re}\, s > 0$

„analytische“ Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$

Man rechnet $M(s)$ auf Hilbertraumbasis auf

Nehme die Basis $\zeta^m = e^{\mathrm{i}m\varphi}$ auf $L^2(K)$
(Orthonormalbasis von $L^2(K, dk)$

$$\varepsilon(s,m), \qquad pk \longmapsto a^{1+s} e^{\mathrm{i}m\theta}$$

Orthonormalbasis von $H(s)$

$$M(s)\varepsilon(s,m) = c(s,m)\varepsilon(-s,m)$$

Konstante $c(s,m)$ muss berechnet werden

$$c(s,m) = \int_N \varepsilon(s,m)(wn)dn$$

$$c(s,m) = \int_{\mathbb{R}} \varepsilon(s,m)\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{pmatrix} dx\right.$$
$$= \int_N \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^{1+s}} \left(\frac{x+\mathrm{i}}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m dx\Big)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^{1+s}} \left(\frac{x+\mathrm{i}}{\sqrt{1+x^2}}\right)^m dx = \frac{2^{1-s}\pi\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{s+1+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1-m}{2}\right)}}$$

Cauchy, 1825
Beweis, siehe Garret, Casselman

$$c(s,m) = \frac{2^{1-s}\pi\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{s+1+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1-m}{2}\right)}$$

An inductive formula for $c(s,m)$ is

$$c(s,0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}, \quad c(s,\pm 1) = \pm\mathrm{i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}$$

$$c(s,m+2) = -\frac{s-(m+1)}{s+(m+1)}c(s,m)$$
$$c(s,m-2) = -\frac{s+(m-1)}{s-(m-1)}c(s,m)$$

Haben also Operator $M(s) : \mathcal{H}^\infty(s) \longrightarrow \mathcal{H}^\infty(-s)$
für $s \in \mathbb{C}$, $s \notin \mathbb{Z}$

beschränkt

daher ausdehnbar $M(s) : H(s) \to H(-s)$

Isomorphismus von Banachräumen

verträglich mit Operation von $G$
(Iosmorphismus von Banachdarstellungen)

unitär, falls $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $s \neq 0$

**Die Nebenserie (complementary series)**

$\mathcal{H}^{\infty,\text{even}}(s) = \mathcal{H}^{\infty}(s) \cap \mathcal{H}^{\text{even}}(s)$

Betrachte für $f, g \in \mathcal{H}^{\infty,\text{even}}(s)$

$$h(x) = f(x)M(s)\overline{g}(x)$$

$$h(px) = \alpha^{1+s}\alpha^{1-\bar{s}}h(x) = \alpha^{2+s-\bar{s}}h(x)$$

interessant $s - \bar{s} = 0$

Dann transformiert sich $h$ mit $\alpha^2$

ist genau Bedingung dafür, dass $\int_K h(k)dk$

invariant unter Rechtstranslation von $G$

Idee

Neues Skalarprodukt: $\displaystyle\int_K f(g)M(s)\overline{g(k)}$

Ist das neue Skalarprodukt Hermitesch und positiv definit?

dazu braucht man $c(s,m) > 0$

gilt falls $s \in (-1,1)$, $s \neq 0$

und

$$|c(s,m)| \leq c|m|^K$$

dann funktioniert

$$M(s)\sum_m a_m\varepsilon(s,m) = \sum_n a_m c(s,m)\varepsilon(s,m)$$

Man muss noch $\mathcal{H}^{\infty,\text{even}}(s)$ bezüglich
des neuen Spalarprodukts komplettieren
Hilbertraum $\tilde{H}(s)$

Erweiterte Liste

| | | |
|---|---|---|
| gerade Hauptserie | $H^{\text{even}}(s)$ | $(s \in \mathrm{i}\mathbb{R})$ |
| ungerade Hauptserie | $H^{\text{odd}}(s)$ | $(s \in \mathrm{i}\mathbb{R},\ s \neq 0)$ |
| Mock diskrete Serie | $H^{\text{odd}}(0)_{\pm}$ | (2 Darstellungen) kommt von der ungeraden Hauptserie für $s = 0$ |
| Nebenserie | $\tilde{H}(s)$ | $s \in (-1, 1),\ s \neq 0$ |

unitär isomorph $s \longleftrightarrow -s$
sonst keine unitären Isomorphien
alle stellen sich als irreduzibel heraus

**Diskrete Serie**

Es gibt 2 diskrete Serien

Holomorphe und antiholomorphe Serie

Möbiustransformationen

$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ operiert auf der Zahlkugel $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Die Untergruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ operiert auf $\mathcal{H}$
(obere Halbebene)

Cayley-Transformation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(z) = w = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

bildet $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{E}$ ab
(Einheitskreis)

$$\mathrm{SU}(1,1) = \sigma\, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \sigma^{-1}$$

$$(\bar{M}'E_{1,1}M = E_{1,1},\ \det M = 1)$$

operiert auf dem Einheitskreis

Modell obere Halbebene: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$
Modell Einheitskreis: $\mathrm{SU}(1,1)$

**Hilberträume holomorpher Funktionen**

Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $K \subset U$ kompakt. $\exists\, C > 0$ so dass jede holomorphe Funktion $f$ auf $U$ der Ungleichung

$$|f(a)|^2 \le C \int_U |f(z)|^2 dz \quad \text{für } a \in K$$

genügt ($dz$ Lebesguemass)

Beweis: Reduktion auf den Fall, dass $a$ ein Punkt, $a = 0$. Es genügt anznehmen, dass $U$ die Einheitskreisscheibe $\mathcal{E}$ enthält. Dann

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\int_U |f(z)|^2 dz \ge \int_E |f(z)|^2 dz =$$

$$\sum_{n,m} a_n \bar{a}_m \int_E z^n \bar{z}^m dz$$

benutze

$$\int_E z^n \bar{z}^m dz = 0 \text{ für } m \ne n$$

denn: $z = re^{\mathrm{i}\varphi},\ dz = r dr d\varphi$ und

$$\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}n\varphi} d\varphi = 0 \quad (n \ne 0)$$

also

$$\int_U |f(z)|^2 dz \ge \pi |a_0|^2 = \pi f(0)^2$$

Eine Anwendung

$U \subset \mathbb{C}$ offen und $h : U \to \mathbb{R}_{>0}$ stetig. Betrachte $d\omega = h(z)dz$. Dann

$$L^2_{\mathrm{hol}}(U, d\omega) = \{f \in L^2(U, d\omega), \quad f \text{ holomorph}\}$$

ist abgeschlossen in $L^2(U, d\omega)$ (und damit Hilbertraum)

Formeln für $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

$$M'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}, \quad \mathrm{Im}(M(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ operiert $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$
auf dem Raum aller $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$$(\pi'_n(g)f)(z) = (cz+d)^n f(g(z)), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\pi'_n(gh) = \pi'_n(h)\pi'_n(g)$$

läuft auf Regel

$$J(M, z) = cz + d, \quad J(MN, z) = J(M, Nz)J(N, z)$$

hinaus

Bei dieser Operation ist

$$d\omega_n = y^n \frac{dxdy}{y^2}$$

invariant

denn: Im Falle $n = 0$
Transformationsfaktor

$$|M'(z)|^2 = \frac{1}{|cz+d|^4}, \quad \mathrm{Im}(M(z)) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

$P \cong \mathcal{H}$, $d\omega_0$ entspricht Haarmaß

$G$ operiert auf $L^2_{\mathrm{hol}}(\mathcal{H}, d\omega_n)$ unitär

$$\pi_n(g) = \pi'_n(g^{-1}$$

Wann ist $L^2_{\text{hol}}(\mathcal{H}, d\omega_n) \neq 0$

Umtransformation des Maßes auf Einheitskreis

$$\int_{\mathcal{E}} |f(w)|^2 \Big(1 - |w|^2\Big)^{n-2} dw$$

$1 - |w|^2$ beschränkt

also Integral existiert für $n \geq 2$

Man kann mehr zeigen
$w^m,\ m \geq 0$ ist Orthonormalbasis

**Holomorphe Serie**

parametrisiert durch $\mathbb{Z}_{\geq 2}$

völlig analog

**Antiholomorphe Serie**

parametrisiert durch $\mathbb{Z}_{\leq -2}$

**diskrete Serie**

=holomorphe und antiholomorphe Serie

parametrisiert durch $n \in \mathbb{Z},\ |n| \geq 2$

werden sehen

diskrete Serie: irreduzibel

Bargmann

Klassifikation irreduzibler unitärer Darstellungen

| | | |
|---|---|---|
| gerade Hauptserie | $H^{\text{even}}(s)$ | $(s \in \mathrm{i}\mathbb{R})$ |
| ungerade Hauptserie | $H^{\text{odd}}(s)$ | $(s \in \mathrm{i}\mathbb{R},\ s \neq 0)$ |
| Mock diskrete Serie | $H^{\text{odd}}(0)_{\pm}$ | (2 Darstellungen) kommt von der ungeraden Hauptserie für $s = 0$ |
| Nebenserie | $\tilde{H}(s)$ | $s \in (-1, 1),\ s \neq 0$ |
| diskrete Serie | | $n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$ |

Einzige unitäre Isomorphismen $s \leftrightarrow -s$

Es gibt gute Gründe, die beiden Mock diskreten als Grenzfälle der diskreten Serie ($n = 1, -1$) anzusehen. Daher „mock“

allgemeine Definition diskrete Serie

Sei $G$ eine lokalkompakte Gruppe. Eine irreduzible Darstellung gehört zur diskreten Serie, falls sie in der regulären Darstellung von $G$ auf $L^2(G, dx)$ vorkommt

Harish Chandra
Beschreibung der diskreten Serie
für halbeinfache Liegruppen

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ hat eine aber $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ nicht

Dienstag, 8.12.2020

## Darstellungen kompakter Gruppen

| |
|---|
| Jede irreduzible unitäre Darstellung einer kompakten Gruppe ist endlich dimensional<br>Jede unitäre Darstellung einer kompakten Gruppe ist vollständig reduzibel<br>Reguläre Darstellung von $K$ auf $L^2(K, dk)$ hat diskretes Spektrum (vollständig reduzibel mit endlichen Multiplizitäten) |

vollständig reduzibel

$\exists$ Schar $H_i$ paarweise orthogonaler abgeschlossener irreduzibler invarianter Unterräume so daß $H$ ihre Hilbertraumsumme ist

diskretes Spektrum

Zusätzlich: Für jedes $\sigma \in \hat{K}$ ist Anzahl aller $i \in I$ vom Typ $\sigma$ endlich

Anzahl ist unabhängig von Zerlegung

Isotyop: $H(\sigma)=$

Hilbertraumsumme aller $H_i$ vom Typ $\sigma$ (ist unabhängig von Zerlegung)

$H$ ist Hilbertraumsumme der $H(\sigma)$

### gleichgradige Stetigkeit

$\mathcal{M}$ Menge von Funktionen auf einem topologischen Raum $X$ heißt gleichgradig stetig, falls es zu jedem $a \in X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung $U$ von $a$ gibt

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in U,\ f \in \mathcal{M}$$

**Arzela-Ascoli**

$X$ lokal kompakt mit abzählbarer Basis der Toplogie, $\mathcal{M}$ gleichgradig stetig. Die Menge der Funktionswerte $f(x)$ sei für jedes $x \in X$ beschränkt. Dann besitzt jede Folge aus $\mathcal{M}$ eine Teifolge, welche lokal gleichmäßig konvergiert.

**Kompakte Operatoren**

Ein beschränkter linearer Operator $T : H \to H$ eines Hilbertraums in sich heißt kompakt, falls das Bild einer beschränkten Menge (es genügt der Einheitsball) in einem Kompaktum enthalten ist

andere Formulierung
ist $(a_n)$ eine beschränkte Folge in $H$
so hat ihre Bildfolge eine konvergente Teilfolge

Beispiel: $T$ hat endlichdimensionales Bild

Menge der kompakten Operatoren in $\mathcal{B}(H)$
ist abgeschlossen bezüglich der Norm

## Normale Operatoren

Ein linearer beschränkter Operator $T : H \to H$ eines Hilbertraums in sich heißt normal, falls er mit seinem adjungierten Operator vertauscht

z.B.: selbstadjungierte Operatoren, unitäre Operatoren

## Spektralsatz für kompakte Operatoren

$T : H \to H$ sei normal und kompakt. Die Menge der Eigenwerte ist beschränkt. Sie ist entweder endlich oder abzählbar. Im letzteren Fall ist 0 Häufungspunkt der Menge der Eigenwerte und es gibt keinen weiteren Häufungspunkt. Der Eigenraum $H(T, \lambda)$ ist für alle $\lambda \neq 0$ endlich dimensional. Die Eigenräume sind paarweise orthogonal und $H$ ist die direkte Hilbertraumsumme der $H(T, \lambda)$

## Integraloperatoren

$(X, dx)$ Radonmaß, $X$ sei kompakt. Sei $K \in \mathcal{C}(X \times X)$ stetig. Der Operator

$$L_K : L^2(X, dx) \longrightarrow L^2(X, dx)$$

$$L_K(f)(x) = \int_X K(x, y) f(y) dy$$

ist kompakt

Die Menge

$$\{L_K f; \quad f \in L^2(X, dx), \quad \|f\|_2 \leq 1\}$$

ist gleichgradig stetig

bleibt zu zeigen

Sei $f_n \in L^2(X, dx)$ Folge mit $\|f_n\|_2 \leq 1$

Dann besitzt $L_K f_n$ eine Teilfolge welche in $L^2(X, dx)$ konvergiert

Arzela-Ascoli: existiert sogar Teilfolge welche (lokal) gleichmäßig konvergiert

**Kriterium für diskretes Spektrum**

$\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ unitäre Darstellung

es existiere Diracfolge $\delta_n$, so dass $\pi(\delta_n)$ kompakt. Dann besitzt $\pi$ diskretes Spektrum (d.h. vollständig reduzibel und mit endlichen Multiplizitäten)

Erinnerung: $\pi(\delta_n)(h) \longrightarrow h$

Beweis. Wir betrachten vollständig reduzible abgschlossene Unterräume $H_0 \subset H$. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas kann man zeigen, dass es ein maximales $H_0$ gibt. Wir müssen $H_0 = H$ zeigen. Andernfalls ist das orthogonale Komplement von $H_0$ von 0 verschieden. Dieses kann keinen irreduziblen Unterraum enthalten. (Sonst könnte man $H_0$ vergrößern.) Daher genügt es zu zeigen:

Jede unitäre Darstellung mit der angegebenen Eigenschaft besitzt einen invarianten irreduziblen abgeschlossenen Teilraum.

Konstruktion: Betrachte ein Element $f$ der Diracfolge, so dass $\pi(f) \neq 0$. Dann gibt es einen von Null verschiedenen Eigenwert $\lambda$. Der Eigenraum $H(\lambda)$ ist endlich dimensional. Betrachte nun beliebige abgeschlossene invariante Unterräume, so dass $E \cap H(\lambda)$ von 0 verschieden ist (Ganz $H$ ist ein solcher.) Betrachte unter allen diesen einen, so dass die Dimension von $E \cap H(\lambda)$ minimal ist. Setze für ein solches $W = E \cap H(\lambda)$. Es mag viele $E$ geben, die mit $H(\lambda)$ denselben Durchschnitt haben. Wir bezeichnen mit $F$ den Durchschnitt all dieser $E$. Dies ist das kleinste aller $E$, so dass $W = E \cap H(\lambda)$.

Behauptung: $F$ is irreduzibel. Sei $F = A \oplus B$ mit zwei abgeschlossenen invarianten Unterräumen. Einer von beiden muss einen von 0 verschiedenen Eigenvektor $a$ zum Eigenwert $\lambda$ enthalten, sagen wir $a \in A$. Dann ist $A \cap H(\lambda) \neq 0$. Also gilt $A = W$ nach der Minimalität von $W$ und dann sogar $A = F$ wegen der Minimalität von $F$. Also ist $F$ irreduzibel.

Bleibt endliche Multiplizität. Seien $H_1$, $\dots$, $H_m$ isomorph aus einer vollständigen Zerlegung. Wähle $f$, so dass $\pi(f)$ Eigenwert $\lambda \neq 0$ in $H_1$ hat, dann auch denselben Eigenwert in $H_2 \dots$. Also $m \leq \dim H(\lambda)$.

### Folgerung

Sei $K$ eine kompakte Gruppe. Die reguläre Darstellung von $K$ auf $L^2(K)$ hat diskretes Spektrum denn

$$R_f(h) = \int_K f(x) R_x(h) dx, \qquad (R_x h)(y) = h(yx)$$

$$R_f(h)(y) = \int_K f(x) h(yx) dx$$

$$R_f(h)(x) = \int_K f(x^{-1}y) h(y) dy$$

Integraloperator mit Kern $K(x,y) = f(x^{-1}y)$

Donnerstag, 10.12.2020

allgemeines Resultat

> Jede irreduzible unitäre Darstellung einer kompakten Gruppe ist endlich dimensional.
>
> Jede unitäre Darstellung einer kompakten Gruppe ist vollständig reduzibel

Beweis. Wähle $h \in H$, $\|h\| = 1$. Betrachte für $x \in H$ die stetige Funktion

$$K \longrightarrow H, \quad k \longmapsto \langle x, \pi(k)h \rangle \pi(k)h$$

definiere

$$Tx = \int_K \langle x, \pi(k)h \rangle \pi(k)h dk$$

Zeige $T \in B(H)$ und dann

1) $\langle Tx, x \rangle \geq 0$
2) $\langle Th, h \rangle > 0$
3) $T$ vertauschbar mit allen $\pi(x)$
4) $T$ ist kompakter Operator

nehmen zunächst an, dies sei bewiesen.

Erster Teil: Da $T \neq 0$ (wegen 2)) und da $T$ kompakt (wegen 4)) existiert ein Eigenwert $\lambda \neq 0$. Der Eigenraum $H(\lambda)$ ist endlich dimensional. Wegen 3) ist $H(\lambda)$ invariant unter $\pi$. Damit ist der erste Teil bewiesen, denn $H_\lambda = H$ wegen der Irreduzibilizät.

Zweiter Teil: Wähle einen maximalen vollständig reduziblen Unterraum $H_0 \subset H$. Hätten gern $H_0 = H$. Andernfalls existiert, nach dem ersten Teil, im orthogonalen Komplement ein irreduzibler Teilraum im Widerspruch zur Maximalität von $H_0$

bleibt 1)-4) zu beweisen. beschränken uns auf 4). Es genügt zu zeigen. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existert $\varepsilon > 0$ und $T' \in \mathcal{B}(H)$ mit endlich dimensionalen Bild, so dass $\|T - T'\| < \varepsilon$.

Approximiere Integrand durch Treppenfunktionen. Da $K$ kompakt, existieren endliche offene Überdeckung $U_1, \ldots, U_n$ von $K$ und Punkte $k_i \in U_i$, so dass

$$\|\pi(k)h - \pi(k_i)h\| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ für } k \in U_i$$

Wähle messbare Teilmengen $E_i \subset U_i$, welche immer noch $K$ überdecken aber paarweise disjunkt sind. Wähle $e_i \in E_i$. Wähle nun Treppenfunktion $h'$, welche auf $E_i$ konstant ist und bei $e_i$ den Wert $h(e_i)$ hat. Sei $T'$ der entsprechende Operator

$$T'x = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{vol}(E_i)\langle x, \pi(e_i)h\rangle \pi(e_i)h$$

Das Bild von $T'$ ist endlich dimensional und $\|T - T'\| < \varepsilon$.

**Multiplizitäten-Eins**

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad K = \mathrm{SO}(2)$$

$\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(H)$ irreduzible unitäre Darstellung

Studiere Einschränkung $\pi|K : K \longrightarrow \mathrm{U}(H)$

Wir wissen: vollständig reduzibel

Alle irreduziblen unitären Darstellungen von $K$ sind eindimensional, also Multiplikationen mit Charakteren $k \longmapsto \zeta^n$, $\zeta = e^{\mathrm{i}\varphi}$

definiere: $H(n) = \{h \in H;\ \pi(k)(h) = \zeta^n h\}$

Dies sind Unterräume
(Die Isotypen)

Die Räume $H(n)$ sind paarweise senkrecht

$$H = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}} H(n)$$

nächstes Ziel

**Multiplizitäten-Eins-Satz**

$$\boxed{\dim H(n) \le 1}$$

**Der Raum $\mathcal{S}_{m,n}$**

$$\boxed{\mathcal{S}_{m,n} = \left\{ f \in \mathcal{S};\ f(k_\theta x k_{\theta'}) = f(x) e^{-\mathrm{i}m\theta} e^{-\mathrm{i}n\theta'} \right\}}$$

ist ein Teil der Faltungsalgebra $\mathcal{S} = \mathcal{C}_c^\infty(G)$

$f(k_\theta x k_{\theta'})$

ist periodisch in $\theta$ und $\theta'$

entwickelbar in Fourierreihe

$$f(k_\theta x k_{\theta'}) = \sum_{m,n} f_{m,n}(x) e^{\mathrm{i}m\theta} e^{\mathrm{i}n\theta'}$$

mit

$$f_{m,n}(x) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(k_\theta x k_{\theta'}) e^{-\mathrm{i}m\theta} e^{-\mathrm{i}n\theta'} d\theta d\theta'$$

Setze $\theta = \theta' = 0$

$$f(x) = \sum_{m,n} f_{m,n}(x)$$

Die $f_{m,n}$ liegen in $\mathcal{S}_{m,n}$

Erinnerung

$$\text{Faltung: } (f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy$$

$\mathcal{S}$ Faltungsalgebra

mit Involution $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$

$\mathcal{S}_{n,n}$ ist $*$-Algebra

a) $S_{m,n} * S_{p,q} = 0$ if $n \neq p$.
b) $S^*_{m,n} = S_{n,m}$.
c) $S_{m,n} * S_{n,q} \subset S_{m,q}$

Folgerung

Beweis c)

$$f \in \mathcal{S}_{m,n}, \quad g \in \mathcal{S}_{n,q}$$

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy$$

$$(f * g)(k_\theta x k_{\theta'}) = \int_G f(y) g(y^{-1} k_\theta x k'_\theta) dy$$

$$(f * g)(k_\theta x k_{\theta'}) = e^{-\mathrm{i}q\theta} \int_G f(y) g(y^{-1} k_\theta x) dy$$

$$(f * g)(k_\theta x k_{\theta'}) = e^{-\mathrm{i}q\theta} \int_G f(k_\theta y) g(y^{-1} x) dy$$

$$(f * g)(k_\theta x k_{\theta'}) = e^{-\mathrm{i}q\theta} e^{-\mathrm{i}m\theta} \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy$$

Folgerung

$\mathcal{S}_{n,n}$ ist $*$-Algebra

müssen zeigen

$\mathcal{S}_{n,n}$ operiert auf $H(n)$
(als $*$-Darstellung)
und irreduzibel (oder 0)

außerdem (fundamental)

$$\boxed{\mathcal{S}_{n,n} \textbf{ ist kommutativ}}$$

Schur'sches Lemma $\Longrightarrow \dim H(n) \leq 1$

Beweis der Kommutatvität

Das Spiel mit den 2 Involutionen auf $G$

$$x^\tau = x' \quad \text{(transponieren)}$$

$$x^\sigma = \gamma x \gamma, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\tau = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\sigma = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

$\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ Automorphismus

$\tau(xy) = \tau(y)\tau(x)$ Antiautomorphismus

$$\sigma^2 = \tau^2 = \mathrm{id}$$

$k^\tau = k^\sigma = k^{-1}$ für $k \in K$

$$k = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a^2 + b^2 = 1$$

zu jeder symmetrischen reellen $2 \times 2$-Matrix
existiert $k \in K$ mit

$$s^\sigma = k s k^{-1}$$

beruht auf Hauptachsentransformation
existiert $k_1 \in K$ mit

$$k_1^{-1} s k_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$\lambda, \mu$ Eigenwerte

$s$ und $s^\sigma$ haben dieselben Eigenwerte
also existiert $k_2 \in K$ mit

$$k_2^{-1} s^\sigma k_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Setze $k = k_2 k_1^{-1}$

$$x \in G \Longrightarrow x = sk \text{ mit } s = s',\ k \in \mathrm{SO}(2)$$

Man zeigt zunächst

Jede positive definite $2 \times 2$-Matrix $a$
ist in der Form $a = s^2$, $s = s'$ schreibbar

Beweis: Man darf $a$ durch $ksk'$, $\in \mathrm{SO}(2)$ ersetzen
daher o.B.d.A $a$ Diagonalmatrix
(Diagonalelemente positiv)

Wende dies an auf $xx'$ für $x \in G$
$xx' = s^2 \Longrightarrow x = sk,\ k = s^{-1}x$

Beweis der Kommutativität von $(S_{n,n}, *)$

$$f^\sigma(x) = f(x^\sigma), \quad f^\tau(x) = f(x^\tau)$$

Regeln

$$(f * g)^\sigma = f^\sigma * g^\sigma, \quad (f * g)^\tau = g^\tau * f^\tau$$

Nehme an: $f \in \mathcal{S}_{m,m}$

Dann gilt $f^\tau = f^\sigma$

Beweis: Benutze $x = sk$ $(x = x',\ k \in \mathrm{SO}(2))$

$$f^\tau(x) = f(k^\tau s) = \varrho(k) f(s) \qquad (\varrho(k) = e^{\mathrm{i}m\theta})$$

$$f^\sigma(x) = f(s^\sigma k^{-1}) = \varrho(k) f(s^\sigma) = \varrho(k) f(s)$$

Jetzt $f, g \in \mathcal{S}_{m,m}$

$$(f * g)^\tau = (f * g)^\sigma$$

$$g^\tau * f^\tau = f^\sigma * g^\sigma$$

$$g * f = f * g$$

Beweisende für Kommutatvität

$$\pi : G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{U}(H) \text{ irreduzibel unitär}$$

$$H(n) = \{h \in H;\ \pi(k_\varphi)(h) = \zeta^n h\}$$

einfache Rechnung

$\mathcal{S}_{m,n}$ bildet $H$ in $H(m)$ ab

$$\tilde{h} = \int_G f(x)\pi(x)hdk$$

$$\pi(k)\tilde{h} = \int_G f(x)\pi(kx)hdx$$

$$= \int_G f(k^{-1}x)\pi(x)dx = \zeta^m \tilde{h}$$

ebenso einfach

$\mathcal{S}_{m,n}H(q) = 0$ falls $q \neq n$

$$\pi(k)\tilde{h} = \int_G f(x)\pi(kxk^{-1})\pi(k)hdx$$

$$= \int_G f(k^{-1}xk)\pi(x)\pi(k)hdx = \zeta^m \zeta^{-n} \zeta^q \tilde{h}$$

$\mathcal{S}_{m,m}$ operiert irreduzibel auf $H(m)$

denn, sei $\mathcal{S} = \mathcal{C}_c(G)$

Sei $h \in H$, $h \neq 0$, dann $\mathcal{S}(h)$ dicht

dann aber Projektion auf $H(m)$ dicht

diese ist gleich $\mathcal{S}_{m,m}(h)$

jetzt Schursches Lemma: $\dim H(m) \leq 1$
Ausnutzung der Kommutativität

Dienstag 15.12.2020

## Derivierte Darstellung

Differentialrechnung in Banachräumen

$E$, $F$ Banachräume (reell genügt), $U \subset E$ offen

$f : U \longrightarrow F$ heißt differenzierbar

falls für alle $a \in E$ existiert

$A \in B(E, F)$

so dass $f(x) = f(a) + A(x-a) + r(x)$

$$\frac{r(x)}{\|x-a\|} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow a$$

Ableitung: $D : U \longrightarrow B(E, F)$

Man kann $\mathcal{C}^\infty(U, F)$ definieren

Im Fall $E = \mathbb{R}^n$ kann man auch definieren

wann $f : U \longrightarrow F$ (reell-) analytisch heißt

Zu jedem $a \in U$ existiert Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} a_\nu (z-a)^\nu \quad z^\nu = z_1^{\nu_1} \cdots z_n^{\nu_n}$$

welche in einer vollen Umgebung absolut konvergiert
und $f$ darstellt

$\mathcal{C}^\omega(U, F)$: alle analytischen Funktionen

Anstelle $\mathbb{R}^n$ kann man beliebigen
endlich dimensionalen Vektorraum nehmen

Prinzip der analytischen Fortsetzung
(Vorteil analytischer Funktionen)

$f, g \in \mathcal{C}^\omega(U, F)$, $U$ zusammenhängend

es existiere $V \subset U$ offen nicht leer
mit $f = g$ auf $V$. Dann $f = g$ auf ganz $U$

also $\mathcal{C}_c^\omega(U) = 0$
(Nachteil: es gibt keine analytische Zerlegung der 1)

$$\mathcal{C}^\omega(U,F) \subset \mathcal{C}^\infty(U,F)$$

Variante: schwach differenzierbar (analytisch)

$f : U \longrightarrow F$, fordere $L \circ f$ so $\forall\ L \in E'$

schwach analytisch $\Longrightarrow$ analytisch

falsch für differenzierbar

In allen unseren Fällen ist
erklärt, wann eine Funktion auf $G$
differenzierbar (analytisch) ist.

Im Falle $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ benutzt man
die Iwasawakoordinaten

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \sqrt{y}^{-1}\,x \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$g(\mathrm{i}) = z = x + \mathrm{i}y$$

$$f(g) = f_0(x,y,\varphi)$$

$\pi : G \longrightarrow B^*(H)$ Banachdarstellung

Jedem $h \in H$ ordne Funktion zu

$$f : G \longrightarrow H; \quad f(x) = \pi(x)h$$

$h \in H$ heißt differenzierbar (analytisch)

falls diese Funktion so

$$H^\omega \subset H^\infty \subset H$$

hängt von $\pi$ ab. $H^\infty_\pi$

einfach: $H^\infty \subset H$ dicht

schwierig $H^\omega \subset H$ dicht

Theorie von Nelson

In den Fällen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ anders, einfacher
kommt später

$$f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$$

$$\pi(f)h = \int_G f(x)\pi(x)h dx$$

sind differenzierbar, wegen

$$\pi(x)\pi(f)v = \int_G f(y)\pi(x)\pi(y)v dy = \int_G f(x^{-1}y)\pi(y)v dy$$

Leibnizsche Regel
man darf unter Integral differenzieren

arbeite mit Diracfolge
man braucht hier die Existenz
einer differenzierbaren Diracfolge
benutze differenzierbare Zerlegung der Eins
muss man beweisen

also $H^\infty$ dicht in $H$

## Die derivierte Darstellung

Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ kommt ins Spiel

derzeit $\mathfrak{g} = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2};\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$

Exponentialfunktion: $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$

$$e^X = \exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

**Lie-Ableitung**

$f : G \longrightarrow H, \quad \mathcal{C}^\infty$-Funktion

$$\mathcal{L}_X f : G \longrightarrow H$$

Richtungsableitung in „Richtung" $X$

$$(\mathcal{L}_X f)(x) = \frac{d}{dt} f(xe^{tX})\big|_{t=0}$$

analog im $\mathbb{R}^n$

$$(\nabla_A f)(x) = \frac{d}{dt} f(x + tA)\big|_{t=0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X \\ ([X,Y] = XY - YX) \end{array}}$$

Behauptung lautet

$$\frac{d}{dt} f(\exp(t[X,Y]))\big|_{t=0} =$$
$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\big(f(\exp(tX)\exp(sY)) - f(\exp(tY)\exp(sX))\big)\big|_{t=s=0}.$$

besser zu beweisen für

$$G = \mathrm{GL}_+(2,\mathbb{R}), \quad \mathfrak{g} = \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Vorteil: $G \subset \mathbb{R}^4$ offen

Man kann von Polynomen reden

es genügt den Beweis für Polynome
(wegen Taylorscher Formel mit Restglied)

wenn Formel richtig für $f$, $g$ dann für $fg$

$$\frac{d}{dt}\exp(t[X,Y])\Big|_{t=0} =$$
$$\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}\big(\exp(tX)\exp(sY)) - \exp(tY)\exp(sX)\big)\Big|_{t=s=0}.$$

bedeutet $[X, Y] = XY - YX$

nützlich zu wissen

$\mathcal{L}_X$ ist linearer linksinvarianter Differentialoperator auf $G$. Jeder von dieser Form. Dies führt zu abstrakter Definition:

Liealgebra ist die Menge linearer linksinvarianter Differentialoperatoren auf $G$

## Derivierte Darstellung

$$h \in H^\infty,\ X \in \mathfrak{g}$$

$$(d\pi)(X)(h) = \frac{d}{dt}\pi(e^{tX})h\Big|_{t=0}$$

Schreibweisen
anstelle $d\pi(X)(h)$ einfach $\pi(X)h$ oder sogar $Xh$

$$d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(H^\infty)$$

rein algebraisch (keine Stetigkeitsbedingung)

Erinnerung $f(x) = \pi(x)h$

$$d\pi(X)h = (\mathcal{L}_X f)(e) \in H^\infty_\pi$$
$$\pi(a)d\pi(X)h = (\mathcal{L}_X f)(a)$$
$$d\pi([X,Y]) = d\pi(X)\circ d\pi(Y) - d\pi(Y)\circ d\pi(X)$$

**Liehomomorphismus**

Sei $\mathfrak{g}$ eine (reelle) Liealgebra, $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra (über $\mathbb{R}$) Ein Liehomomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit der Eigenschaft

$$\varphi([X,Y]) = \varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X)$$

Wenn beide über $\mathbb{C}$ definiert sind,
kann man auch $\mathbb{C}$-lineare
Liehomomorphismen betrachten

bei uns meist $\mathcal{A}$ komplexe Algebra
aber $\mathfrak{g}$ nur reelle Liealgebra
dann nur reelle Liehomomorphismen

zwei wichtige Liehomomorphismen
Lie-Ableitung

$$\mathfrak{g} \longmapsto \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(G,H))$$

dervierte Darstellung

$$\mathfrak{g} \longmapsto \mathrm{End}(H^\infty)$$

**Komplexifizierung**

allgemein

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$$

bei uns derzeit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), \quad \mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$$

$\mathcal{A}$ assoziative $\mathbb{C}$-Algebra

$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ Lie-Homomorphismus (über $\mathbb{R}$)

$\mathbb{C}$-lineare Ausdehnung

$$\varphi : \mathfrak{g}_\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$X + \mathrm{i}Y \longmapsto \varphi(X) + \mathrm{i}\varphi(Y)$$

die Formel

$$(d\pi)(X)(h) = \frac{d}{dt}\pi(e^{tX})h\Big|_{t=0}$$

wäre falsch

Donnerstag, 17.12.2020

Erinnerung

$$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$$

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G, \quad \exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Lieableitung einer $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : G \to H$
$H$ darf komplexer Banachraum sein
$\mathcal{C}^\infty(G,H)$ ist komplexer Vektorraum

$$(\mathcal{L}_A f)(x) = \frac{d}{dt} f(xe^{tA})\Big|_{t=0}$$

(eine Art Richtungsableitung)

$\mathbb{C}$-lineare Ausdehnung auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

$$\mathcal{L}_{A+\mathrm{i}B} = \mathcal{L}_A + \mathrm{i}\mathcal{L}_B$$

**Explizite Formeln für die Lie-Ableitung**

$\mathbb{R}$-Basis von $\mathfrak{g}$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Weiteres Element

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obere drei Elemente
bilden auch $\mathbb{C}$-Basis von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

bessere $\mathbb{C}$-Basis von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

$$W, \quad E^- = H - \mathrm{i}V, \quad E^+ = H + \mathrm{i}V$$

(Iwasawa-Zerlegung)

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \sqrt{y}^{-1}\, x \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$f(g) = f_0(x, y, \theta), \quad f(ge^{tA}) = f_0(x(t), y(t), \theta(t))$$

$f_0$ drei reelle Variable
$\mathcal{L}_A f = g$, schreibe $\mathcal{L}_A f_0 = g_0$
möchte für obere Basen explizite Formeln

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X &= y\cos 2\theta \frac{\partial}{\partial x} + y \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial y} + \sin^2\theta \frac{\partial}{\partial \theta},\\
\mathcal{L}_W &= \frac{\partial}{\partial \theta},\\
\mathcal{L}_V &= 2y\cos 2\theta \frac{\partial}{\partial x} + 2y \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial y} - \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta},\\
\mathcal{L}_H &= -2y\sin 2\theta \frac{\partial}{\partial x} + 2y \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial y} + \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta},
\end{aligned}$$

Folgerung

$$\mathcal{L}_{E^-} = -2\mathrm{i}ye^{-2\mathrm{i}\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\Big) + \mathrm{i}e^{-2\mathrm{i}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{tH} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tW} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tV} = \begin{pmatrix} \operatorname{Cos} t & \operatorname{Sin} t \\ \operatorname{Sin} t & \operatorname{Cos} t \end{pmatrix}$$

Beweis für $W$

$$W^{2n} = (-1)^n E, \quad W^{2n+1} = (-1)^n W$$

$$e^{tW} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n W^n}{n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}(-1)^n E + \sum_{n=0}^{n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n W$$

$$e^{tW} = (\cos t)E + (\sin t)W$$

Lieableitung in Iwasawakoordinaten

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \sqrt{y}^{-1}\, x \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$f(g) = f_0(x, y, \theta), \quad f(ge^{tA}) = f_0(x(t), y(t), \theta(t))$$

$$\frac{d}{dt} f(ge^{tA}) = \frac{\partial f_0}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial f_0}{\partial y} \dot{y}(t) + \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \dot{\theta}(t)$$

Man muss $ge^{tA}$ wieder Iwasawa zerlegen
besonders einfach für $A = W$

$$x(t) = x, \quad y(t) = y, \quad \theta(t) = \theta + t$$

$$\mathcal{L}_W = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Anderes Beispiel

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um eine Matrix $g$ Iwasawa zu zerlegen
betrachte Möbiustransformation

$$g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

beachte

$$k(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$$

daher

$$g(\mathrm{i}) = \frac{a\mathrm{i} + b}{c\mathrm{i} + d} = z = x + \mathrm{i}y$$

also

$$\boxed{\begin{array}{c} y = \dfrac{1}{c^2 + d^2}, \quad x = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} \\ c\sqrt{y} = \sin\theta, \quad d\sqrt{y} = \cos\theta \end{array}}$$

also

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \frac{d + \mathrm{i}c}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

und daher

$$\theta = \operatorname{Arg} \frac{d + \mathrm{i}c}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Nun

$$g(t) = g\exp(tX) = \begin{pmatrix} a & b+ta \\ c & d+tc \end{pmatrix}$$

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) = \frac{a\mathrm{i} + at + b}{c\mathrm{i} + ct + d}$$

$$\cos\theta(t) = (d+ct)\sqrt{y(t)}$$

$$\dot{z}(0) = \frac{1}{(c\mathrm{i}+d)^2}$$

$$ye^{-2\mathrm{i}\theta} = \frac{1}{c^2+d^2}\Big(\frac{d+\mathrm{i}c}{\sqrt{c^2+d^2}}\Big)^{-2}$$

$$\dot{z}(0) = ye^{-2\mathrm{i}\theta} \quad \text{oder} \quad \dot{x}(0) = y\cos 2\theta,\ \dot{y}(0) = -y\sin 2\theta$$

berechne $\dot{\theta}(0)$

$$-\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) = (d+ct)\frac{\dot{y}(t)}{2\sqrt{y(t)}} + c\sqrt{y(t)}$$

$$\dot{\theta}(0)\sin\theta = -\frac{d\dot{y}(0)}{2\sqrt{y}} - c\sqrt{y}$$

$$c\sqrt{y} = \sin\theta, \quad \dot{y}(0) = -y\sin 2\theta = -2y\sin\theta\cos\theta$$

$$\dot{\theta}(0) = -d\sqrt{y}\cos\theta + 1 = -\cos^2\theta + 1 = \sin^2\theta$$

**Taylorreihe**

$$\pi : G \longrightarrow B^*(E), \quad \text{Banachdarstellung}$$

Erinnerung derivierte Darstellung

$$d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(H^\infty)$$

$$d\pi(A)h = \frac{d}{dt}\pi(e^{tA}h)\Big|_{t=0}$$

$$f = f_h : G \longrightarrow H, \quad f(x) = \pi(x)h$$

$$d\pi(A) = \mathcal{L}_A(f)(e)$$

Nächstes Ziel

$h \in E$ analytischer Vektor, $X$ klein

$$\boxed{\pi(\exp(X))h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d\pi(X)^n h}$$

Beweis

$$(\mathcal{L}_X f)(y) = \frac{d}{dt} f(y \exp(tX))\Big|_{t=0}$$

$$(\mathcal{L}_X f)(y \exp(uX)) = \frac{d}{dt} f(y \exp((u+t)X))\Big|_{t=0} = \frac{d}{du} f(y \exp(uX))$$

$$(\mathcal{L}_X^n f)(y \exp(uX)) = \frac{d^n}{du^n} f(y \exp(uX))$$

Taylorreihe für $t \longmapsto f(y \exp(tX))h$

$$\begin{aligned} f(y\exp(tX))h &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \, \frac{d^n}{dt^n} f(y \exp(tX))\Big|_{t=0} \, t^n h \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \, (\mathcal{L}_X^n f)(y) \, t^n h. \end{aligned}$$

Bedeutung

$\pi$ aus $d\pi$ rekonstruierbar

beachte auch

$G$ zusammenhängende lokal kompakte Gruppe
wird erzeugt von beliebiger Umgebung von $e$
z.B.: $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

Bew.: Sei $U$ kleine offene Umgebung von $e$. O.B.d.A. $x \in U \Longrightarrow x^{-1} \in U$. Betrachte

$$U^n \longrightarrow G, \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n$$

Bild ist offen (Vereinigung vom Translaten von $U$). Vereinigung der Bilder ist offen und Untergruppe von $G$. Damit auch abgeschlossene Untergruppe von $G$. Damit gleich $G$, da $G$ zusammenhängend

$\pi : G \to B^*(H)$ Banachdarstellung, $W \subset H^\omega$ Unterraum, invariant unter allen $d\pi(A)$, $A \in \mathfrak{g}$. Dann ist der Abschluss von $W$ invariant unter $G$

also: Die derivierte Darstellung sieht etliches von der Darstellung $\pi$ selbst

bleibt Problem
woher nimmt man analytische Elemente

Dienstag, 12.1.2021, 11:15

**Der Casimir-Operator**

$\mathfrak{g}$ reelle Liealgebra, derzeit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$\mathcal{A}$ assoziative $\mathbb{C}$-Algebra

$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ reeller Liehomomorphismus

$\mathbb{R}$-linear und

$$\varphi([A, B]) = \varphi(A)\varphi(B) - \varphi(B)\varphi(A)$$

Beispiel: $\pi : G \to \mathcal{B}^*(E)$ Banachdarstellung
derivierte Darstellung: $d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(E^\infty)$
$d\pi(A)h = \frac{d}{dt}\pi(e^{tA})h\Big|_{t=0}$

Komplexifizierung

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$$

$\mathbb{C}$-lineare Ausdehnung

$$\varphi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad \varphi(A + \mathrm{i}B) = \varphi(A) + \mathrm{i}\varphi(B)$$

$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ komplexer Liehomomorphismus

vereinfachte Schreibweise

$\varphi(A) = \mathbf{A}$ oder gar $A$

Wir sind interessiert an funktoriellen Familien, die jedem Liehomomorphismus $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ (variables $\mathcal{A}$) ein Element $C_\varphi \in \mathcal{A}$ zuordnen, so dass für je zwei Liehomomorphismen

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad \psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{B}$$

und jeden Homomorphismus assoziativer Algebren $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $\psi = f \circ \varphi$ gilt:

$$f(C_\varphi) = C_\psi$$

Wenn man weiß, dass es unter allen $\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$ ein universelles $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}$ existiert, so genügt es, ein einzelnes Element $C \in \mathcal{U}$ vorzuschreiben. So ein $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{U}$ existiert und heißt universelle Einhüllende von $\mathfrak{g}$. Wir wollen diese nicht benutzten und müssen daher Familien betrachten

Eine solche Familie heißt Casimirfamilie, falls

$$\varphi(A)C_\varphi = C_\varphi\varphi(A) \quad (\forall A \in \mathfrak{g})$$

vereinfachte Schreibweisen

$$C = C_\varphi$$
$$\mathbf{A}C = C\mathbf{A}$$
oder sogar $AC = CA$

Statt Casimirfamilie sagt man einfach Casimiroperator

Beispiel für einen Casimiroperator

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{V}^2 - \boldsymbol{W}^2 \\ &= \boldsymbol{E}^+\boldsymbol{E}^- + 2\mathrm{i}\,\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^2 \end{aligned}}$$

$\mathbb{R}$-Basis von $\mathfrak{g}$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}$-Basis von $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$

$$W, \quad E^- = H - \mathrm{i}V, \quad E^+ = H + \mathrm{i}V.$$

Zum Beweis braucht man die Vertauschungsrelationen

$$[E^+, E^-] = -4\mathrm{i}W, \quad [W, E^+] = 2\mathrm{i}E^+, \quad [W, E^-] = -2\mathrm{i}E^-$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4\mathrm{i} \\ 4\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

diese bestimmen Struktur von $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$

Struktur der Komplexifizierung $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$
einfacher als die von $\mathfrak{g}$

werden sehen, dass $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ und $\mathfrak{su}(2)$
dieselbe Komplexifizierung haben

Beweis, dass $\omega$ Casimir-Operator

Schreibe $A$ anstelle von $\varphi(A)$

zu zeigen $A(H^2+V^2-W^2)=(H^2+V^2-W^2)A$
(dies ist Formel in $\mathcal{A}$)

Konvention: $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$
wenn in einer Formel mindestens einmal
ein Produkt $AB$ von zwei $A, B \in \mathfrak{g}$ auftritt
so ist diese Formel in $\mathcal{A}$ zu lesen

Eine Relation $[A,B]=C$ in $\mathfrak{g}$
bedeutet in $\mathcal{A}$ dann $AB-BA=C$

die Formel $A(E^+E^-+2\mathrm{i}W-W^2)=(E^+E^-+2\mathrm{i}W-W^2)A$
muss man nur für die Erzeuger $A$ zeigen

etwa $E^+(E^+E^-+2\mathrm{i}W-W^2)=(E^+E^-+2\mathrm{i}W-W^2)E^+$

Trick: Nutze Vertauschungsrelationen
um auf beiden Seiten gleiche Reihenfolge zu erhalten
(erst $E^+$, dann $E^-$, dann $W$)

links: $(E^+)^2E^-+2\mathrm{i}E^+W-E^+W^2$
(Reihenfolge ok)

rechts: erster Term $E^+E^-E^+$
$[E^+,E^-]=-4\mathrm{i}W$, $E^-E^+=E^+E^-+4\mathrm{i}W$
also rechts, erster Term: $(E^+)^2E^-+4\mathrm{i}E^+W$ ok

rechts, zweiter Term $2\mathrm{i}WE^+$
$[W,E^+]=2\mathrm{i}E^+$, $WE^+=E^+W+2\mathrm{i}E^+$
rechts, zweiter Term: $2\mathrm{i}E^+W-4E^+$ ok

rechts, dritter Term $-W^2E^+$
$-W(E^+W+2\mathrm{i}E^+)=-WE^+W-2\mathrm{i}WE^+$
$=-(E^+W+2\mathrm{i}E^+)W-2\mathrm{i}(E^+W+2\mathrm{i}E^+)$
$-E^+W^2-4\mathrm{i}E^+W+4E^+$ ok

Beweis von $H^2+V^2-W^2=E^+E^+-2\mathrm{i}W-W^2$
ersetze $H=(1/2)(E^++E^-)$, $V=(1/2\mathrm{i})E^+-E^-$
und sortiere

Ein Beispiel (S.84)
betrachte $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(G))$
(Lie Ableitung)
$(\mathcal{L}_A f)(x) = \frac{d}{dt} f(xe^{tA})\big|_{t=0}$

Iwasawakoordinaten von $G$: $x, y, \theta$

$$\omega = 4y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) - 4y\frac{\partial^2}{\partial x \partial\theta}.$$

Wir brauchen Funktionen der speziellen Form

$$f(x, y, \theta) = f_0(x, y)e^{\mathrm{i}n\theta}$$

$$\omega f = (\omega_0 f_0)e^{\mathrm{i}n\theta}$$

$$\boxed{\omega_0 = 4y^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) - 4\mathrm{i}ny\frac{\partial}{\partial y}}$$

Weitere Anwendung der Vertauschungsrelationen

$\pi : G \to \mathrm{GL}(H)$ Banachdarstellung auf Hilbertraum $H$. $\pi|K$ unitär.

$$H(m) = \{h \in H; \quad \pi(k_\theta)h = e^{\mathrm{i}m\theta}h\}$$

Elemente von $H(m)$ seien differenzierbar, z.B.: $H(m)$ endlich dimensional. Dann operiert $d\pi(W)$ auf $H(m)$ durch Multiplikation mit $\mathrm{i}m$. Außerdem

$$d\pi(E^+) : H(m) \longrightarrow H(m+2)$$
$$d\pi(E^-) : H(m) \longrightarrow H(m-2)$$

fundamentale Folgerung

Sei $h \in H(m)$, $h \neq 0$

dann $\mathcal{H}$ erzeugt von $(E^+)^a h$, $(E^-)^b h$, $a, b \geq 0$

*Beweis.* $H$ ist Hilbertraum-Summe der $H(m)$

$$\exp(tw) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\pi(\exp(tW))h = e^{\mathrm{i}mt}h \quad \text{for} \quad h \in H(m)$$

Differenziere nach $t$ und setze $t = 0$

$$d\pi(W)d\pi(E^+) = d\pi[W, E^+] + d\pi(E^+)d\pi(W)$$

$$[W, E^+] = 2\mathrm{i}E^+$$

$$d\pi(W)d\pi(E^+)h = \mathrm{i}(m+2)d\pi(E^+)h$$

$\mathfrak{g}$ operiert auf $H_K$
(algebraische Summe aller $H(n)$)

$\mathcal{H} = H_K$ ist Menge der $K$-endlichen Elemente
(aber $G$ operiert nicht auf $H_K$)

derivierte Darstellung bedeutet

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H}).$$

Donnerstag, 14.1.2021

## Zulässige Lie-Moduln

Begriff des $\mathfrak{g}$-$K$-Moduls

$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$

$K = \mathrm{SO}(2)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2)$

$$\mathfrak{k} = \mathbb{R}W,\ W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tW} = k_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Ein $\mathfrak{g}$-$K$-Modul $\mathcal{H}$ ist ein komplexer Vektorraum $\mathcal{H}$ zusammen mit einem Homomorphismus

$$\pi : K \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$$

and einem Liehomomorphismus

$$d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H}),$$

so dass für $A \in \mathfrak{k}$

$$(d\pi)(A)h = \frac{d}{dt}\pi(e^{tA})h\Big|_{t=0}$$

gilt. Außerdem, sei $H(m)$ der Eigenraum

$$H(m) = \{h \in H; \quad \pi(k_\theta) = e^{\mathrm{i}m\theta}h\},$$

dann ist $\mathcal{H}$ die algebraische (direkte) Summe aller $H(m)$

Man kann $d\pi$ ausdehnen ($\mathbb{C}$-linear) auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & \pm\mathrm{i} \\ \pm\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt dann: $d\pi(W)h = \mathrm{i}mh$ für $h \in H(m)$

denn: $(d\pi W)h = \frac{d}{dt}e^{tW}h\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}e^{\mathrm{i}tm}h|_{t=0} = \mathrm{i}mh$

Unser Hauptbeispiel

$\pi : G \longrightarrow \mathcal{B}^*(H)$, Banachdarstellung
in einem Hilbertraum $H$

schränke $\pi$ auf $K$ ein

Nehme an, dass $\pi|K$ unitär

Diese Darstellung zerfällt

als Hilbertraumsumme der $H(m)$: $\pi(k_\theta)h = e^{\mathrm{i}\theta m}h$

definiere: $\mathcal{H}$ = algebraische Summe der $H(m)$

nehmen nun an

alle Elemente von $H(m)$ differenzierbar
(das ist der Fall, wenn alle $H(m)$ endlich dimensional sind)
$\mathfrak{g}$ operiert dann auf $\mathcal{H}$

weil $W : H(m) \to H(m)$, $E^\pm : H(m) \to H(m \pm 2)$
Sei $h \in H(m)$. Zeige $E^+h \in H(m+2)$
oder $WE^+h = \mathrm{i}(m+2)E^+h$
nutze $[W, E^+] = 2\mathrm{i}E^+$
$WE^+h = E^+Wh + 2\mathrm{i}E^+h$
$= E^+(\mathrm{i}mh + 2\mathrm{i}E^+h) = \mathrm{i}(m+2)E^+h$

Ein $\mathfrak{g}$-$K$-Modul heißt **zulässig**, falls alle $H(m)$ endlich dimensional sind

Dies ist der Fall, wenn $\pi$ unitär irreduzibel
dann sogar $H(m)$ eindimensional

Ein zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul heißt irreduzibel, falls er von 0 verschieden ist und falls für jeden Vektor $h \in H(m)$, $h \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{A}(h) = \mathcal{H}$$

Dabei sei $\mathcal{A}$ die vom Bild von $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ erzeugte assoziative Unteralgebra von $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ (konkret $\mathcal{A}(h)$ besteht aus endlichen Summen von Elementen $A_1 \cdots A_n h$, $A_i \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$.)

$h \in H(m)$, $\mathcal{A}$ besteht aus allen
endlichen Summen $(E^+)^a(E^-)^b W^c h$
$\mathcal{B}$: endliche Summen mit $a = b$
ist Algebra
$\mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{End}(H(m)$, irreduzible Darstellung von Algebren
(wegen Vertauschungsrelationen)
Casimir $C = E^+E^-2\mathrm{i}W + W^2$
vertauscht mit $\mathcal{B}$
also $C$ operiert via Skalar
also $E^+E^-$ operiert via Skalar
also $\mathcal{B}(h) = \mathbb{C}h$

also $\dim H(m) \leq 1$

Ein Schursches Lemma

Ist $\mathcal{H}$ ein irreduzibler $\mathfrak{g}$-$K$-Modul, so operiert der Casimiroperator $C$ durch Multiplikation einer Konstanten

$$Ch = \lambda h, \quad h \in \mathcal{H}$$

Beweis: wissen $C$ operiert of $H(m)$ mit Skalar $\lambda_m$
aber auch $C(E^+)^a h = E^+Ch = \lambda(E^+)^a h$
also auch $(E^+h)^m$ Eigenvektor zum selben Eigenwert
also $\lambda_{m+a}\lambda_m$

Sei $\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(H)$ ein irreduzible unitäre Darstellung. Dann ist der zugehörige $\mathfrak{g}$-$K$-Modul irreduzibel

dazu braucht man folgendes
wegen II.10.2

Die Elemente aus $H(m)$ sind analytisch Da $H(m)$ eindimensional ist, sind sie Eigenfunktionen des Casimiroperators. Der Casimiroperator wirkt auf $H(m)$ wie ein elliptischer Differentialoperator

$h$ analytisch bedeutet $f(g) = \pi(g)h$ analytisch
$h \in H(m)$, dann $f(gk_\theta) = e^{\mathrm{i}m\theta}f(g)$
dann $f(x, y, \theta) = f_0(x, y)e^{\mathrm{i}m\theta}$
dann $Cf = \omega_0 = \left(4y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 4\mathrm{i}ny\frac{\partial}{\partial y}\right)f$

**Elliptische Differentialoperatoren**

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$
$$h_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$$

$$Df = \sum_{i_1+\ldots+i_n \leq m} h_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial_{i_n}} f$$

$$(f \in \mathcal{C}^\infty(U,H))$$

heißt linearer Differentialoperator der Ordung $m$
falls mindestes ein $h_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_1+\cdots+i_n = m$
von 0 verschieden

heißt elliptisch, falls

$$\sum_{i_1+\ldots+i_n = m} h_{i_1,\ldots,i_n}(x) X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n} \neq 0$$

$$x \in U,\ X \in \mathbb{R}^n$$

Jede Eigenfunktion eines elliptischen
Differentialoperators ist analytisch

Dienstag, 19.1.2021

**Klassifikation irreduzibler $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln**

Ein $\mathfrak{g}$-$K$-Modul $\mathcal{H}$ ist ein komplexer Vektorraum $\mathcal{H}$ zusammen mit einem Homomorphismus

$$\pi : K \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$$

and einem Liehomomorphismus

$$d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H}),$$

so dass für $A \in \mathfrak{k}$

$$(d\pi)(A)h = \frac{d}{dt}\pi(e^{tA})h\Big|_{t=0}$$

gilt. Außerdem, sei $H(m)$ der Eigenraum

$$H(m) = \{h \in H; \quad \pi(k_\theta) = e^{\mathrm{i}m\theta}h\},$$

dann ist $\mathcal{H}$ die algebraische (direkte) Summe aller $H(m)$

$$h \in H(m): \; d\pi(W)h = \mathrm{i}mh$$

$$\text{zulässig: } \dim H(m) < \infty$$

Ein zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul heißt irreduzibel, falls er von 0 verschieden ist und falls für jeden Vektor $h \in H(m)$, $h \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{A}(h) = \mathcal{H}$$

Dabei sei $\mathcal{A}$ die vom Bild von $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ erzeugte assoziative Unteralgebra von $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ (konkret $\mathcal{A}(h)$ besteht aus endlichen Summen von Elementen $A_1 \cdots A_n h$, $A_i \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$.)

Irreduzibler $\mathfrak{g}$-$K$-Modul $\mathcal{H}$

Erinnerung

$h \in H(m)$, $\mathcal{A}h$ wird erzeugt

$$(E^+)^a h,\ (E^-)^b h$$

$$W : H(m) \longrightarrow H(m), \quad E^\pm : H(m) \longrightarrow H(m \pm 2)$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm \mathrm{i} \\ \pm \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(H(m)) \leq 1$$

von Ist $\mathcal{H}$ ein irreduzibler $\mathfrak{g}$-$K$-Modul, so operiert der Casimiroperator $\omega$ durch Multiplikation mit einer festen Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$

Bezeichnung: $S = \{n \in \mathbb{Z};\ H(n) \neq 0\}$

$S$ besteht nur aus geraden oder ungeraden Zahlen
Ist $\mathcal{H}$ ein irreduzibler $\mathfrak{g}$-$K$-Modul, so ist die Menge

$$S = \{n \in \mathbb{Z};\ H(n) \neq 0\}$$

ein Intervall in $2\mathbb{Z}$ oder in $2\mathbb{Z} + 1$

Intervalle

1) $S = 2\mathbb{Z}$
2) $S = 2\mathbb{Z} + 1$
3) $S = \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq m,\ n \equiv m \bmod 2\}$
   (m heißt niedrigstes Gewicht)
4) $S = \{n \in \mathbb{Z};\ n \leq m,\ n \equiv m \bmod 2\}$
   (m heißt Höchstgewicht)
5) $S = \{m, m+2, \dots, n-2, n\}$ $(m \equiv n \bmod 2)$

Einzeldiskussionen der 5 Fälle

Fall 1)

Wähle $h_0 \in H(0)$, $h_0 \neq 0$

definiere $h_n$, $n$ gerade, induktiv

$$E^+ h_n = h_{n+2}$$

$n$ beliebiges Vorzeichen

$$E^- h_n = c_n h_{n-2}$$

benutze: $[E^+, E^-] = -4\mathrm{i}W$

$$E^+ E^- h_n - E^- E_n^+ h = -4\mathrm{i}(\mathrm{i}n h_n)$$
$$c_n h_n - c_{n+2} h_n = 4n h_n$$

Rekursion $c_n - c_{n+2} = 4n$

bestimmt durch $\lambda = c_0$

$\lambda$ ist der Eigenwert des Casimir

$$Ch = (E^+ E^- + 2\mathrm{i}W - W^2)h =$$

$$\lambda h = c_0 h \quad \text{für} \quad h \in H(0)$$

Ein irreduzibler zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul vom Typ 1) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch den Eigenwert $\lambda$ des Casimir. Zu einem $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert genau dann eine solche Darstellung, falls $\lambda$ nicht von der Form $4(n-1)n$, $n \in \mathbb{Z}$, ist

Andere Fälle ähnlich

Ein irreduzibler zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul vom Typ 2) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch den Eigenwert $\lambda$ des Casimir. Zu einem $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert genau dann eine solcher Modul, falls $\lambda$ nicht von der Form $4(n-1)n+1$, $n \in \mathbb{Z}$, ist

Ein irreduzibler zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul vom Typ 3) (es existiert niedrigstes Gewicht $m$ aber kein Höchstgewicht) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch das Gewicht $m$. Ein ganze Zahl $m$ tritt auf als niedrigstes Gewicht, falls $m > 0$. Der Eigenwert des Casimir ist $\lambda = m^2 - 2m$.

Ein irreduzibler zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul vom Typ 4) (es existiert Höchstgewicht $n$ aber kein niedrigstes Gewicht) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch das Gewicht $n$. Eine ganze Zahl $n$ tritt auf als Höchstgewicht, falls $n < 0$. Der Eigenwert des Casimir ist $\lambda = n^2 + 2n$.

Ein irreduzibler zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul (es existiert niedrigstes Gewicht $m$ und ein höchstes Gewicht $n$) ist vom Typ 5) genau dann, wenn er endlich dimensional ist. Ein Zahlenpaar $(m, n)$ tritt genau dann auf, falls $m > 0$ und $n = -m$. Der Eigenwert das Casimir ist $\lambda = m^2 - m$ $\lambda = m^2 - 2m$. Die Dimension ist $m + 1$.

also: In jeder Dimension $\geq 1$ existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter irreduzibler zulässiger $\mathfrak{g}$-$K$-Modul.

Die unitarisierbaren irreduziblen
zulässigen $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln

Nicht jeder irreduzible $\mathfrak{g}$-$K$-Modul
kommt von einer irreduziblen unitären Darstellung von $G$

sie muss unitarisierbar sein

Eine $\mathfrak{g}$-$K$-Modul heißt unitarisiert, falls auf $\mathcal{H}$ ein Hermitesches Skalarprodukt gegeben ist, so dass die Elemente $A \in \mathfrak{g}$ schiefhermitesch operieren.

$$\langle d\pi(A)a, b\rangle = -\langle a, d\pi(A)b\rangle$$

Er heißt unitarisierbar, falls ein solches Skalarprodukt existiert.

$$A \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\colon\ \langle d\pi(A)a, b\rangle = -\langle a, d\pi(\bar{A})b\rangle$$

Ist $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ eine irreduzible unitäre Darstellung, so ist der derivierte $\mathfrak{g}$-$K$-Modul unitarisierbar.

Beweis

$$\langle \pi(g)a, b\rangle = \langle a, \pi(g^{-1}))\rangle$$
$$\langle \pi(e^{tA})a, b\rangle = \langle a, \pi(e^{-tA})b\rangle$$

nach $t$ ableiten und danach $t = 0$ setzen

$$\langle d\pi(A), b\rangle = \langle A, -d\pi(A)b\rangle$$

Welche der Moduln 1)-5) sind unitarisierbar

1) Weder höchstes noch niedrigstes Gewicht, gerader Fall: $\lambda$ reell und $\leq 0$

2) Weder höchstes noch niedrigstes Gewicht, ungerader Fall: $\lambda$ reell und $\leq -1$

3) Es existiert niedrigstes aber kein Höchstgewicht $m$: $m > 0$

4) Es existiert höchstes aber kein niedriges Gewicht $n$: $n < 0$

5) Endlich dimensionaler Fall: Nur die triviale Darstellung ist unitarisierbar

Beweis im Falle 1)

$$h \in H(0) : \langle E^- h, E^- h\rangle = -\langle h, E^+ E^- h\rangle = -\bar{\lambda}\langle h, h\rangle$$

klar: Isomorphiebegriff für unitarisierte $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln

Zwei unitarisierte irreduzible $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln, welche als $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln isomorph sind, sind sogar als unitarisierte Moduln isomorph

Zwei $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln aus obigen 5 Listen sind höchstens dann isomorph, wenn sie derselben der 5 Liste angehören. Zwei Moduln aus derselben Liste sind genau dann isomorph, wenn die Eigenwerte des Casimir gleich sind.

Zwei irreduzible unitäre Darstellungen $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ sind genau dann unitär isomorph, wenn die assozierten $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln isomorph sind.

Jeder unitarisierbare irreduzible $\mathfrak{g}$-$K$-Modul kommt von einer irreduziblen unitären Darstellung $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$

Die Klassifikation der irreduziblen unitären Darstellungen und der irreduziblen unitarisierbaren Darstellungen ist also dieselbe

Man muss zu jedem der $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln eine unitäre Darstellung finden

Fall für Fall

Man kann den derivierten $\mathfrak{g}$-$K$-Modul in jedem der Fälle ausrechnen

beginne mit 1), 2)

Diese kommen von der Hauptserie $H(s)$

zerfällt in geraden und ungeraden Bestandteil

$H(s)^{\text{even}}$, $H(s)^{\text{odd}}$

unitär, falls

$s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ im geraden Fall (gerade Hauptsereie)

$s \in (-1, 1)$ im geraden Fall (Nebenserie)

$s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $s \neq 0$

im ungeraden Fall (ungerade Hauptsereie)

im ungeraden Fall $s = 0$ zerfällt
$H(0)^{\mathrm{odd}}$ in die beiden Mock diskreten

Man kann derivierte ausrechnen
und erhält, dass alle irreduzibel und

$$\lambda = (s + 1)(s - 1)$$

muss reell und $\leq 0$ sein

das bedeutet

$$s \in \mathrm{i}\mathbb{R} \quad \text{oder} \quad s \in (-1, 1)$$

$s$ bis aufs Vorzeichen bestimmt

**Bargmann-Klassifikation**

Jede irreduzible initäre Darstellung von $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist entweder die triviale eindimensionale Darstellung oder sie ist isomorph zu einer Darstellung der folgenden Serien

1) gerade Hauptserie, $s \in \mathrm{i}\mathbb{R}$,

2) ungerade Hauptserie, $s \in \mathrm{i}\mathbb{R} - \{0\}$,

3) ergänzende Serie, $s \in (-1, 1) - \{0\}$,

4) discrete series with highest weight $m \leq -2$ or lowest weight $n \geq 2$.

5) mock diskrete Serie (2 Darstellungen, (Höchstgewicht $-1$ oder niedrigstes Gewicht 1).

Die Seriennummer (1)-5)) ist eindeutig bestimmt In den ersten 3 Fällen ist $s$ bestimmt bis aufs Vorzeichen. $\lambda = (s + 1)(s - 1)$ ist der Eigenwert des Casimir. In den letzten beiden Fällen ist das Gewicht eindeutig bestimmt

Donnerstag, 21.1.2021

SU(2)

Fernziel: Irreduzible unitäre
Darstellungen von $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

anstelle SO(2) tritt SU(2)

$$\bar{g}' g = E, \quad \det(g) = 1$$

Anstelle $\mathfrak{so}(2) = \mathbb{R}W$ tritt SU(2)

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad A + \bar{A}' = 0,\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

man braucht die irreduziblen
unitären Darstellungen von SU(2)

Sie sind endlich dimensional

Jede stetige endlich dimensionale Darstellung
ist unitarisierbar

daher spielt unitär
keine so große Rolle

konkrete Realisierung

in jeder Dimension wird eine konkrete
Darstellung von $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ konstruiert

Sie ist sogar Einschränkung
einer Darstellung von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$

Sei $W_n$ der Raum aller homogenen Polynome
vom Grad $d$

$$P(x_1, x_2) = \sum_{\nu_1+\nu_2=d} a_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$$

Dimension $n = d + 1 \geq 1$

$$(\pi(g)P)(x) = P(g'x)$$

hier muss $x$ als Spalte gschrieben werden

Die Gruppe SU(2) ist nicht abelsch

$$g\bar{g}' = E$$
$$\bar{g}' = g^{-1}$$
$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1}$$

$$a = x_1 + \mathrm{i}x_2,\ b = x_3 + \mathrm{i}x_4$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

Dies ist die 3-dimensional Sphäre $S^3$

typische Karte

$$\{x = (x_1, x_2, x_3);\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\} \longrightarrow \mathrm{SU}(2),$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$
$$a = x_1 + \mathrm{i}x_2,\ b = x_3 + \mathrm{i}\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

SU(2) zusammenhängend

für offenes $U \subset \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ ist definiert

$\mathcal{C}^\infty(U, H),\ H$ Banachraum

stetige Darstellung

$$\pi : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(H)$$

$H$ endlich dimensionaler komplexer VR

Definition von $H^\infty$

$h \in H$: betrachte $f(x) = \pi(x)h$
$h \in H^\infty \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(G, H)$

wieder klar: $H^\infty \subset H$ dicht
(gleicher Beweis wie bei $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$)

also $H = H^\infty$

damit $d\pi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathrm{End}(H)$

definierbar (ist ein Liehomomorphismus)

$$d\pi(A)h = \frac{d}{dt}\pi(e^{tA})h\Big|_{t=0}$$

hätten gern wieder
$\pi$ irreduzibel $\Longleftrightarrow d\pi$ irreduzibel

man braucht: alle Elemente von $H$ analytisch

$d\pi$ irreduzibel heißt:
keine echten $\mathfrak{su}(2)$-invarianten Unterräume

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad e^{2tX_1} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^{2tX_2} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad e^{2tX_3} = \begin{pmatrix} \cos t & \mathrm{i}\sin t \\ \mathrm{i}\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

(dieselben Regeln wie Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$)

Komplexifizierung von $\mathfrak{su}(2)$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathrm{i}\mathfrak{su}(2)$$

$$2X_1 = W, \quad E^{\pm} = 2(\pm X_3 - \mathrm{i}X_1)$$

Lieableitung: $f \in C^\infty(\mathrm{SU}(2), H)$

$$(\mathcal{L}_X(f))(x) = \frac{d}{dt} f\big(xe^{tX}\big)\Big|_{t=0} \qquad (X \in \mathfrak{su}(2))$$

Casimir

gegeben: Liehomomorphismus $\varphi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ assoziative komplexe Algebra

$\mathbb{C}$-linear ausdehnen auf $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$\boxed{\omega = E^+E^- + 2\mathrm{i}W - W^2 = -4(X_1^2 + X_2^2 + X_3^3).}$$

(schreibe $A$ anstelle von $\varphi(A)$)

Jetzt nimmt man $\mathcal{A} = \mathrm{End}(\mathcal{C}^\infty(G,H))$
und $\varphi$ die Lieableitung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_1} &= \frac{1}{2}\Big[-x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3}\Big],\\
\mathcal{L}_{X_2} &= \frac{1}{2}\Big[-x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}\Big],\\
\mathcal{L}_{X_3} &= \frac{1}{2}\Big[-x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}\Big].
\end{aligned}$$

Casimir explizit

$$\begin{aligned}
\omega = &-(1-x_1^2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (1-x_2^2)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - (1-x_3^2)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\\
&+ 2x_1x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + 2x_1x_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} + 2x_2x_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\\
&+ 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_3\frac{\partial}{\partial x_3}.
\end{aligned}$$

ist elliptisch, da

$$\begin{pmatrix} 1-x_1^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_1x_2 & 1-x_2^2 & -x_2x_3 \\ -x_1x_3 & -x_2x_3 & 1-x_3^2 \end{pmatrix}.$$

positiv definit
z.B: Determinante $1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$
Klassifikation der endlichdimensionalen irreduziblen
Liehomomorphismen $\mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathrm{End}(H)$

gegeben: $\pi : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}(H)$, $H$ endlich dimensional
stetig irreduzibel

derivierte Darstellung $\mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathrm{End}(H)$

Ausdehnung: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{End}(H)$

Einschränkung: $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{End}(H)$

außerdem operiert $\mathrm{SO}(2) \subset \mathrm{SU}(2)$

also $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-$\mathrm{SO}(2)$-Modul

ist irreduzibel

wurde klassifiziert

bestimmt $\pi$ bis auf unitäre Isomorphie also

$l \geq 0$ ganz oder halbganz. Es existiert eine stetige irreduzible Darstellung von SU(2) auf einem Vektorraum $V_l$ der dimension $2l+1$ (beliebige ganze Zahl $\geq 0$). Es existiert Basis $e_{l,-l}, e_{l,-l+1}, \ldots, e_{l,l-1}, e_{ll}$ mit

$$k_\theta e_{lm} = e^{\mathrm{i}m\theta} e_{lm}, \quad -l \leq m \leq l,$$

$$\begin{aligned} X_1 e_{lm} &= \frac{\mathrm{i}}{4}(e_{l,m+1} + c_{l,m-1} e_{l,m-1}), \\ X_2 e_{lm} &= \mathrm{i} m e_{lm}, \\ X_3 e_{lm} &= \frac{1}{4}(e_{l,m+1} - c_{l,m-1} e_{l,m-1}), \end{aligned}$$

wobei

$$c_{lk} = -8 \sum_{\substack{-l \leq \nu \leq k \\ \nu - l \in \mathbb{Z}}} \nu \qquad (k \geq l).$$

ist genau die Derivierte

Dienstag, 26.1.2021

SU(2) Zusammenfassung

Gedanke

$\pi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{U}(H)$ irreduzibel unitär
dann $H$ endlich dimensional

$d\pi : \mathfrak{su}(2) \to \mathrm{End}(H)$
derivierte, ist auch irreduzibel

Fortsetzung: $d\pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{End}(H)$

Einschränkung: $d\pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{End}(H)$

(nicht mehr unitär, aber irreduzibel zulässig)

diese wurden klassifiziert

Resultat:

In jeder Dimension gibt es genau eine (endlich dimensionale) irreduzible unitäre Darstellung von SU(2). Diese ist Einschränkung einer Darstellung von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$:

Sei $W_n$ der Raum aller homogenen Polynome vom Grad $d$ in zwei Variablen

$$P(x_1,x_2)=\sum_{\nu_1+\nu_2=d} a_{\nu_1\nu_2}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}$$

Dimension $n=d+1\geq 1$

$$(\pi(g)P)(x)=P(g'x)$$

hier muss $x$ als Spalte geschrieben werden

Schreibe $n=2l+1$, $l$ ganz oder halbganz. Es existiert Basis $e_{l,-l},e_{l,-l+1},\dots,e_{l,l-1},e_{ll}$ von $V_l:=W_n$ mit

$$k_\theta e_{lm}=e^{\mathrm{i}m\theta}e_{lm},\quad -l\leq m\leq l,$$

$$\begin{aligned}
X_1e_{lm}&=\frac{\mathrm{i}}{4}(e_{l,m+1}+c_{l,m-1}e_{l,m-1}),\\
X_2e_{lm}&=\mathrm{i}me_{lm},\\
X_3e_{lm}&=\frac{1}{4}(e_{l,m+1}-c_{l,m-1}e_{l,m-1}),
\end{aligned}$$

wobei

$$c_{lk}=-8\sum_{\substack{-l\leq\nu\leq k\\ \nu-l\in\mathbb{Z}}}\nu\qquad(k\geq l).$$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ als reelle Liealgebra

stetige Darstellungen $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to B^*(H)$

auch diese haben eine derivierte
$d\pi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$

$\mathcal{H} \subset H$ geeigneter dichter Unterraum

$d\pi$ ist ein $\mathbb{R}$-linearer Liehomomorphismus
(obwohl $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ komplexe Algebra)

braucht $d\pi$ nicht $\mathbb{C}$-linear zu sein!

also

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist hier als reelle
Liealgebra zu betrachten

**Komplexifizierung**

$V$ reeller Vektorraum

$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist Komplexifizierung
Tensorprodukt konkret

$$V_{\mathbb{C}} := V \times V$$

dies wird zunächst als reeller VR betrachtet

Multiplikation mit i

$$\mathrm{i}(a,b) = (-b,a)$$

Ausdehnen zu $\mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

Einbetten $V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}$, $a \longmapsto (a,0)$

Bezeichne Bild mit $\tilde{V}$
$V_{\mathbb{C}} = \tilde{V} + \mathrm{i}\tilde{V}$

Identifiziere $V$ und $\tilde{V}$

dann Elemente von $V_{\mathbb{C}}$ von der Form

$$(A,B) = A + \mathrm{i}B,\ \ A,B \in V$$

$$\mathrm{i}(A+\mathrm{i}B) = -B + \mathrm{i}A$$

Sei jetzt $V$ sogar ein komplexer Vektorraum
(insbesondere auch ein reeller Vektorraum)

Man kann komplexe Struktur von $V$ vergessen und dann komplexifizieren

Man kann auch die interne komplexe Struktur
$\mathrm{i}(a,b) = (\mathrm{i}a, \mathrm{i}b)$ auf $V \times V$ betrachten

darf man nicht verwechseln

Bezeichungen

also $V$ sei schon komplexer Vektorraum, $V_{\mathbb{C}} = V \times V$

interne komplexe Struktur: $\mathrm{i}(a,b) = (\mathrm{i}a, \mathrm{i}b)$

externe komplexe Strukur: $\mathrm{i}(a,b) = (-b, a)$

Verwechslungsgefahr

neue Bezeichnung

$$\mathrm{i}(a,b) = (\mathrm{i}a, \mathrm{i}b)$$

$$J(a,b) = (-b, a)$$

vereinfachte Schreibweise (Vorsicht)

$$(a,b) = a + Jb, \quad a, b \in V$$

also $\mathrm{i}(a,b)$ bezeichnet die interne Multiplikation mit i
$J(a,b)$ bezeichnet die externe Multiplikation mit i

in vereinfachter Schreibweise

$$J(a + Jb) = -b + Ja$$

Sei $\mathfrak{g}$ reelle Liealgebra

betrachte $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$

Komplexifizierung: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$

$\mathbb{C}$-lineare Ausdehnung der Lieklammer

$$[[A_1, A_2], [B_1, B_2]] :=$$
$$([A_1, B_1] - [A_2, B_2], [A_1, B_2] + [A_2, B_1])$$

nun $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ komplexe Liealgebra

Jetzt sogar $\mathfrak{g}$ komplexe Liealgebra
Unser Beispiel: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Auf $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ zwei komplexe Strukturen aber auch zwei Strukuren als komplexe Liealgebra

innere: $([A_1, A_2], [B_1, B_2]) = ([A_1, B_1], [A_2, B_2])$
(dies ist das kartesische Produkt von komplexen Liealgebren

äußere

$$[A_1 + JA_2, B_1 + JB_2] =$$
$$[A_1, B_1] - [A_2, B_2] + J([A_1, B_2] + [A_2, B_2]$$

$$[[A_1, A_2], [B_1, B_2]] :=$$
$$([A_1, B_1] - [A_2, B_2], [A_1, B_2] + [A_2, B_1])$$

dies ist die Komplexifizierung

also $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ trägt 2 Strukuren
als komplexe Liealgebra

Schreibweise

$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ für die innere
$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ für die äußere (Komplexifizierung)

| Beide sind isomorph als komplexe Liealgebren |
|---|

Es gibt einen Isomorphismus

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

welcher die innere Struktur
in die äußere überführt

also $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ mit innerer Struktur
und $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ mit äußerer Struktur
sind isomorph als komplexe Liealgebren

Zum Beweis braucht man

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \quad A \longrightarrow A^{\pm},$$
$$A^{+} = \frac{1}{2}(\bar{A}, \mathrm{i}\bar{A}),$$
$$A^{-} = \frac{1}{2}(A, -\mathrm{i}A),$$

dies ist $\mathbb{C}$-linear
und verträglich mit Lieklammern

$$(\mathrm{i}A)^{\pm} = JA^{\pm}$$

$$(\mathrm{i}A)^+ = \frac{1}{2}(\overline{\mathrm{i}A}, \mathrm{i}(\overline{\mathrm{i}A})) = \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\bar{A}, \bar{A})$$
$$JA^+ = \frac{1}{2}J(\bar{A}, \mathrm{i}\bar{A}) = \frac{1}{2}(-\mathrm{i}\bar{A}, \bar{A})$$

$$[A,B]^+ = [A^+, B^+]$$
$$[A,B]^+ = \frac{1}{2}(\overline{[A,B]}, \mathrm{i}\overline{[A,B]})$$
$$[A^+, B^+] = \frac{1}{4}[(\bar{A}, \mathrm{i}\bar{A}), (\bar{B}, \mathrm{i}\bar{B})] = \frac{1}{4}([\bar{A}, \bar{B}] - [\mathrm{i}\bar{A}, \mathrm{i}\bar{B}], [\bar{A}, \mathrm{i}\bar{B}] + [\mathrm{i}\bar{A}, \bar{B}])$$

Jetzt Isomorphismus konkret

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$
$$A \longmapsto A^+ + A^-$$

offenbar

$$[A^+, B^-] = 0$$

jetzt: $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & \pm\mathrm{i} \\ \pm\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

$$W^+,\ E^{++},\ E^{-+}, \quad W^-,\ E^{+-},\ E^{--}$$

müssen studieren
$\mathbb{R}$-lineare Liehomomorphismen

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ komplexe assoziative Algebra

$\mathbb{C}$-lineare Ausdehnung

$$\varphi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$(A, B) \longmapsto \varphi(A) + \mathrm{i}\varphi(B)$$

2 Casimiroperatoren

$$\omega^+ = E^{++}E^{-+} + 2\mathrm{i}W^+ - (W^+)^2$$
$$\omega^- = E^{+-}E^{--} + 2\mathrm{i}W^- - (W^-)^2$$

$$\Box_+ = -\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \quad \Box_- = \mathrm{i}\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}.$$

Invarianten

$$\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{U}(H)$$

irreduzible unitäre Darstellung

betrachte Einschränkung auf $K = \mathrm{SU}(2)$

$\mathcal{H} \subset H$
algbebraische Summe aller irreduziblen
Unterdarstellungen von $\pi|K$
Auf $\mathcal{H}$ operiert SU(2) und $\mathfrak{g}$
(muss man zeigen)
Begriff des $\mathfrak{g}$-$K$-Moduls

Die Invariante $l_0$

Jede irreduzible Komponente von $\pi|K$
ist endlich dimensional

$2l_0 + 1$ ist das Minimmum aller Dimensionen
($l_0$ ist ganz oder halbganz $\geq 0$

Die beiden Casimiroperatoren $\square^\pm$
operieren auf $\mathcal{H}$ durch Multiplikation
mit Skalaren $\mu^\pm$

Die drei Invarianten $l_0, \mu^+, \mu^-$ legen die irreduzible unitäre Darstellung $\pi$ bis auf Isomorphie fest. Drei Invarianten treten genau dann auf, falls

a) $l_0 \geq 0$ ganz oder halbganz

b) $\mu^\pm$ reell

c) $(\mu^-)^2 = 32 l_0^2(\mu^+ + 8l_0^2 - 8)$

d) $32(l_0+1)^2(\mu^+ + 8l_0^2 + 16l_0) > (\mu^-)^2$

neuer Parameter $s$

$$s^2 = (\mu^+ + 8l_0^2 - 8)/8.$$

$$\mu^+ = 8(s^2 + 1 - l_0^2), \quad (\mu^-)^2 = (16 l_0 s)^2.$$

$$\mu^- = 16 l_0 s \qquad (l_0 \neq 0).$$

**Hauptserie**

$l_0 \in \{0, 1/2, 1, \ldots\}$, $s$ reell: Es existiert eine irreduzible unitäre Darstellung $\pi_{l,s}$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ mit den Parametern $(l_0, \mu^+, \mu^-)$ wobei

$$\mu^+ = 8(s^2 + 1 - l^2), \quad \mu^- = 16ls.$$

Im Falle $l_0 \neq 0$ ist $S$ eindeutig bestimmt, aber im Falle $l_0 = 0$ nur bis aufs Vorzeichen.

**Nebenserie**

Die gleiche Aussage gilt für $l = 0$ and $s = \mathrm{i}t$, $t \in (-1, 1)$, $t \neq 0$. Auch hier ist $s$ bis aufs Vorzeichen bestimmt.

Jede unitäre irreduzible Darstellung ist unitär isomorph zu einer dieser Listen.

Wesentliche Hilsmittel zum Beweis

**Multiplizitäten-Eins-Satz**

Schränke $\pi$ auf $K = \mathrm{SU}(2)$ ein

Lede irreduzible unitäre Darsetllung
von $K$ kommt in $\pi|K$ höchstens einmal vor

Zusatz

Sei $l_0$ das kleinste $l_0$ welches in $\pi|K$ auftritt
dann gilt
$l$ kommt vor genau dann wenn $l \geq l_0$ und $l - l_0 \in \mathbb{Z}$

Weiteres Hilfsmittel
Sei $\mathcal{H}$ die algebraische Summe der
irreduziblen Unterdarstellungen von $\pi|K$
Ihre Elemente sind analytisch

**Analytische Vektoren**

$G$ Liegruppe (Bei uns $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$)

$\mathfrak{g}$ Liealgebra, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ Komplexifizierung

$\pi : G \to B^*(H)$ Banachdarstellung
$H$ Hilbertaum, $\pi|K$ unitär

Betrachte irreduzible Unterdarstellungen von $H$
Ihre algebraische Summe sei $\mathcal{H}$
also $\mathcal{H}$ dicht in $H$

Donnerstag, 28.1.2021

**Struktur von** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

hyperbolischer Raum

$$\mathcal{H}_n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0}$$

Die Spingruppe $\mathrm{Spin}(n,1)$ operiert auf $\mathcal{H}_n$

$n = 2$ hyperbolische Ebene (obere Halbebene)
Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (das ist $\mathrm{Spin}(2,1)$) operiert of $\mathcal{H}_2$
das wissen wir schon (Möbiustransformationen)

Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (das ist $\mathrm{Spin}(3,1)$) operiert auf $\mathcal{H}_3$

das erklären wir jetzt
$n = 3$ hyperbolischer Raum

andere Darstellung

$$\mathcal{H}_3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}, \quad (z,v),\ z \in \mathbb{C},\ v > 0$$

noch besser bette $\mathcal{H}_3$ in die Quaternionen ein

$$\mathbb{R} + \mathrm{i}\mathbb{R} + \mathrm{j}\mathbb{R} + \mathrm{k}\mathbb{R}$$

4-dimensionaler Schiefkörper

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = \mathrm{k},\ \mathrm{jk} = \mathrm{i},\ \mathrm{ki} = \mathrm{j}$$

Quaternionenmultiplikation ist
assoziativ und nullteilerfrei
(Schiefkörper)

Quaternionenkonjugation

$$\overline{a_1 + \mathrm{i}a_2 + \mathrm{j}a_3 + \mathrm{k}a_4} = a_1 - \mathrm{i}a_2 - \mathrm{j}a_3 - \mathrm{k}a_4.$$

$$\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$$

$$|a| = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 + a_4^2}$$

Inverses eines Quaternions $a \neq 0$

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}.$$

$(z, v)$ wird erstzt durch $P = z + jv = x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}v$

reines Quaternion: k-Komponente ist 0
das ist kein Ring, aber

Inverses eines reinen Quaternions ist rein

$$P = z + jv,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

nachrechnen, dass $cP + d \neq 0$

$$(c_1 + \mathrm{i}c_2)(x + \mathrm{i}y + \mathrm{j}v) + d_1 + \mathrm{i}d_2 = 0$$

j-Term der linken Seite: $c_1 v = 0$

k-Term der linken Seite: $c_2 v = 0$

also: $c = 0$
also: $d = 0$

Widerspruch zu $ad - bc = 1$

definiere

$$M(P) = (aP + b)(cP + d)^{-1}$$

zeige

$$M(P) \in \mathcal{H}_3$$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ operiert auf $\mathcal{H}_3$ von links

$$(z^*, v^*) = M(z, v), \quad z^* = \frac{(az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) + a\bar{c}v^2}{|cz + d|^2 + |c|^2 v^2}$$
$$v^* = \frac{v}{|cz + d|^2 + |c|^2 v^2}.$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(P) = -P^{-1} = -\frac{\bar{P}}{|P|^2}$$

ausgezeichneter Punkt in $\mathcal{H}_3$

j oder $(0, 1)$

Stabilisator von j ist

SU(2)

(Analogie zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$)

denn: $a\mathrm{j}+b=\mathrm{j}(c\mathrm{j}+d)$

$(a_1+\mathrm{i}a_2)\mathrm{j}+b=\mathrm{j}((c_1+\mathrm{i}c_2)\mathrm{j}+d)$

Realteil: $b_1=-c_1$

i-Anteil: $\mathrm{i}b_2=\mathrm{jij}c_2=\mathrm{jk}c_2=\mathrm{i}c_2$

also $\bar{c}=-b$

$$\begin{pmatrix}\sqrt{v} & 0\\ 0 & \sqrt{v}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & v^{-1}z\\ 0 & 1\end{pmatrix}(0,1)=(z,v).$$

Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
&G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),\\
&A=\left\{a=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix};\quad \alpha>0\right\},\\
&N=\left\{n=\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad z\in\mathbb{C}\right\},\\
&K=\mathrm{SU}(2).
\end{aligned}$$

Iwasawa-Zerlegung

$$\boxed{A\times N\times K\overset{\sim}{\longrightarrow}G,\quad (a,n,k)\longmapsto ank}$$

Beweis

Sei $g\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

betrachte $(z,v)=g(\mathrm{j})$

bilde $p=\begin{pmatrix}\sqrt{v} & 0\\ 0 & \sqrt{v}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & v^{-1}z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$k=p^{-1}g$ stabilisiert $(0,1)$

also $g=pk$ wie gewünscht

Explizite Form der Iwasawazerlegung

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=&\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{c\bar{c}+d\bar{d}}} & 0\\ 0 & \sqrt{c\bar{c}+d\bar{d}}\end{pmatrix}\\ &\begin{pmatrix}1 & a\bar{c}+b\bar{d}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &\frac{1}{\sqrt{c\bar{c}+d\bar{d}}}\begin{pmatrix}\bar{d} & -\bar{c}\\ c & d\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

Haarmaß

auf $K = \mathrm{SU}(2)$, $dk$ so, dass $\mathrm{vol}(K) = 1$

wir wissen, dass $K$ eine Sphäre $S^3$ ist

man kann $dk$ in Koordinaten von $S^3$ ausrechnen

das lohnt sich nicht

auf $A$: $da = d\alpha/\alpha$

auf $N$; $dn = dxdy$ (übliches Maß auf $\mathbb{R}^2$)

Haarmass $dg$ auf $G$ is Produktmaß $dk\,dn\,da$

Anmerkung

Picardsche Modulgruppe: $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[i])$

Picardsche Modulformen

Elstrodt, Grunewald, Mennicke:
Groups acting on hyperbolic space (Springer)

Dienstag, 2.2. 2021

## **Hauptserie von** $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Mechanismus der induzierten Darstellung

algebraischer Formalismus
$P \subset G$ Untergruppe

Man macht aus einer Darstellung von $P$
eine Darstellung von $G$
und nennt dies induzierte Darstellung
führt zu Mackeytheorie

$$\sigma : P \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$
$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma) = \left\{ f : G \longrightarrow V; \quad f(hg) = \sigma(h)f(g) \right\}$$

Auf $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$ operiert $G$ durch Translation von rechts

$$G \times \mathrm{Ind}_P^G(\sigma) \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\sigma)$$

Sei $\sigma$ unitär
In der Macketheory wird erklärt
wie man $\mathrm{Ind}_P^G$ modifiziert
so dass wieder unitär
und es werden Bedingungen angegeben
wann die induzierte irreduzibel ist

Im Moment bei uns etwas einfacher
eindimensionale Darstellung von $P$
entspricht Homomorphismus $\chi : P \to \mathbb{C}^*$

$$\mathrm{Ind}_P^G(\chi) = \left\{ f : G \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f(hg) = \chi(h)f(g) \right\}$$

es wäre einfach, falls existiert
$K \subset G$, so dass $P \times K \xrightarrow{\sim} G$
und so dass auf $P\backslash G$ invariantes Maß existiert
(dieses muss dann mit Haarmaß auf $K$ übereinstimmen)

$$\begin{aligned}
&G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),\\
&A = \left\{ a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}; \quad \alpha > 0 \right\},\\
&N = \left\{ n = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad z \in \mathbb{C} \right\},\\
&K = \mathrm{SU}(2).
\end{aligned}$$

Haarmaß: $dg = dadndk$

$P$ Gruppe aller Dreiecksmatrizen
mit positiver Diagonale

$$A \times N \xrightarrow{\sim} P$$

topologisch (kein Gruppenisomorphismus)

trotzdem Haarmaß = Produktmaß: $dp = dnda$

Modularfunktion $\Delta_P(p) = \alpha^4$

Quasicharakter: $\chi(p) = \alpha^{2+s}$

Induzierte Darstllung

$$\mathcal{H}^\infty(s) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(G), \quad f(px) = \alpha^{2+s} f(x) \right\}$$

Einschränkung auf $K$ liefert

$$\mathcal{H}^\infty(s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^\infty(K)$$

auf der rechten Seite hat men Skalarprodukt

Übertragung zu Skalarprodukt auf $\mathcal{H}^\infty(s)$

Wie im Falle $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ zeigt man

Die Darstellung von $G$ auf $\mathcal{H}^\infty(s)$

ist unitär für $s \in \mathbb{R}\mathrm{i}$

Im Falle der $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ haben wir $\mathcal{H}(s)$ in einen geraden
und ungeraden Teil zerlegt

das kann man deuten als Zerlegung
unter der Gruppe $\{\pm E\}$

Anstelle dieser Gruppe tritt nun

$$M = \left\{ m = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}; \quad |\zeta| = 1 \right\}$$

Untergruppe von $\mathrm{SU}(2)$

$M$ vertauscht mit $A$

und operiert daher auf $\mathcal{H}(s)$ von links

$$f(x) \longrightarrow f(m^{-1}x), \; m \in M.$$

$M$ kompakt und abelsch

sollte man nach Charakteren von $M$ zerlegen

Charaktere von $M$: $m \longmapsto \zeta^n$, $n$ ganz

Eigenräume

$$\mathcal{H}^\infty(n,s) = \left\{f \in \mathcal{H}^\infty(s); \quad f(mx) = \zeta^n f(x)\right\}$$

beides zusammen

$$a = \zeta|a|, \quad \zeta = \frac{a}{|a|}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} g\right) = \left(\frac{a}{|a|}\right)^{-n} |a|^{2+s} f(g)$$

Abschlüsse in $L^2(K)$ (=Komplettierungen)

$$\mathcal{H}^\infty(s) \subset \mathcal{H}(s), \quad \mathcal{H}^\infty(n,s) \subset \mathcal{H}(n,s)$$

Die Serie der (unitären) Darstellungen $\pi_{n,s}$ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf $\mathcal{H}(n,s)$, $n \in \mathbb{Z}$ und $s$ rein imaginär, heißt Hauptserie.

Diese Darstellungen sind irreduzibel.

Eine Variante liefert auch hier eine
unitäre induzierte Darstellung
im Falle $n = 0$ und $s \in (-1, 1)$

dies ist die ergänzende Darstellung oder Nebenserie

damit Klassifikation für $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ fertig

es gibt Hauptserie und Nebenserie
keine diskrete Serie
auch keine Mock-diskreten

Beweis der Irreduzibilität
nicht einfach

Schränke $\pi_{n,s}$ auf $K$ ein
und zerlege in Irreduzible

allgemeine Darstellungstheorie

kompakter Gruppen $K$

kann über des Studium der

regulären Darstellung auf $L^2(K)$
gewonnen werden

Resultat
Jede irreduzible (insbesondere endlich dimensionale)
Darstellung von $K$ tritt in der regulären auf
Die Multiplizität ist gleich ihrer Dimension

Variante dieses Satzes

Betrachte die Gruppe $K \times K$

Sie operiert auf $L^2(K)$

$$f(x) \longmapsto f(k_1^{-1} x k_2)$$

Zerlege diese Darstellung in irreduzible
zunächst irreduzible Darstellungen von $K \times K$
betrachte endlichdimensionale Darstellungen

$$\sigma : K \longrightarrow \mathrm{GL}(V), \quad \tau : K \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$$

mache hieraus Darstellung
$[\sigma, \tau]$ auf $\mathrm{Hom}(V, W)$

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong V \otimes W^* \cong V \otimes W$$

$$[\sigma, \tau](k)(A)(v) = \tau(k)((A\sigma^{-1}(k)v))$$

wenn $\sigma, \tau$ irreduzibel
dann $[\sigma, \tau]$ irreduzibel

So bekommt man alle von $K \times K$

Zerlegung von $L^2(K)$ unter $K \times K$

Jede irreduzible Darstellung der Form $[\sigma, \sigma]$
kommt in $L^2(K)$ vor und zwar genau einmal.
Sonst kommt keine vor

Der Raum $\mathcal{H}(n, s)$ kann identifiziert weden
mit dem Unterraum von $L^2(K)$
definiert durch

$$f(mk) = \zeta^{-n} f(k), \quad m = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

$K$ operiert durch

Translation von rechts

Zerlegung in irreduzible

Es genügt, die einzelnen

$\mathrm{Hom}(V_l, V_l)$, $m = 2l + 1$, zu betrachten

Es geht um den Unterraum aller

$$A : V_l \to V_l$$

mit

$$A(P(\zeta x_1 \zeta^{-1} x_2)) = \zeta^n A(P(x_1, x_2))$$

Nehme für $P$ Monomial

$$x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}, \quad \nu_1 + \nu_2 = m$$

Dann

$$A(\zeta^{\nu_1 - \nu_2} P) = \zeta^n A(P).$$

Im Falle $A(P) \neq 0$

$$\nu_1 - \nu_2 = n$$

Außerdem

$$\nu_1 + \nu_2 = m$$

höchste eine Lösung $(\nu_1, \nu_2)$

$$\nu_1 = \frac{m+n}{2}, \quad \nu_2 = \frac{m-n}{2}$$

beide nicht negativ

Lösunsbedingung

$$m \geq |n|, \quad m \equiv n \bmod 2$$

Wenn diese Bedingung erfüllt

ist $A$ durch die Einschränkung

auf eindimensionalen Raum

(erzeugt von $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$)

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, V_l) \cong V_l$$

Für die Zerlegung von $\mathcal{H}(n,s)$, $n$ ganz, $s$ rein imaginär, bezüglich $K = \mathrm{U}(2)$ gilt: Die irreduzible Darstellung $V_l$, $m = 2l+1$, tritt genau dann auf, falls $m \geq |n|$, $m \equiv n \bmod 2$. In diesem Falle tritt sie nur einmal auf.

Dies ist die sogenannte Hauptserie. Obige Aussage ist ein erster Schritt zum Beweis der Irreduzibilität. Der zweite Schritt geht über die derivierte Darstellung

**Multiplizitäten-Eins-Satz**

$\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(H)$ irreduzibel unitär

Einschränkung auf $K$

Man kann $H$ zerlegen in irreduzible unter $K$

Jede irreduzible kommt höchstens einmal vor

später besseres Resultat

wissen, in jeder Dimension $n$
bestitzt $\mathrm{SU}(2)$ genau eine irreduzible

Sei $n$ die kleinste Dimension
die in $\pi|K$ auftritt
dann treten auf genau $n$, $n+2$, $n+4\ldots$

(wie bei Hauptserie)

Beweis Multiplizitäten-Eins

benutzt Faltungsalgebra $\mathcal{C}_c(G)$

operiert of $H$

Ihr Bild in $\mathcal{B}(H)$ is dicht
bezüglich SOT
$A_n \to A \Longleftrightarrow \|A_n h - Ah\| \longrightarrow 0$

Sei $\sigma \in \hat{K}$

Konstruktion einer Unteralgebra

$$\mathcal{C}_c(G,\sigma) \subset \mathcal{C}_c(G)$$

welche auf Isotyp $H(\sigma)$ operiert

so dass Bild in $\mathrm{End}(H(\sigma)$
auch dicht (sogar ganz $\mathrm{End}(H(\sigma))$

Im Fall $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ war dies $S_{n,n}$
dort entscheidend $S_{n,n}$ abelsch

Konstruktion von $\mathcal{C}_c(G,\sigma)$

Verallgemeinerung der Faltung

assoziativ, z.B.

$$f * (\alpha * \beta) = (f * \alpha) * \beta$$

$$\mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}_c(G) \longrightarrow \mathcal{C}_c(G), \quad (\alpha * f)(x) = \int_K \alpha(k) f(k^{-1}x) dk,$$

$$\mathcal{C}_c(G) \times \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathcal{C}_c(G), \quad (f * \alpha)(x) = \int_K f(xk) \alpha(k^{-1}) dk.$$

Projektor $H \to H(\sigma)$
id auf $H(\sigma)$, null auf Komplement

kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\chi_\sigma(k) = \mathrm{tr}(\sigma(k))$$

$$e_\sigma = \dim H(\sigma) \chi_\sigma$$

Fakt
$\pi(e_\sigma)$ ist der Projektor von $H$ auf $H(\sigma)$

daraus folgt

$$\pi(e_\sigma * f * e_\sigma) : H(\sigma) \longrightarrow H(\sigma)$$

Charakterrelationen

$$e_\sigma * e_\sigma = e_\sigma, \quad e_\sigma * e_\tau = 0 \ (\sigma \neq \tau)$$

Die Unteralgebra

$$\mathcal{C}_{c,\sigma}(G) = \{e_\sigma * f * e_\sigma; \quad f \in \mathcal{C}_c(G)\}$$

von $\mathcal{C}_c(G)$ operiert
irreduzibel auf $H(\sigma)$
(ersetzt $S_{n,n}$)

Sei $n > 0$. Eine assoziative $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{A}$ besitzt viele endlich-dimensionale Darstellungen der Dimension $\leq n$, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$, $A \neq 0$, ein Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \to \mathrm{End}(H)$, $\dim(H) \leq n$ mit $\pi(A) \neq 0$ existiert

Beispiel: Unser $\mathcal{C}_{c,\sigma}(G)$ mit $n = \dim \sigma$

Hier hat man Hauptserie

**Kaplansky-Godement**

Sei $\mathcal{A}$ eine assoziative Algebra, welche viele endlich-dimensionale Darstellungen der Dimension $\leq n$ besitzt. Dann gilt für jeden Homomorphismus $\mathcal{A} \to B(H)$, $H$ ein Hilbertraum, mit SOT-dichten Bild, dass $H$ endlich dimensional und sogar $\dim H \leq n$ gilt

Donnerstag, 4.2.2021

**Nebenserie**

zunächst neues Modell für Hauptserie

$$m = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}, \; |\zeta| = 1, \quad p = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \; \alpha > 0$$

$$\mathcal{H}(s) = \left\{ \, f : G \longrightarrow \mathbb{C}; \quad f(px) = \alpha^{1+s} f(x) \, \right\}$$

$$\mathcal{H}^\infty(n,s) = \left\{ f \in \mathcal{H}^\infty(s); \quad f(mx) = \zeta^{-n} f(x) \right\}$$

beides zusammen

$$a = \zeta |a|, \quad \zeta = \frac{a}{|a|}$$

$$f\left( \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} g \right) = \left( \frac{a}{|a|} \right)^{-n} |a|^{2+s} f(g)$$

$$\text{betrachte } G_0 = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad d \neq 0 \right\}$$

$$s : G_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s(g) = z = \frac{c}{d}$$

$$g = h\, s(g); \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1} & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

Ordne einer Funktion $f$ auf $G$ eine Funktion $F$ auf $\mathbb{C}$ zu

$$F(z) = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

Operation von $G$ auf $f$

umschreiben von $G$ auf $F$

anwenden von $g$ auf $F(z)$

$$f\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} a & b \\ az + c & bz + d \end{pmatrix}$$

$$= \left( \frac{bz + d}{|bz + d|} \right)^{-n} |bz + d|^{-2-s} f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \frac{az + c}{bz + d}$$

Hierbei $z \mapsto w$ Möbiustransformationen

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

Transformierte Darstellung

betrachte Funktionen $F$ auf $\bar{\mathbb{C}}$

$$\boxed{(\pi_{n,s}F)(z) = \left(\frac{bz+d}{|bz+d|}\right)^{-n} |bz+d|^{-2-s} F\left(\frac{az+c}{bz+d}\right)}$$

Umrechnen des Skalarprodukts von $f$ auf $F$

kommt heraus das gewöhnliche Lebesgue-Maß auf $\mathbb{C}$

genauer: $F \in L^2(\mathbb{C}, dxdy)$

Wende $\pi_{n,s}$ an. Bildfunktion definiert

auf $\mathbb{C}$ ohne endlich viele Punkte

irgendwie ausgedehnt auf $\mathbb{C}$ wieder in $L^2(\mathbb{C})$

liegt wieder in $L^2(\mathbb{C})$

unitäre Darstellung

Nebenserie

nehme $n = 0$ und $s \in (-1, 1)$

nehme anstelle Skalarprodukt via Lebesguemaß

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(z)\overline{g(w)}}{|z-w|^{2-s}} dxdydudv$$

verschiedenes zu zeigen

Konvergenz für $f, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{C})$

hier geht $s \in (-1, 1)$ ein

verträglich mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$

hier geht $s$ reell ein

positive Definitheit (!!)

Ausblick, allgemeine Begriffe

$G$ halbeinfache Liegruppe

Eine unitäre Darstellung $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ heißt
quadratintegrierbar, falls alle Matrixkoeffizenten

$$\langle \pi(g)a, b \rangle, \quad (a, b \in H)$$

in $L^2(G, dg)$ sind

temperiert, falls alle Matrixkoeffizienten
in $L^{2+\varepsilon}(G, dg)$, $\forall \varepsilon > 0$

also quadratintegrierbar $\Longrightarrow$ temperiert

generelle Regel

quadratintegrierbar = diskrete Serie
(so definiert man diskrete Serie abstrakt)
Hauptserie ist temperiert
Nebenserie ist nicht temperiert

temperierte irreduzible unitäre Darstellungen
vollständig klassifiziert
Knapp Zuckerman
aufbauend auf Harish-Chandra

Plancherelformel

$G$ halbeinfache Liegruppe

$\hat{G}$: Isomorphieklassen irreduzibler unitärer Darstellungen

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

Fouriertransformierte $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(\pi) = \mathrm{tr}\pi(f) = \mathrm{tr} \int_G f(x)\pi(x)dx$$

Definition von tr ist Problem

Plancherelformel

Rekonstruktion von $f$ aus $\hat{f}$

Beispiel

Sie Gruppe $S^1$

$\hat{S}^1 = \mathbb{Z}$

Charaktere, $\zeta \mapsto \zeta^n$

betrachte anstelle $f(\zeta)$
die Funktion $F(x) = f(e^{\mathrm{i}x})$

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} F(x) e^{\mathrm{i}nx} dx$$

Fourierkoeffizienten

allgemeiner
dazu braucht man Topologie auf $\hat{G}$

und Maß auf $\hat{G}$

Plancherelmaß

Komplement der nicht temperierten
Darstellungen ist Nullmenge

Nebenserien hier uninteressant

$$\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(H) \text{ unitäre Darstellung}$$

$$\mathcal{H} \subset H \text{ algebraische Summe aller } K\text{-irreduziblen}$$

$$K \text{ operiert auf } \mathcal{H} \text{ (das ist klar)}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \text{ operiert of } \mathcal{H}$$

(wird sich bei Analyse zeigen)

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H}) \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linearer Liehomomorphismus}$$

$$\mathcal{H} \text{ ist ein } K\text{-}\mathfrak{g}\text{-Modul}$$

Ein $\mathfrak{g}$-$K$-Modul $\mathcal{H}$ ist ein komplexer Vektorraum $\mathcal{H}$ zusammen mit einem Homomorphismus

$$\pi : K \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$$

and einem Liehomomorphismus

$$d\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{H}),$$

so dass für $A \in \mathfrak{k}$

$$(d\pi)(A)h = \frac{d}{dt}\pi(e^{tA})h\Big|_{t=0}$$

gilt. Außerdem, sei $H(m)$ der Eigenraum

$$H(m) = \{h \in H; \quad \pi(k_\theta) = e^{\mathrm{i}m\theta}h\},$$

dann ist $\mathcal{H}$ die algebraische (direkte) Summe aller $H(m)$

zulässig bedeutet: alle $H(m)$ endlich dimensional

unitarisierbar bedeutet: Es existiert Hermitesches Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$, so dass alle $A \in \mathfrak{g}$ schiefsymmetrisch. $\langle Aa, b\rangle = -\langle a, Ab\rangle$

heißt irreduzibel

falls $\mathcal{A}(h) = \mathcal{H}$ für $h \in H(m)$, $h \neq 0$

$$\mathcal{A} \subset \mathrm{End}(\mathcal{H})$$

assoziative Algebra vom Bild von $\mathfrak{g}$ erzeugt

Eigenschaften des derivierten $\mathfrak{g}$-$K$-Modul

$\pi$ irreduzibel $\Longrightarrow d\pi$ zulässig, irreduzibel
das ist einfach, wie bei $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

derivierte Darstellung zulässig und irreduzibel
$\Longrightarrow \pi$ irreduzibel

$\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ irreduzibel unitär
Die Element von $H(m)$ müssen analytisch sein
d.h. $\pi(x)h$ muss analytisch sein

dazu muss man einen der beiden Casimir
explizit machen

Man kann zeigen
$\mathcal{H}$ irreduzibler $\mathfrak{g}$-$K$-Modul
dann Multiplizitäten Eins
$\mathcal{H}(m)$ sind 0 oder irreduzibel

wir brauchen das nicht zu zeigen
denn wir wissen Multiplizitäten Eins
falls $\mathfrak{g}$-$K$-Modul von $\pi$ kommt

also studiere zulässige
irreduzible $\mathfrak{g}$-$K$-Moduln
unitarisierbar
mit Mutiplizitäten 1

im Falle $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ auch nicht unitarisierbare bestimmt
dort auch Multiplizitäten 1 bewiesen

Dienstag, 9.2.2021

$$\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{U}(H)$$

irreduzible unitäre Darstellung
nicht trivial

bestimmt durch 3 Parameter $(l_0, \mu^\pm)$

$l_0$: $n_0 = 2l_0 + 1$ ist die kleinste Dimension einer
irreduziblen Darstellung von SU(2)
welche in $H$ auftritt

Erinnerung: SU(2) besitzt in jeder Dimension $n = 2l + 1$
genau eine irreduzible Darstellung

es gilt: In $\pi$ treten genau die
Darstellungen der Dimension $n_0, n_0 + 2, \ldots$ auf
und zwar mit Multiplizitäten 1

insbesondere unendlich dimensional

derivierte Darstellung

$$d\pi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$$

Es gibt 2 Casimiroperatoren $\Box^\pm$

welche auf $\mathcal{H}$ operieren

durch reellen Skalar

$$\Box_+ a = \mu^+ a, \quad \Box_- a = \mu^- a.$$

kleinstes $l_0$ aus $S$

$$(\mu^-)^2 = 32 l_0^2 (\mu^+ + 8l_0^2 - 8)$$

$$32(l_0+1)^2(\mu^+ + 8l_0^2 + 16l_0) - (\mu^-)^2 > 0.$$

Das sind einzige Beschränkungen

neuer Parameter $s$

$$s^2 = (\mu^+ + 8l_0^2 - 8)/8$$

2 Möglichkeiten

$s$ rein imaginär oder $s \in (-1,1)$

Haupt- und Nebenserie

Struktur von $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$
Komplexifizierung $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$
als reeller Vektorraum
komplexe Struktur $J(A, B) = (-B, A)$
Daneben trägt $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$
auch innere komplexe Struktur $\mathrm{i}(A, B) = (\mathrm{i}A, \mathrm{i}B)$

Die beiden komplexen Strukturen
führen zu isomorphen Lialgebren

Nochmals
$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ hat zwei komplexe Strukturen
innere: komponentenweise Multiplikation mit i
äußere (Komplexifizierung) $J(A, B) = (-B, A)$

Schreibe $A + JB = (A, B) \quad (= (A, 0) + J(B, 0))$

Ist $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$
$\mathbb{R}$-linearer Liehomomorphismus
in komplexe assoziative Algebra
so hat man 2 Casimir in $\mathcal{A}$

$$X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{W = 2X_2, \quad R^+ = 2(X_3 - JX_1), \quad R^- = 2(-X_3 - JX_1)}$$

$\mathbb{C}$-Basis von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ bezüglich $J$

$$\boxed{W, R^+, R^-, \ \mathrm{i}W, \mathrm{i}R^+, \mathrm{i}R^-}$$

$$\begin{array}{ccc}
[W, R^+] = 2JR^+ & [W, R^-] = -2JR^- & [R^+, R^-] = -4JW \\
[W', R'^+] = -2JR^+ & [W', R'^-] = 2JR^- & [R'^+, R'^-] = 4JW \\
[W, R'^+] = 2JR'^+ & [W, R'^-] = -2JR'^- & [W, W'] = 0 \\
[R^+, R'^+] = 0 & [R^+, R'^-] = -4JW' & [R^+, W'] = -2JR'^+ \\
[R^-, R'^+] = 4JW' & [R^-, R'^-] = 0 & [R^-, W'] = +2JR'^-
\end{array}$$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{l \in S} H(l), \quad n = 2l + 1$$

$H(l)$, irreduzibel $\dim H(l) = n$
Basis von $H(l)$

$$e_{l,-l}, e_{l,-l+1}, \dots, e_{l,l-1}, e_{ll}$$

$$H(l,m) = \mathbb{C}e_{lm}$$

$$We_{l,m} = 2\mathrm{i}me_{lm}, \quad R^+e_{lm} = e_{l,m+1}, \quad R^-e_{lm} = c_{l,m-1}e_{l,m-1}.$$

$$\begin{aligned} X_1e_{lm} &= \frac{\mathrm{i}}{4}(e_{l,m+1} + c_{l,m-1}e_{l,m-1}), \\ X_2e_{lm} &= \mathrm{i}me_{lm}, \\ X_3e_{lm} &= \frac{1}{4}(e_{l,m+1} - c_{l,m-1}e_{l,m-1}). \end{aligned}$$

$$c_{lm} = -8 \sum_{\substack{-l \leq \nu \leq m \\ \nu - l \in \mathbb{Z}}} \nu \qquad (\geq l).$$

fehlt die Wirkung von $W', R'^+, R'^-$

Casimiroperatoren explizit

$\mathbb{R}$-linearer Liehomomorphismus in $\mathbb{C}$-Algebra

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{A}$$

ausdehnen

$$\varphi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + J\mathfrak{g}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Box_+ =& \varphi(X_1)^2 + \varphi(X_2)^2 + \varphi(X_3)^2 - \varphi(\mathrm{i}X_1)^2 - \varphi(\mathrm{i}X_2)^2 - \varphi(\mathrm{i}X_3)^2 \\ \Box_- =& \varphi(X_1)\varphi(\mathrm{i}X_1) + \varphi(X_2)\varphi(\mathrm{i}X_2) + \varphi(X_3)\varphi(\mathrm{i}X_3) \end{aligned}}$$

$$R'^+ : H(l,l) \to H(l+1, l+1)$$

benutzte $H(l,l)$ im Kern von $R^+$
und benutze, dass $R'^+$ mit $R^+$ vertauscht
also $R'^+H(l,l) \subset \mathrm{Kern}R^+ = \sum H(\nu,\nu)$

$$[W, R'^+] = 2JR'^+$$

$$W(R'^+v) = 2\mathrm{i}(l+1)R'^+v, \quad v \in \mathcal{H}(l,l)$$

Zeige: $R'^+e_{ll} \neq 0,\ l \geq l_0,\ l \equiv l_0 \bmod 2$

Normierung $R'^+e_{ll} = e_{l+1,l+1}$

Jetzt alles festgelegt
Ausgehend von $e_{l_0,l_0}$
zu allen $H(l,m)$ turnen

Wie beweist man, dass
Elemente aus $H(l)$ analytisch
betrachte Funktion

$$f(x) = \pi(x)h$$

hat die Eigenschaft

$$f(xk) = \sigma_l(k)f(x)$$

Diese Funktion ist durch Einschränkung

$$x = \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ 0 & \sqrt{v}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v^{-1}z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k$$

$$F(z, v) = f(x)$$

$(z, v)$ aus hyperbolischem Raum
Wende auf $f$ den Casimir $\square^+$ an
das Resultat hat denselben $K$-Typ
Man kann dies als Operator auf dem
Raum der differenzierbaren Funktionen
auf dem 3-dimensionalen hyperbolischen Raum
ansehen

es scheint schwierig, den Casimir explizit auf
$G$ auszurechnen: 6 reelle Variable
Chance besser für den entsprechenden Operator $F \mapsto G$
3 reelle Variable $x, y, v$
man kann sich klar machen, dass es
sich um einen linearen Differentialoperator
der Ordnung $\leq 2$ handelt
durch direktes Rechnen gelingt es
diesen auszurechnen

$$v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + \text{Terme der Ordung } < 2$$

**Poincarégruppe**

(reelle) orthogonale Gruppe: $\mathrm{O}(n,1)$, $n>1$

$$A'JA = J, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_{n+1}y_{n+1}$$

$$\langle x, x\rangle = -x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2$$

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

$$\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle$$

$$\mathrm{SO}(n,1), \quad \mathrm{O}^+(n,1), \quad \mathrm{SO}^+(n,1)$$

$\mathrm{SO}^+(n,1)$ eigentliche orthochrone Gruppe

$$\mathcal{S}: \ S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$$

$$S \longmapsto \Big(\frac{s_0+s_2}{\sqrt{2}}, \frac{s_0-s_2}{\sqrt{2}}, s_1\Big)$$

$$= (x_1, x_2, x_3)$$

$$\det S = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ operiert auf $\mathcal{X} = \mathbb{R}^3$

$$ASA'$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}^+(2,1)$$

zweiblättrige Überlagerung

$$\mathrm{Spin}(2,1) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$$

zusammenhängend offen und abgeschlosssen in $\mathrm{O}(n,1)$

$$\mathrm{O}(n,1) =$$

$$\mathrm{SO}^+(n,1) \,\cup\, \mathrm{SO}^+(n,1)J \,\cup\, \mathrm{SO}^+(n,1)(-E) \,\cup\, \mathrm{SO}^+(n,1)(-J).$$

ähnliches Spiel

$$\mathcal{H}: \ H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ \bar{h}_1 & h_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}^4$$

$$H \longmapsto \Big(\frac{h_0 + h_2}{\sqrt{2}}, \frac{h_0 - h_2}{\sqrt{2}}, \operatorname{Re} h_1, \operatorname{Im} h_1\Big)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\det H = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ operiert auf $\mathcal{H}$

$$AH\bar{A}'$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}^+(3,1)$$

zweiblättrige Überlagerung

$$\mathrm{Spin}(3,1) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

kompakte Gruppen

$$\mathrm{O}(n)$$

$\mathrm{SO}(n)$ ist schon zusammenhängend

daher $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$

betrachte $SO(3) \to \mathrm{SO}(3,1)$

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Bild in $\mathrm{SO}^+(3,1)$

Betrachte Urbild von $\mathrm{SO}(3)$

in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(3,1)$

dies ist $\mathrm{SU}(2)$

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

zweiblättrige Überlagerung

$$\mathrm{Spin}(3) := \mathrm{SU}(2)$$

Was ist $\mathrm{Spin}(2)$

muss eine zweiblättrige Überlagerung sein

es gibt nur eine

$$S^1 \longrightarrow S^1, \quad \zeta \longmapsto \zeta^2$$

$\mathrm{Spin}(2) = S^1$ zusammen mit $\zeta \mapsto \zeta^2$

Donnerstag, 11.2.2021

Darstellungen einiger orthogonaler Gruppen

Wir kennen irreduzible unitäre von
$\mathrm{SU}(2), \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

damit bekommen wir die von

$$\mathrm{SO}(3),\ \mathrm{SO}^+(2,1),\ \mathrm{SO}^+(3,1)$$

nach folgendem Prinzip

$f : S \to G$, zweiblättrig
surjektiver lokal topologischer Gruppenhomomorphismus

Sei $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ irreduzibel unitär

dann ist $\pi \circ f$ irreduzibel unitär von $S$

umgekehrt

Eine unitäre irreduzible Darstellung von $S$
kommt genau dann von $G$, falls

$$\pi(g_1) = \pi(g_2) \text{ falls } f(g_1) = f(g_2)$$

(bei uns immer $g_1 = \pm g_2$)
Spezialfall

$$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$$

hier ist es so, dass sich zwei Urbilder
nur um das Vorzeichen unterscheiden können

Die irreduziblen unitären von $\mathrm{SO}(3)$
entsprechen genau den von $\mathrm{SU}(2)$
mit $\pi(g) = \pi(-g)$

| |
|---|
| Die irreduziblen unitären Darstellungen von SO(3) sind endlich dimensional. In jeder ungeraden Dimension gibt es bis auf Isomorphie genau eine. In gerader Dimension gibt es keine |

ähnlich

$$\mathrm{SO}^+(2,1), \quad \mathrm{SO}^+(3,1)$$

extra Überlegungen: $\mathrm{SO}(2,1)$, $\mathrm{SO}(3,1)$, $\mathrm{O}(2,1)\dots$

inhomogene Lorentzgruppe

alle Abbildungen

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$x \longmapsto gx + a,\ g \in \mathrm{O}(3,1),\ a \in \mathbb{R}^4$$

als topologischer Raum

$$\mathrm{O}(3,1) \times \mathbb{R}^4$$

Gruppenstruktur

$$(g,a)(h,b) = (gh, a + gb)$$

schreibe $\mathrm{O}(3,1)\mathbb{R}^4$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ operiert of $\mathbb{R}^4$

via

$$\varphi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}^+(3,1)$$

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ operiert of $\mathbb{R}^4$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$ga := \varphi(g)a$$

Poincarégruppe

$$P(3) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4$$

Gruppenstruktur

$$(g,a)(h,b) = (gh, a + gb)$$

schreibe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\mathbb{R}^4$

Problem: Klassifikation der irreduiblen unitären Darstellungen der Poincarégruppe

werden gewonnen durch Induktion, ausgehend von den 4 kleinen Untergruppen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

**Induzierte Darstellungen**

$G$ lokal kompakte Gruppe
$P$ abgeschlossene Untergruppe

unitäre Darstellung $\sigma : P \to \mathrm{U}(H)$

Prozess der Induktion

$$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma) = \{f : G \to H; \quad f(px) = \sigma(p)f(x)\}$$

$G$ operiert durch Translation von rechts

Häufig kein invariantes Mass auf $P\backslash G$

Ausweg: Man braucht
Verallgemeinerung des Quotientemaßes
Erinnerung
$(G, dx)$, $(P, dp)$ beide unimodular. Es existiert
invariantes Mass $d\bar{x}$ auf $P\backslash G$

$$\int_G f(x)dx = \int_{P\backslash G} \left[\int_P f(px)dp\right] d\bar{x}$$

Verallgemeinerung braucht

$$\boxed{\begin{array}{c} \rho : G \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ \text{stetig} \\ \rho(px) = \dfrac{\Delta_P(p)}{\Delta_G(p)}\rho(x) \end{array}}$$

Man bekommt

$$\int_G f(x)\rho(x)d_l x = \int_{P\backslash G} \left[\int_P f(px)d_r p\right] d\bar{x}$$

$dx_l$ linksinvariant auf $G$
$dp_r$ rechtsinvariant auf $P$
$d\bar{x}$ Radonmaß auf $P\backslash G$

woher bekommt man $\rho$?
einfaches Beispiel

$P, K \subset G$ abgeschlossene Untergruppen

$$P \times K \xrightarrow{\sim} G, \quad (p, k) \longmapsto pk,$$

Dann funktioniert

$$\rho(pk) = \frac{\Delta_P(p)}{\Delta_G(p)}$$

(das genügte für paraboilische Induktion)

Allgemeiner

man kann zeigen, dass $\rho$ immer existiert

s. Folland, abstract harmonic analysis, Lemma 2.54

etwas einfacher

$\rho$ meßbar, $\rho$ und $\rho^{-1}$ lokal beschränkt

und

$P, G$ Liegruppen

$P \subset G$ abgeschlossene Untergruppe und $\rho$ wie oben. Sei $dx$ entsprechendes Maß auf $P\backslash G$. $\sigma : P \to \mathrm{U}(H)$ unitäre Darstellung. Betrachte Raum $\mathcal{H}(\sigma)$ aller messbaren Funktionen $f : G \to H$ mit der Eigenschaft $f(px) = \sigma(p)f(x)$ und so, dass $\|f(x)\|_\sigma^2$ auf $P\backslash G$ integrierbar. Hermitesche Form

$$\langle f, g \rangle = \int_{P\backslash G} \langle f(x), g(x) \rangle_\sigma dx.$$

Ausdividieren von Nullraum gibt Hilbertraum $H(\sigma)$. $G$ operiert auf $H(\sigma)$ via modifizierte Translation von rechts.

$$(R_g f)(x) = f(xg)\sqrt{\frac{\rho(x)}{\rho(xg)}}.$$

Dies ist unitäre Darstellung, (die von $\sigma$ induzierte unitäre Darstellung). Sie ist unabhängig von Wahl von $\rho$ bis auf unitäre Isomorphie.

**“Little groups”**

Wenn eine Gruppe $G$
auf einer Menge $X$ operiert
so entsteht die Frage nach den Orbiten
$x \sim y \Longleftrightarrow \exists g$ mit $y = g(x)$
und nach den Stabilisatoren

$$G_x = \{g \in G;\ g(x) = x\}$$

(für ein Vertretersytem der Orbiten genügt)

$\mathrm{O}(3)$, $\mathbb{R}^3$

Vektoren einer festen Länge bilden einen Orbit
$r = 0$, Orbit $\{0\}$, Stabilisator ganz $\mathrm{O}(3)$
$r > 0$, Sphäre vom Radius $r$
Stabilisator eines Vertreters $\cong \mathrm{O}(2)$

$\mathrm{O}(3,1)$, $\mathbb{R}^4$

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $(0,0,0,0)$ | $\mathrm{O}(3,1)$ |
| 2) | $(0,m,0,0),\ m > 0$ | $\mathrm{O}(2,1)$ |
| 3) | $(m,0,0,0),\ m > 0$ | $\mathrm{O}(3)$ |
| 4) | $(1,1,0,0)$ | $E(2)$ |

$\mathrm{SO}(3,1)$, $\mathbb{R}^4$

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $(0,0,0,0)$ | $\mathrm{SO}(3,1)$ |
| 2) | $(0,m,0,0),\ m > 0$ | $\mathrm{SO}(2,1)$ |
| 3) | $(m,0,0,0),\ m > 0$ | $\mathrm{SO}(3)$ |
| 4) | $(1,1,0,0)$ | $SE(2)$ |

$$\mathrm{E}(2) = \mathrm{O}(2)\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathrm{O}(3,1)$$

$$\mathrm{SE}(2) = \mathrm{SO}(2)\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathrm{SO}^+(3,1)$$

$\mathrm{Iso}(2)$ ist Urbild von $\mathrm{SE}(2)$ in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

$$\mathrm{Iso}(2) \longrightarrow \mathrm{SE}(2)$$

$$\mathrm{Iso}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & z \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix};\quad \zeta \in S^1,\ z \in \mathbb{C} \right\}$$

Dienstag 16.2.2021

Irreduzible unitäre Darstellungen der Poincarégruppe

$$P(3) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\mathbb{R}^4$$
$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \text{ operiert auf } \mathbb{R}^4$$
$$\text{via } \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}^+(3,1)$$
$$\text{Gruppengesetz: } (g,a)(h,b) = (gh, a+gb)$$

bekommt man nach Wigner, Mackey folgendermaßen

Vertretersystem $\alpha$ der 6 Typen von Orbiten

$$\alpha^2 := \langle \alpha, \alpha \rangle = -\alpha_1^2 + \alpha_2^3 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2$$

$$\begin{array}{llll}
\alpha = 0 & 1) & (0,0,0,0) & \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \\
\alpha^2 > 0 & 2) & (0,m,0,0),\ m>0 & \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \\
\alpha^2 > 0 & 3) & (0,m,0,0),\ m<0 & \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \\
\alpha^2 < 0 & 4) & (m,0,0,0),\ m>0 & \mathrm{SU}(2) \\
\alpha^2 = 0 & 5) & (1,1,0,0) & \mathrm{Iso}(2) \\
\alpha^2 = 0 & 6) & -(1,1,0,0) & \mathrm{Iso}(2)
\end{array}$$

$$\mathrm{Iso}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & z \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix};\quad \zeta \in S^1,\ z \in \mathbb{C} \right\}$$

Berechnung der Stabilisatoren

$$\text{im Modell } \mathcal{H}:\ H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ \bar{h}_1 & h_2 \end{pmatrix}$$

quadratische Form: $-\det H$, Operation $AH\bar{A}'$

$$\text{Vektor } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder Vielfaches}$$

(entspricht 2) oder 3)

Stabilisator ist isomomorph zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

eingebettet in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} a & \mathrm{i}b \\ -\mathrm{i}c & d \end{pmatrix} \quad a,b,c,d \text{ reell, } ad-bc=1$$

$$\begin{pmatrix} a & \mathrm{i}b \\ -\mathrm{i}c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \mathrm{i}c \\ -\mathrm{i}b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & \mathrm{i}b \\ -\mathrm{i}c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}b & d \\ a & \mathrm{i}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder Vielfaches

(entspricht 4)

Stabilisator ist gleich SU(2)

Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entspricht 5) oder 6)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|a|^2 = 1, \quad a\bar{c} = 0 \Longrightarrow c = 0$$

ergibt Iso(2)

Iso(2) is verwandt mit $\mathrm{SE}(2) = \mathrm{SO}(2)\mathbb{R}^2$

$\mathrm{SE}(n) := \mathrm{SO}(n)\mathbb{R}^n$ Euklidsche Variante der Poincarégruppe

$$(g, a)(h, b) = (gh, a + gb)$$

$\mathrm{Iso}(2) \longrightarrow \mathrm{SE}(2)$ (2-blättrige Überlagerung)

$$\begin{pmatrix} \zeta & z \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^2 \cdot (x, y)$$

**Irreduzible unitäre Darstellungen der Poincarégruppe**

Nehme einen der Repräsentanten $\alpha \in \mathbb{R}^4$
und betrachte die zugehörige kleine Gruppe $L \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$
bilde die Gruppe $L\mathbb{R}^4 \subset P(3)$
wähle eine irreduzible unitäre Darstellung $\sigma : L \to \mathrm{U}(H)$
dehne sie aus zu einer unitären Darstellung von $L\mathbb{R}^4$

$$\ell \cdot a \longmapsto [h \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a,\alpha\rangle}\sigma(\ell)h]$$

beachte

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow S^1, \quad a \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a,\alpha\rangle}$$

ist ein unitärer Charakter

benutze, dass $L$ den Vektor $\alpha$ stabilsiert

Induziere diese Darstellung auf $P(3)$

Man erhält eine irreduzible unitäre Darstellung der Poincarégruppe

Jede ist zu einer solchen unitär isomorph

Der Orbit ist festgelegt

Die unitäre Darstellung $\sigma$ ist auch festgelegt

es fehlen noch irreduzible unitäre Darstellungen von Iso(2)

erhält man nach demselben Muster

## Mackeytheorie

(benutzt keine Liealgebren)

schon interessant für endliche Gruppen

Donnerstag, 18.2.2021

**Pseudomaße**

$X$ lokal kompakt

Pseudomaß: stetiges $\mathbb{C}$-lineares Funktional

$$S : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Stetigkeit bedeutet

Sei $f_n \in \mathcal{C}_c(X)$ eine Folge. Es existiere ein Kompaktum, so dass alle $f_n$ außerhalb diesem Kompaktum verschwinden. Die Folge konvergiere gleichmäßig gegen $f$. Dann gilt

$$S(f_n) \to S(f)$$

Radonmaße haben diese Eigenschaft
sind also spezielle Pseudomaße

Topologie auf $\mathcal{C}_c(X)$, welche
diese Konvergenz induziert

Sei $K \subset X$ kompakt

$\mathcal{C}_K(X)$ alle stetigen Funktionen auf $X$
welche außerhalb $K$ verschwinden

$$\mathcal{C}_c(X) = \bigcup \mathcal{C}_K(X)$$

$\mathcal{C}_K(X)$ trägt Topologie dank Maximumnorm

gröbste Topologie auf $\mathcal{C}_c(X)$
so dass alle $\mathcal{C}_K(X) \hookrightarrow \mathcal{C}_c(X)$ stetig

Beispiel eines Pseudomaßes

$(X, dx)$ Radonmaß, $h : X \to \mathbb{C}$ stetig

$$S(f) = \int_X f(x)h(x)dx$$

Injektion von Pseudomaßen

$Y \subset X$ abgeschlossen

$S$ Pseudomaß auf $Y$

definiere Pseudomaß $T$ auf $X$

$$T(f) = S(f|Y)$$

gelegentliche Schreibweise

$$\int_X f(x) dS(x) := S(f)$$

dann Injektion wie folgt

$$\int_X f(x) dT(x) := \int_Y f(y) dS(y).$$

$*$-Strukuren auf $\mathcal{C}_c(X)$

Man hat immer die kommutative $*$-Algebra

$$f * g := fg \quad \text{und } f^*(x) = \overline{f(x)}$$

Ist $G$ eine lokal kompakte Gruppe
so hat man die Faltungsalgebra $\mathcal{C}_c(G)$

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(y) f_2(y^{-1}x) dy$$
$$f^*(x) = \Delta(x^{-1}) \overline{f(x^{-1})}$$

beide Strukturen sind wichtig

man kann beide mischen

$G$ lokal kompakte Gruppe, $X$ lokal kompakter Raum

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto gx,$$

stetig, Operation von links. (z.B. $X = G/L$).
$\mathcal{C}_c(X \times G)$ wird $*$-Algebra

$$(f_1 * f_2)(x, g) = \int_G f_1(x, y) f_2(y^{-1}x, y^{-1}g) dy,$$
$$f^*(x, g) = \overline{f(g^{-1}x, g^{-1})} \Delta_G(g^{-1})$$

$X$ lokal kompakter Raum

$\mathcal{C}_c(X)$ versehen mit Struktur als $*$-Algebra

Pseudomaß $S$ auf $(X, *)$ ist von
**positivem Typ** falls

$$S(f * f^*) \text{ reell und } \geq 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{C}_c(X)$$

Pseudomaße von positivem Typ und Darstellungen

$G$ lokal kompakte Gruppe

$\mathcal{C}_c(G)$ Faltungsalgebra

$S$ Pseudomaß auf $(G, *)$ von positivem Typ

Hermitesche Paarung auf $\mathcal{C}_c(G)$

$$\langle f, g \rangle = S(g^* * f)$$

semipositiv

faktorisiert über

$$H(S) = \mathcal{C}_c(G)/\text{nullspace}$$

ausdehnen auf Komplettierung $H = \overline{H(S)}$

gibt unitäre Darstellung $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$
(Translation von rechts auf $\mathcal{C}_c(G)$)

diese Konstruktion ist gut, z.B.

$L \subset G$ abgeschlossene Untergruppe

$S$ Pseudomaß von positivem Typ auf $L$
(bezüglich Faltungsalgebra)

$T$ kanonische Injektion
von $\sqrt{\Delta_G/\Delta_L}S$ in $G$

$T$ ist von positivem Typ auf $G$

Assoziierte Darstellung zu $S$ und $T$
isomorph zu $\mathrm{Ind}_L^G(\sigma)$

**Imprimitivität**

$\mathcal{A}$ assoziative Algebra

Homomorphism $\mathcal{A} \to B(H)$

heißt **nicht degeneriert**

$$A(h) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \Longrightarrow h = 0.$$

$X$ lokal kompakt

$\mathcal{A}$ $*$-Algebra

Homomorphismus $\mathcal{A} \longrightarrow B(H)$
heißt **regulär**

falls nicht degeneriert
und $*$-Homomorphismus

**Imprimitivitätssystem** nach Mackey

ist ein Tripel $(\pi, X, S)$, $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$, bestehend aus
1) unitäre Darstellung $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$
2) stetige Operation von links

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto gx,$$

auf lokal kompaktem Raum $X$
3) regulärer Homomorphismus $S : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow B(H)$ mit

$$\pi(g)S(f)\pi(g)^{-1} = S(R_g f)$$

Hierbei $*$-Struktur von $\mathcal{C}_c(X)$ punktweise Multiplikation und $f^*(x) = \overline{f(x)}$

Imprimitivitätssystem heißt trivial
falls $X$ ein Punkt

Jede unitäre Darstellung $G \to \mathrm{U}(H)$
eindeutig zu trivialem Imprimivitätssystem ausdehnbar

Imprimivitätssystem sind
Verallgemeinerungen von Darstellungen

Erinnerung: Darstellungen $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$
kann man ausdehnen zu $\mathcal{C}_c(G) \to B(H)$

$$T : \mathcal{C}_c(G) \longrightarrow B(H)$$

jetzt

$$T(f) = \int_G f(x)\pi(x)dx$$

Ähnlich kann man ein Imprimitivitätssystem
$(\pi : G \to \mathrm{U}(H), X, S)$ ausdehnen zu
regulären Abbildung

$$T : \mathcal{C}_c(X \times G) \longrightarrow B(H)$$

wie folgt
Sei $f(x, g) \in \mathcal{C}_c(X, G)$
Wende $S$ and bei festem $g$, also $F(g) = Sf(\cdot, g)$
bilde $Tf = \int_G F(g)\pi(g)dg$

Erinnerung: Pseuomaß $S$ von positivem Typ auf $\mathcal{C}_c(G)$
induziert unitäre Darstellung von $G$

allgemeiner: Pseudomaß $T$ von positivem Typ auf $\mathcal{C}_c(X \times G)$
induziert Imprimivitätssystem

Konstruktion

$$\langle f, g\rangle = T(g^* * f)$$

Hermitesch und semipositiv auf $\mathcal{C}_c(X \times G)$
Nullraum ausdividieren und Komplettieren
liefert unitäre Darstellung $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$

$$\pi(g)f(x, h) = f(g^{-1}x, g^{-1})h$$

fehlt noch $S : \mathcal{C}_c(X) \to B(H)$

$$S(\varphi)f(x, g) = \varphi(x)f(x, g)$$

ist Operator auf $\mathcal{C}_c(X \times G)$
drückt durch auf $H$

Zuordnung Imprimivitätssystem zu Pseudomaße

$(\pi, X, S)$, $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ Imprimivitätssystem, $h \in H$
$T : \mathcal{C}_c(X \times G) \to B(H)$ assoziierter regulärer Homomorphismus.
dann erhält man Pseudomaß von positivem Typ auf $\mathcal{C}_c(X \times G)$

$$S(f) = \langle T(f)h, h\rangle$$

Imprimivitätssystem heißt
**transitiv**

d.h.: zu $a, b \in X$
$\exists\ g \in G$ mit $ga = b$

dann gilt für $a \in X$

$$G/G_a \xrightarrow{\sim} X, \quad g \longmapsto g(a)$$

topologisch nach
Helgason, differential geometry and homogenous space
Chap.II, Sect 3, Theorem 3.2

Buch enthält auch Klassifikation halbeinfacher
Liealgebren sogar über $\mathbb{R}$

alle $G_a$ konjugiert

Imprimivitätssysten heißt
**zyklisch**

falls $h \in H$ existiert
so dass jeder abgeschlossene Unterraum $W \subset H$
der $h$ enthält und unter $G$ und $S$ invariant ist
mit $H$ übereinstimmt

(ist $\pi$ irreduzibel, so ist jeder Vektor $\neq 0$ zyklisch

**Imprimitivitätstheorem (Mackey)**

$(\pi, X, S)$, $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ transitives and zyklisches Imprimivitätssystem. Wähle $a \in X$ und setze $L = G_a$. Dann existiert unitäre Darstellung $\sigma$ von $L$, so dass $\pi$ unitär isomorph zu $\mathrm{Ind}_L^G(\sigma)$. $\sigma$ ist eindeutig bis auf unitären Isomorphismus

„transitiv“ ist fundamental wichtig
„zyklisch“ ist überflüssig
denn jedes Imprimivitätssystem ist
direkte Hilbertraumsumme zyklischer

Beweis des Imprimitivitätssatzes

$h \in H$ zyklisch: betrachte assoziiertes Pseudomaß

$$S : \mathcal{C}_c(X \times G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

betrachte folgende Abbildung $\mathcal{C}_c(G \times G) \to \mathcal{C}_c(X \times G)$

$$F \in \mathcal{C}_c(X, G)$$

$$f(g, h) = \int_L F(h^{-1}g\ell, g\ell)\Delta_G(g\ell)^{-1} d\ell$$

Diese Funktion ist invariant unter

$$g \mapsto g\ell \text{ für } \ell \in L$$

Wir erhalten (stetige) Abbildung

$$\mathcal{C}_c(G \times G) \longrightarrow \mathcal{C}_c(X \times G)$$

Zurückziehen von $S$ gibt Pseudomaß

$$T : \mathcal{C}(G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$$

benutzen $T$ um Paarung auf $\mathcal{C}_c(G)$ zu definieren

$$\langle f, g \rangle = T((x, y) \mapsto f(x)\overline{g(y)})$$

ist Hermitesch und semipositiv (!!!)
Ausdividieren von Nullraum und Komplettieren
liefert Hilbertaum $H_S$
Die Gruppe $L$ operiert auf $\mathcal{C}_c(G)$
(modifizierte Translation von rechts)

$$(\sigma(\ell)f)x = \sqrt{\frac{\Delta_L(\ell)}{\Delta_G(\ell)}} f(x\ell).$$

Dies definiert unitäre Darstellung von $L$ auf $H_S$

Dienstag, 23.2.2021

**Imprimitivitätssystem** nach Mackey

ist ein Tripel $(\pi, X, S)$, $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$, bestehend aus

1) unitäre Darstellung $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$
2) stetige Operation von links

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \longmapsto gx,$$

auf lokal kompaktem Raum $X$

3) regulärer Homomorphismus $S : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow B(H)$ mit

$$\pi(g)S(f)\pi(g)^{-1} = S(R_g f)$$

Hierbei $*$-Struktur von $\mathcal{C}_c(X)$ punktweise Multiplikation und $f^*(x) = \overline{f(x)}$

Eine Darstellung $\pi$ heißt imprimitiv, falls sie
Teil eines nicht trivialen ($\#X \geq 2$)
Imprimivitätssystems ist

Sei $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ eine induzierte Darstellung
von $L \subset G$
dann ist $\pi$ Teil eines Imprimitivitässystems
zu $X = G/L$

dieses ist sogar transitiv
($G \times X \to X$ transitiv)
isomorph zu $X = G/L$
$L$ abgeschlossene echte Untergruppe

Imprimivitätssystem heißt zyklisch

falls $h \in H$ existiert
so dass jeder abgeschlossene Unterraum $W \subset H$
der $h$ enthält und unter $G$ und $S$ invariant ist
mit $H$ übereinstimmt

erfüllt, falls $\pi$ irreduzibel

harmlos
(ist $\pi$ irreduzibel, so ist jeder Vektor $\neq 0$ zyklisch

**Imprimitivitätstheorem (Mackey)**

> $(\pi, X, S)$, $\pi : G \to \mathrm{U}(H)$ transitives and zyklisches Imprimivitätssystem. Wähle $a \in X$ und setze $L = G_a$. Dann existiert unitäre Darstellung $\sigma$ von $L$, so dass $\pi$ unitär isomorph zu $\mathrm{Ind}_L^G(\sigma)$. $\sigma$ ist eindeutig bis auf unitären Isomorphismus

beachte: Ein *transitives* Imprimivitätssystem
produziert eine „kleine" Gruppe $L$

**Satz von Stones**

$$U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{U}(H) \quad \text{unitäre Darstellung}$$

wurde (im Falle $n = 1$) im Seminar behandelt

Es gibt ein Radonmaß $(X, dx)$
und eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$
und einen Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} L^2(X, dx)$
so dass $U(a)$ der Multiplikation
mit $e^{\mathrm{i}\langle a, f(x)\rangle}$ entspricht

dazu braucht man $\langle \cdot, \cdot \rangle$
wenn keins gegeben, dann

Variante
betrachte $\widehat{\mathbb{R}^n}$
unitäre Charaktere $\mathbb{R}^n \to S^1$
$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{R}^n}, \quad a \longmapsto [x \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a, x\rangle}]$
Man erhält Topologie auf $\widehat{\mathbb{R}^n}$

Es gibt ein Radonmaßs $(X, dx)$
und eine stetige Funktion $f : X \to \widehat{\mathbb{R}^n}$
und einen Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} L^2(X, dx)$
so dass $U(a)$ der Multiplikation
mit $f(x)(a)$ entspricht

Eine Teilmenge eines toplogischen Raumes
heißt Borelsch, falls sie
durch abzählbare Vereinigung, Durchschnitte
aus offenen Mengen erzeugt werden kann

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen
heißt Borelsch
falls Urbild von Borelmengen Borelsch ist

Nützlichkeit beruht auf
Sei $(X, dx)$ Radonmaß
Borelmengen und Borelfunktionen sind messbar

$\mathcal{B}_b(X)$ beschränkte Borelfunktionen $\varphi : X \to \mathbb{C}$

$U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{U}(H)$ unitäre Darstellung
$(X, dx)$ und $f : X \to \widehat{\mathbb{R}^n}$
wie in Satz von Stones

Sei $\varphi \in \mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n})$
bilde $\varphi \circ f : X \to \mathbb{C}$
ist beschränkt und messbar (sogar Borel)
betrachte Multiplikationsoperator zu $\varphi \circ f$
übertragen von $L^2(X, dx)$ auf $H$

das ergibt

$$\mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$$

ist nur von $U$, nicht von Wahl $(X, dx, f)$, abhängig
Stetigkeitseigenschaft
$f_n \to f$ punktweise konvergent, gemeinsam beschränkt
ist regulär, Sternstrukur gewöhnliche Multiplikation

2 wichtige Spezialfälle
$\mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$
(könnte man operatorwertiges Pseudomaß nennen)

In $\mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n})$ sind
charakteristische Funktionen von Borelmengen $A$
Ihr Bild in $B(H)$ werden mit $P(A)$ bezeichnet
es sind Projektoren

Erinnerung: $E \subset H$ abgeschlossener Teilraum

zugehöriger Projektor: $P \in \mathcal{B}(H)$

id auf $E$ und 0 auf orthogonalem Komplement

$P \in B(H)$ Projektor $\Longleftrightarrow$

$P^2 = P$ und $P$ selbstadungiert

projektorwertiges Maß auf $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ist Abbildung $P$ ausgehend von der Menge aller Borelmengen $E \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$ in die Menge $B(H)$ ($H$ ein Hilbertraum) mit

1) $P(\mathcal{B})$ ist ein Projektor
2) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\mathbb{R}^n) = \mathrm{id}.$
3) $P(E \cap F) = P(E)P(F).$
4) Sind $E_1, E_2, \ldots$ paarweise disjunkt, so gilt

$$P(\cup E_i) = \sum P(E_i) \quad \text{(punktweise SOT)}$$

weitere Eigenschaften

$$P(A) = \mathrm{id},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(B) = 0$$

$$\text{denn } 0 = P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(B)$$

$$P(E_i) = 0 \Longrightarrow P(\bigcup E_i) = 0$$

$$P(E_i) = \mathrm{id} \Longrightarrow P(\bigcap E_i) = \mathrm{id}$$

also: Jeder unitären Darstellung von $\mathbb{R}^n$

ist projektorwertiges Maß zugeordnet

andere Zugänge zur Spekraltheorie
fangen so an

Träger eines projektorwertigen Maßes

Eine lokal abgeschlossene Teilmenge $A \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$
(d.h: $A$ ist offen in seinem Abschluss)

insbesondere lokal kompakt

$A$ liegt im Träger von $P$

falls $P(A) = \mathrm{id}$

Beispiel: Poincarégruppe
Der Orbit, welcher $(1, 1, 0, 0)$ enthält

besteht aus allen $a \neq 0$, $\langle a, a \rangle = 0$

$A$ lokal abgeschlossen heißt

Dann gilt $P(B) = 0$ für $B$ Borelsch, $A \cap B = \emptyset$

Dann gilt auch

$S(f) = 0, \quad f \in \mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n})$, $f = 0$ auf $A$

Approximation durch Treppenfunktionen

$\mathbb{R}^n \to \mathrm{U}(H)$ unitäre Darstellung

$P$ assoziiertes projektorwertiges Maß

$A \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$ lokal abgeschlossene Teilmenge

projektorwertiges Maß $P$ habe Träger in $A$

$\mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow \mathcal{C}_c(\bar{A}) \quad$ surjektiv

Es existiert eindeutig

$$\mathcal{C}_c(\bar{A}) \to \mathrm{U}(H)$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) & \to & \mathrm{U}(H) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}_c(\bar{A}) & & \end{array}$$

kommutativ
danach benutze man

$$\mathcal{C}_c(A) \hookrightarrow \mathcal{C}_c(\bar{A})$$

(fortsetzen durch 0)
$\mathcal{C}_c(A) \longrightarrow B(H)$

**Mackey's Theorem**

$M$ lokal kompakte Gruppe

$$M \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{stetiger Homomorphismus}$$

oder

$$M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (m, a) \longmapsto ma,$$

analog zu Poincarégruppe Gruppenstruktur

$$(m, a)(n, b) = (mn, a + nb).$$

$$G = M\mathbb{R}^n$$

$M$ operiert auch auf $\widehat{\mathbb{R}^n}$

$$m(\chi)(x) = \chi(mx)$$

Sei $\chi \in \widehat{\mathbb{R}^n}$

$$L = M_\chi = \{m \in M;\ \chi(mx) = \chi(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

heißt kleine Gruppe in bezug auf die
Operation von $M$ auf $\mathbb{R}^n$

$L$ hängt nur von Konjugationsklasse von $\chi$ ab

**Bedingung für Mackeys theorem**

1) Es existiert abgeschlossene Teilmenge von $\widehat{\mathbb{R}^n}$
welche jeden Orbit genau einmal trifft

2) Die Orbiten sind lokal abgeschlossen

Beispiel: Poincarégruppe
Der Orbit, welcher $(1, 1, 0, 0)$ enthält
besteht aus allen $a \neq 0$, $\langle a, a \rangle = 0$

$A$ lokal abgeschlossen heißt
$A$ ist in seinem Abschluss $\bar{A}$ offen
insbesondere lokal kompakt

2) ist überflüssig aber bequem und bei uns erfüllt

1) kann stark abgeschwächt werden

Einzelheiten: Originalarbeiten Mackeys $\sim 1950$

Induced representations of locally compact groups I,II
Annals of Math. 1952, 1953

$G = M\mathbb{R}^n$, $\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(H)$ irreduzibel unitär

Einschränken auf $\mathbb{R}^n$ $(\hookrightarrow G,\ a \longmapsto ea)$

wende Satz von Stones an

$$\mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$$

$$\pi(g)S(f)\pi(g)^{-1} = S(R_g f)$$

insbesondere

$$S : \mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$$

projektorwertiges Maß $P$

$P$(Borelmenge)=Projektor in $H$

$$\pi(g)B(\mathcal{B})\pi(g)^{-1} = P(g\mathcal{B})$$

das projektorwertige Maß ist **ergodisch**
d.h. $P(\mathcal{B}) = \mathrm{id}$ oder $= 0$
falls $\mathcal{B}$ invariant unter $M$

dies hat Auswirkungen auf den Träger von $P$

| |
|---|
| Es gibt einen Orbit $\mathcal{B}$, so dass der Träger von $P$ in $\mathcal{B}$ enthalten ist |

Beweis

$(U_i)_{\in I}$ Basis der Topologie von $\widehat{\mathbb{R}^n}$

$B_i = MU_i$ invariant unter $M$

$$B = \bigcap_{P(B_i)=\mathrm{id}} B_i$$

$B_i$ Borelsch, invariant unter $M$ und $P(B) = \mathrm{id}$
(da abzählbar viele)

Beh.: $B$ nur ein Orbit

Bew. ind.: $\exists a \in B$, Orbit$(a) \notin B$
betrachte $J \subset I$: $B_j$ Orbit$(a) \notin B$
für solche $B_j$ bilt $P(B_j) = 0$

überdecken $B$ also $P(B) = 0$ Widerspruch

damit haben wir eine kleine Gruppe $L$
nämlich den Stabilisator eines Elements von $\mathcal{B}$

also haben wir Imprimitivitätssystem

$$(\pi, L, S),\ S : \mathcal{C}_c(\mathcal{B}) \longrightarrow B(H)$$

Imprimitivitätssatz zeigt nun

$$\pi | M = \mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$$

weiterer Schritt

ausdehnen von $\sigma$ auf $L\mathbb{R}^n$ durch Twisten
Resultat $\tilde{\sigma}$

jetzt $\pi = \mathrm{Ind}_{L\mathbb{R}^n}^G(\tilde{\sigma})$

Isospingrouppe

$$\mathrm{Iso}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & z \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix};\quad \zeta \in S^1,\ z \in \mathbb{C} \right\}$$

ist isomorph zu

$S^1\mathbb{C}$, $S^1$ operiert auf $\mathbb{C}$ durch Multiplikation mit $\zeta^2$

Orbiten alle reellen Zahlen $r \geq 0$

Erster Fall $r = 0$. Kleine Gruppe $S^1$

irreduzible Darstellungn entsprechen
Charakteren $\zeta \mapsto \zeta^n$

liefert Charakter von $S^1\mathbb{C}$, $(\zeta, z) \mapsto \zeta^n$

es gibt nichts mehr zu induzieren

also die zu 1) gehörigen unitären Darstellungen
sind die Charaktere

Zweiter Fall $r > 0$. Kleine Gruppe $\{1\}$

man erhält für jedes $r > 0$ eine irreduzible
unitäre Darstellung von Iso(2)

**Irreduzible unitäre Darstellungen der Poincarégruppe**

$$P(3) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\mathbb{R}^4$$

Nehme einen der Repräsentanten $\alpha \in \mathbb{R}^4$ und betrachte die zugehörige kleine Gruppe $L \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$,

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad \mathrm{SU}(2), \quad \mathrm{Iso}(2)$$

bilde die Gruppe $L\mathbb{R}^4 \subset P(3)$, wähle eine irreduzible unitäre Darstellung $\sigma : L \to \mathrm{U}(H)$, dehne sie aus zu einer unitären Darstellung von $L\mathbb{R}^4$

$$\ell \cdot a \longmapsto [h \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a,\alpha\rangle}\sigma(\ell)h]$$

beachte

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow S^1, \quad a \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a,\alpha\rangle}$$

ist ein unitärer Charakter benutze, dass $L$ den Vektor $\alpha$ stabilisiert. Man erhält eine irreduzible unitäre Darstellung der Poincarégruppe. Jede ist zu einer solchen unitär isomorph. Der Orbit ist festgelegt

Donnerstag, 25.2.2021

**Satz von Stones**

$U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{U}(H)$   unitäre Darstellung

betrachte $\widehat{\mathbb{R}^n}$, unitäre Charaktere $\mathbb{R}^n \to S^1$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{R}^n}, \quad a \longmapsto [x \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a,x\rangle}]$$

Man erhält Topologie auf $\widehat{\mathbb{R}^n}$

Es gibt ein Radonmaß $(X, dx)$ und eine stetige Funktion $f : X \to \widehat{\mathbb{R}^n}$ und einen Isomorphismus $H \xrightarrow{\sim} L^2(X, dx)$ so dass $U(a)$ der Multiplikation mit $f(x)(a)$ entspricht

Sei $(X, dx)$ Radonmaß
Borelmengen und Borelfunktionen sind messbar

$\mathcal{B}_b(X)$ beschränkte Borelfunktionen $\varphi : X \to \mathbb{C}$

$U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{U}(H)$ unitäre Darstellung
$(X, dx)$ und $f : X \to \widehat{\mathbb{R}^n}$
wie in Satz von Stones

Sei $\varphi \in \mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n})$
bilde $\varphi \circ f : X \to \mathbb{C}$
ist beschränkt und messbar (sogar Borel)
betrachte Multiplikationsoperator zu $\varphi \circ f$
übertragen von $L^2(X, dx)$ auf $H$

das ergibt

$$\mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$$

ist nur von $U$, nicht von Wahl $(X, dx, f)$, abhängig

2 wichtige Spezialfälle
$\mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$
(könnte man operatorwertiges Pseudomaß nennen)

In $\mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n})$ sind

charakteristische Funktionen von Borelmengen $A$

Ihr Bild in $B(H)$ werden mit $P(A)$ bezeichnet

es sind Projektoren

Erinnerung: $E \subset H$ abgeschlossener Teilraum

zugehöriger Projektor: $P \in \mathcal{B}(H)$

id auf $E$ und 0 auf orthogonalem Komplement

$P \in B(H)$ Projektor $\Longleftrightarrow$

$P^2 = P$ und $P$ selbstadungiert

projektorwertiges Maß auf $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ist Abbildung $P$ ausgehend von der Menge aller Borelmengen $E \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$ in die Menge $B(H)$ ($H$ ein Hilbertraum) mit

1) $P(\mathcal{B})$ ist ein Projektor
2) $P(\emptyset) = 0, \quad P(\mathbb{R}^n) = \mathrm{id}$.
3) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.
4) Sind $E_1, E_2, \ldots$ paarweise disjunkt, so gilt

$$P(\cup E_i) = \sum P(E_i) \quad \text{(punktweise SOT)}$$

weitere Eigenschaften

$$P(A) = \mathrm{id},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(B) = 0$$

$$\text{denn } 0 = P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(B)$$

$$P(E_i) = 0 \Longrightarrow P(\bigcup E_i) = 0$$

$$P(E_i) = \mathrm{id} \Longrightarrow P(\bigcap E_i) = \mathrm{id}$$

also: Jeder unitären Darstellung von $\mathbb{R}^n$

ist projektorwertiges Maß zugeordnet

Eine lokal abgeschlossene Teilmenge $A \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$

(d.h: $A$ ist offen in seinem Abschluss)

liegt im Träger von $P$

falls $P(A) = \mathrm{id}$

Dann gilt $P(B) = 0$ für $B$ Borelsch, $A \cap B = \emptyset$

Dann gilt auch

$$S(f) = 0, \quad f \in \mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}),\ f = 0 \text{ auf } A$$

$P$ assoziiertes projektorwertiges Maß

$A \subset \widehat{\mathbb{R}^n}$ lokal abgeschlossene Teilmenge

projektorwertiges Maß $P$ habe Träger in $A$

$$\mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow \mathcal{C}_c(\bar{A}) \quad \text{surjektiv}$$

Es existiert eindeutig

$$\mathcal{C}_c(\bar{A}) \to \mathrm{U}(H)$$

so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{U}(H) \\ \mathcal{C}_c(\bar{A}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutativ
danach benutze man

$$\mathcal{C}_c(A) \hookrightarrow \mathcal{C}_c(\bar{A})$$

(fortsetzen durch 0)
$\mathcal{C}_c(A) \longrightarrow B(H)$

**Mackey's Theorem**

$M$ lokal kompakte Gruppe

$$M \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \quad \text{stetiger Homomorphismus}$$

oder

$$M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (m, a) \longmapsto ma,$$

analog zu Poincarégruppe Gruppenstruktur

$$(m, a)(n, b) = (mn, a + nb).$$

$$G = M\mathbb{R}^n$$

$M$ operiert auch auf $\widehat{\mathbb{R}^n}$

$$m(\chi)(x) = \chi(mx)$$

Sei $\chi \in \widehat{\mathbb{R}^n}$

$$L = M_\chi = \{m \in M;\ \chi(mx) = \chi(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

heißt kleine Gruppe in bezug auf die
Operation von $M$ auf $\mathbb{R}^n$

$L$ hängt nur vom Orbit von $\chi$ ab

**Bedingung für Mackeys theorem**

1) Es existiert abgeschlossene Teilmenge von $\widehat{\mathbb{R}^n}$
welche jeden Orbit genau einmal trifft

2) Die Orbiten sind lokal abgeschlossen

2) ist überflüssig aber bequem und bei uns erfüllt

1) kann stark abgeschwächt werden

$G = M\mathbb{R}^n$, $\pi : G \longrightarrow \mathrm{U}(H)$ irreduzibel unitär

Einschränken auf $\mathbb{R}^n$ ($\hookrightarrow G,\ a \longmapsto ea$)

wende Satz von Stones an

$$\mathcal{B}_b(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$$

$$\pi(g)S(f)\pi(g)^{-1} = S(R_g f)$$

insbesondere

$$S : \mathcal{C}_c(\widehat{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow B(H)$$

projektorwertiges Maß $P$

$P$(Borelmenge)=Projektor in $H$

$$\pi(g)P(\mathcal{B})\pi(g)^{-1} = P(g\mathcal{B})$$

das projektorwertige Maß ist **ergodisch**
d.h. $P(\mathcal{B}) = \mathrm{id}$ oder $= 0$
falls $\mathcal{B}$ invariant unter $M$

dies hat Auswirkungen auf den Träger von $P$

| |
|---|
| Es gibt einen Orbit $\mathcal{B}$, so dass der Träger von $P$ in $\mathcal{B}$ enthalten ist |

Beweis

$(U_i)_{\in I}$ Basis der Topologie von $\widehat{\mathbb{R}^n}$

$B_i = MU_i$ invariant unter $M$

$$B = \bigcap_{P(B_i)=\mathrm{id}} B_i$$

$B_i$ Borelsch, invariant unter $M$ und $P(B) = \mathrm{id}$
(da abzählbar viele)

Beh.: $B$ nur ein Orbit

Bew. ind.: $\exists a \in B$, Orbit$(a) \notin B$
betrachte $J \subset I$: $B_j$ Orbit$(a) \notin B$
für solche $B_j$ bilt $P(B_j) = 0$
üeberdecken $B$ also $P(B) = 0$ Widerspruch

damit haben wir eine kleine Gruppe $L$
nämlich den Stabilisator eines Elements von $\mathcal{B}$

also haben wir Imprimitivitätssystem

$$(\pi, L, S),\ S : \mathcal{C}_c(\mathcal{B}) \longrightarrow B(H)$$

Imprimivitätssatz zeigt nun

$$\pi|M = \mathrm{Ind}_M^G(\sigma)$$

weiterer Schritt

ausdehnen von $\sigma$ auf $L\mathbb{R}^n$ durch Twisten
Resultat $\tilde{\sigma}$

jetzt $\pi = \mathrm{Ind}_{L\mathbb{R}^n}^G(\tilde{\sigma})$

Isospingrouppe

$$\mathrm{Iso}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & z \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}; \quad \zeta \in S^1,\ z \in \mathbb{C} \right\}$$

ähnliche Gruppe SE(2)

$$\mathrm{SE}(n) = \mathrm{SO}(n)\mathbb{R}^n$$

Euklidsches Analogon der Poincarégruppe

Isospingrouppe ist isomorph zu

$S^1\mathbb{C}$, $S^1$ operiert auf $\mathbb{C}$ durch Multiplikation mit $\zeta^2$

SE(2) auch $S^1\mathbb{C}$, aber Multiplikation mit $\zeta$

Orbiten alle reellen Zahlen $r \geq 0$

Erster Fall $r = 0$. Kleine Gruppe $S^1$

irreduzible Darstellungen entsprechen
Charakteren $\zeta \mapsto \zeta^n$

liefert Charakter von $S^1\mathbb{C}$, $(\zeta, z) \mapsto \zeta^n$

es gibt nichts mehr zu induzieren

also die zu 1) gehörigen unitären Darstellungen
sind die Charaktere

Zweiter Fall $r > 0$. Kleine Gruppe $\{1\}$

man erhält für jedes $r > 0$ eine irreduzible
unitäre Darstellung von Iso(2)

**Irreduzible unitäre Darstellungen der Poincarégruppe**

$$P(3) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\mathbb{R}^4$$

Nehme einen der Repräsentanten $\alpha \in \mathbb{R}^4$ und betrachte die zugehörige kleine Gruppe $L \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$,

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}), \quad \mathrm{SU}(2), \quad \mathrm{Iso}(2)$$

bilde die Gruppe $L\mathbb{R}^4 \subset P(3)$, wähle eine irreduzible unitäre Darstellung $\sigma : L \to \mathrm{U}(H)$, dehne sie aus zu einer unitären Darstellung von $L\mathbb{R}^4$

$$\ell \cdot a \longmapsto [h \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a,\alpha\rangle}\sigma(\ell)h]$$

beachte

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow S^1, \quad a \mapsto e^{\mathrm{i}\langle a,\alpha\rangle}$$

ist ein unitärer Charakter benutze, dass $L$ den Vektor $\alpha$ stabilisiert. Man erhält eine irreduzible unitäre Darstellung der Poincarégruppe. Jede ist zu einer solchen unitär isomorph. Der Orbit ist festgelegt

Weiteremticklung

$\mathbb{Q}_p$ $p$-adische Zahlen

Komplettierung von $\mathbb{Q}$ nach $p$-adischer Komplettierung

$$\lim_{n\to\infty} p^n a = 0$$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$ lokal kompakte Gruppe

Klassifikation irreduziblet unitärer Darstellungen

schwieriger als im Falle $\mathbb{R} = \mathbb{Q}_\infty$

adelische Gruppen

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{A}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \prod_p{}' \, \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$$