

Riemann'sche Geometrie

Inhalt

Kapitel I. Riemann'sche Gebiete	1
1. Differentialrechnung	1
2. Parametrisierbare Untermannigfaltigkeiten	2
3. Riemann'sche Gebiete	4
4. Geodätische	6
5. Geodätische als Lösung eines Variationsproblems	9
6. Existenz von Geodätischen	13
Kapitel II. Krümmung	14
1. Relative Krümmung einer Kurve	14
2. Relative Krümmung von Flächenstücken	16
3. Die Gaußsche Krümmung einer Hyperfläche	17
4. Theorema Egregium, Formulierung	19
5. Theorema Egregium, Beweis	22
Kapitel III. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	26
1. Der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit	26
2. Differenzierbare Abbildungen	28
3. Tangentialraum	30
4. Das Tangentialbündel	36
5. Vektorraumbündel	38
6. Vektorfelder	39
7. Etwas multilineare Algebra	42
8. Differentiale (Kovektorfelder)	49
9. Tensorfelder	53
Kapitel IV. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten	57
1. Der Begriff der Riemann'schen Mannigfaltigkeit	57
2. Zusammenhänge	58

Inhalt	II
3. Parallelität	61
4. Kovariante Ableitung von Tensoren	63
5. Der Riemann'sche Krümmungstensor	67
6. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten als metrischer Raum	72
7. Die Exponentialfunktion	74
8. Normalkoordinaten	76
9. Geodätisch konvexe Umgebungen	80
10. Vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeiten	83
Kapitel V. Vergleichssätze	87
1. Jacobifelder	87
2. Konjugierte Punkte	87
3. Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung	88
Kapitel VI. Lorentzmannigfaltigkeiten	89
1. Der Minkowskiraum	89
2. Der Begriff der Lorentzmannigfaltigkeit	90
3. Die Einstein'schen Feldgleichungen	92
4. Die Robertson–Walker-Raumzeit	93
5. Das Kruskalmodell	97

Kapitel I. Riemann'sche Gebiete

1. Differentialrechnung

Der Einfachheit halber wollen wir den Begriff „differenzierbar“ immer im C^∞ -Sinne verstehen. Vieles geht natürlich unter schwächeren Bedingungen. Wir setzen die Differentialrechnung reeller Funktionen mehrerer Variabler voraus und stellen nur einige grundlegende Eigenschaften zusammen:

Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \text{ offen,}$$

heißt differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren und stetig sind. Wir bezeichnen mit $C^\infty(D)$ die Menge all dieser Funktionen. Im Falle $n = 1$ kann man als Definitionsbereiche neben offenen Mengen auch beliebige Intervalle (offene, abgeschlossene, halboffene) zulassen. Dies ist aber kein echt allgemeineres Konzept, denn man kann folgendes zeigen.

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall, so existiert ein offenes Intervall $J \supset I$ und eine Fortsetzung von f zu einer differenzierbaren Funktion auf J .

Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige Teilmenge. Eine Abbildung $f : D \rightarrow X$ kann man in ihre m Komponenten zerlegen,

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \quad f_i : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq m).$$

Man bezeichnet mit $C^\infty(D, X)$ die Menge aller Abbildungen, deren Komponenten in $C^\infty(D)$ enthalten sind.

Wir bezeichnen die Matrix der partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $a \in D$ mit

$$J(f, a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (a).$$

Wir erinnern an die Kettenregel: Sind

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} X, \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen, } X \subset \mathbb{R}^p,$$

differenzierbar, so ist auch ihre Zusammensetzung differenzierbar, und es gilt

$$J(g \circ f, a) = J(g, f(a)) \cdot J(f, a) \quad (\text{Matrizenprodukt}).$$

Wir erinnern auch an den Satz für umkehrbare Funktionen: Sei

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,}$$

differenzierbar) und $a \in D$ ein Punkt, für den die Funktionalmatrix $J(\varphi, a)$ invertierbar ist, dann existiert eine offene Umgebung $a \in U \subset D$, so daß ihr Bild $V = \varphi(U)$ ebenfalls offen ist und so daß die Einschränkung von φ einen Diffeomorphismus

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$$

vermittelt. (Der Bequemlichkeit halber verwenden wir für die Einschränkung von φ denselben Funktionsbuchstaben φ , solange klar ist, was gemeint ist.) Unter einem Diffeomorphismus versteht man natürlich eine bijektive Abbildung zwischen offenen Teilen des \mathbb{R}^n , welche in beiden Richtungen differenzierbar ist.

2. Parametrisierbare Untermannigfaltigkeiten

Wir erinnern an den Begriff der n -dimensionalen parametrisierbaren Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^N : Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^N$ heißt n -dimensionale parametrisierbare Untermannigfaltigkeit, falls es eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung (Parametrisierung) $\alpha : D \rightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- 1) $\alpha : D \rightarrow X$ ist topologisch (bijektiv und stetig in beiden Richtungen),
- 2) α ist differenzierbar und die Funktionalmatrix $J(\alpha, a)$ hat für jedes $a \in D$ Rang n .

Man nennt α auch eine reguläre Parametrisierung von X .

Für eine solche (parametrisierte) Untermannigfaltigkeit betrachtet man die $n \times n$ -Matrix

$$g(x) = J(\alpha, x)' J(\alpha, x).$$

Diese ist symmetrisch und positiv definit. Die Bedeutung von g liegt darin, daß die innere Geometrie von X in Termen von g ausgedrückt werden kann. Das einfachste Beispiel ist die Bogenlänge einer glatten (= differenzierbaren) Kurve

$$u : I \longrightarrow X, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall.}$$

Man betrachtet anstelle von u

$$v : I \longrightarrow D, \quad v(t) = u(\alpha^{-1}(t)).$$

Man kann zeigen, dass auch v glatt ist. Wir verzichten auf einen Beweis, da wir auch einfach annehmen könnten, dass v glatt ist. Die (euklidische) Bogenlänge von u ist

$$l(u) = \int_I \sqrt{\dot{u}_1(t)^2 + \cdots + \dot{u}_m(t)^2} dt.$$

Mittels der Jacobimatrix

$$J(u, t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$$

schreibt sich dies in der Form

$$l(u) = \int_0^1 \sqrt{J(u, t)' J(u, t)} dt.$$

Wendet man die Kettenregel auf $u = \alpha \circ v$ an, so folgt

$$J(u, t)' J(u, t) = J(v, t)' J(\alpha, v(t))' J(\alpha, v(t)) J(v, t) = g(v(t)) [J(v, t)].$$

Die Formel für die Bogenlänge in Parameterdarstellung ist also

$$l(u) = l_g(v) := \int_I \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sqrt{g_{ij}(v(t)) \dot{v}_i(t) \dot{v}_j(t)} dt.$$

Mit Hilfe des Satzes für implizite Funktionen kann man zeigen:

2.1 Hilfssatz. Sind $\alpha : D \rightarrow X$, $\beta : \tilde{D} \rightarrow X$ zwei verschiedene reguläre vPD Parametrisierungen ein und desselben Flächenstücks, so ist

$$\gamma := \beta^{-1} \circ \alpha : D \longrightarrow \tilde{D}$$

ein Diffeomorphismus. Es gilt

$$g(x) = J(\gamma, x)' \tilde{g}(\gamma(x)) J(\gamma, x).$$

Es gibt einen natürlichen Isometriebegriff für eingebettete Mannigfaltigkeiten

2.2 Definition. *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eingebetteter Mannigfaltigkeiten heißt eine Isometrie, falls eine reguläre Parametrisierung $\alpha : D \rightarrow X$ existiert, so dass auch $\alpha \circ f : D \rightarrow Y$ eine reguläre Parametrisierung ist, welche dieselbe Matrix g auf D induziert.* DefIs

Es ist klar, dass Isometrien Bogenlängen erhalten. Ist also $u : I \rightarrow X$ eine glatte Kurve, ist die Bogenlänge von u gleich der von $u \circ \alpha$. Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung gilt. Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Diffeomorphismus (es sollte klar sein, was das ist), welcher die Bogenlängen erhält, so ist f eine Isometrie im Sinne von Definition 2.2. Wir beweisen dies hier nicht.

Definition 2.2 ist natürlich unabhängig von der Wahl der Parametrisierung α . Aus Hilfssatz 2.1 kann man etwas allgemeiner folgern.

2.3 Hilfssatz. *Eine Bijektion $f : X \rightarrow \tilde{X}$ zwischen zwei parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten $X \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann eine Isometrie, falls für je zwei reguläre Parametrisierungen $\alpha : D \rightarrow X$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{D} \rightarrow \tilde{X}$ gilt: Die Abbildung* DfI

$$\gamma := \tilde{\alpha}^{-1} \circ f \circ \alpha : D \longrightarrow \tilde{D}$$

ist ein Diffeomorphismus mit der Eigenschaft

$$g(x) = J(\gamma, x)' \tilde{g}(\gamma(x)) J(\gamma, x).$$

Dabei sind g, \tilde{g} die $\alpha, \tilde{\alpha}$ zugeordneten positiv definiten Matrizen.

Diese Definition hängt natürlich nicht von der Wahl der Parametrisierungen ab. Dies folgt aus Hilfssatz 2.1. Man kann dann auch die Abbildung

$$f \circ \alpha : D \longrightarrow Y$$

betrachten. Dies ist offenbar eine reguläre Parametrisierung von Y . Aus der Kettenregel folgt leicht, dass die beiden Parametrisierungen

$$D \longrightarrow X \quad \text{und} \quad D \longrightarrow Y$$

dieselbe Fundamentalform auf X, Y induzieren. Man kann also auch so sagen.

Isometrien sind offenbar Abbildungen $\varphi : X \rightarrow Y$, welche die Bogenlängen von Kurven erhalten.

3. Riemann'sche Gebiete

Wir abstrahieren von der Situation parametrisierte Untermannigfaltigkeiten und definieren allgemein.

3.1 Definition. *Ein pseudoriemannsches Gebiet (D, g) ist ein Paar, bestehend aus einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ und einer symmetrischen $n \times n$ -Matrix* DpR

$$g = (g_{ik})_{1 \leq i, j \leq n}$$

differenzierbarer Funktionen auf D , so daß $g(x)$ für jedes x nicht ausgeartet ist. Wenn die Matrix $g(x)$ für jedes $x \in D$ positiv definit ist, so heißt (D, g) ein Riemann'sches Gebiet.

Eine symmetrische reelle Matrix S heißt bekanntlich nicht ausgeartet, falls ihre Determinante von 0 verschieden ist. Sie heißt positiv definit, falls

$$S[x] := \sum_{i,j} s_{ij} x_i x_j$$

für alle $x \neq (0, \dots, 0)$ positiv ist. In Matrixschreibweise gilt

$$S[x] = x' S x, \quad x = \text{Spaltenvektor.}$$

Die Determinante einer positiv definiten Matrix ist stets positiv.

Wir sind in erster Linie an Riemann'schen Gebieten interessiert. Die Verallgemeinerung auf pseudoriemannsche Gebiete ist vor allem für die allgemeine Relativitätstheorie von Bedeutung.

Motiviert durch die eingebetteten Mannigfaltigkeiten definieren wir.

3.2 Definition. *Sei (D, g) ein Riemann'sches Gebiet. Die Bogenlänge einer glatten Kurve $u : I \rightarrow D$ ist* Db0

$$l_g(u) := \int_I \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij}(u(t)) \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t)} dt.$$

Folgende Definition entsteht ebenfalls durch Abstraktion der parametrisierten Mannigfaltigkeiten (vgl. Hilfssatz 2.3).

3.3 Definition. *Eine Isometrie zwischen zwei pseudoriemannschen Gebieten (D, g) , (\tilde{D}, \tilde{g}) ist ein Diffeomorphismus $\varphi : D \rightarrow \tilde{D}$ mit der Eigenschaft* DgI

$$g(x) = J(\varphi, x)' \tilde{g}(\varphi(x)) J(\varphi, x).$$

Man verifiziert nun leicht in dieser allgemeinen Situation:

3.4 Bemerkung. Ist $\varphi : (D, g) \rightarrow (\tilde{D}, \tilde{g})$ eine Isometrie Riemann'scher Gebiete, so bleiben Bogenlängen erhalten: Ist also $u : I \rightarrow D$ eine glatte Kurve und $\tilde{u} = \varphi \circ u$ ihre Bildkurve, so gilt BiK

$$l_g(u) = l_{\tilde{g}}(\tilde{u}).$$

4. Geodätische

Geodätische sind Kurven, welche wenigstens lokal kürzeste Verbindungen darstellen. Bekanntlich sind dies im Falle der üblichen Euklidischen die Geradengleichungen $u(t) = at + b$ geodätisch. Man kann sie einfach durch die Differentialgleichung

$$\ddot{u} = 0$$

charakterisieren. Da wir uns um Elementargeometrie nicht kümmern wollen, erheben wir dies zur Definition:

4.1 Definition. Sei (D, g) ein Riemann'sches Gebiet, $g(x)$ sei für jedes $x \in D$ die Einheitsmatrix. Eine glatte Kurve DeI

$$u : I \longrightarrow D, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall}$$

heißt **geodätisch**, falls $\ddot{u} = 0$ gilt.

Zum Aufwärmen wollen wir die Differentialgleichung $\ddot{u} = 0$ auf krummlinige Koordinaten umtransformieren.

4.2 Definition. Ein Riemann'sches Gebiet (D, g) heißt **flach**, falls es isometrisch zu einem Gebiet (\tilde{D}, \tilde{g}) ist, wobei $\tilde{g}(x)$ für jedes x die Einheitsmatrix ist. DrF

Ist $\varphi : D \rightarrow \tilde{D}$ eine solche Isometrie, so gilt also

$$g(x) = J(\varphi, x)' J(\varphi, x).$$

Wir betrachten nun eine Kurve $u : I \rightarrow D$, so daß die in \tilde{D} transformierte Kurve $v(t) = \varphi(u(t))$ der Bedingung $\ddot{v} = 0$ genügt. Einmaliges Ableiten (mit Hilfe der Kettenregel) ergibt

$$\dot{v}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \dot{u}_i$$

und nochmaliges Ableiten (mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel) ergibt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \ddot{u}_i + \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \dot{u}_\mu \dot{u}_\nu = 0$$

für die umtransformierte Geradengleichung. Uns ist daran gelegen, diese Formel so umzuformen, daß anstelle φ nur noch die Matrix g auftritt. Wir erinnern an die Definition von g :

$$g_{ij} := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}.$$

Multipliziert man die vorhergehende Gleichung mit $\partial \varphi_k / \partial x_j$ und summiert man anschließend über k , so folgt

$$\sum_{i=1}^n g_{ij} \ddot{u}_i + \sum_{k=1}^n \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \dot{u}_\mu \dot{u}_\nu = 0$$

oder etwas anders geschrieben

$$\sum_{i=1}^n g_{ik} \ddot{u}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j = 0 \quad \text{mit} \quad H_{ij}^k = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Die Funktionen H_{ij}^k kann man in der Tat durch g ausdrücken. Es gilt nämlich

$$H_{ij}^k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right],$$

wie man durch Nachrechnen bestätigt.

Wir formulieren die Differentialgleichung noch ein wenig um, indem wir die inverse Matrix g^{-1} einführen. Es ist üblich, ihre Komponenten mit g^{ij} zu bezeichnen. Es gilt also

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein einfache Umformung der Differentialgleichung ergibt

$$\ddot{u}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j = 0 \quad \text{mit} \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n g^{k\nu} \left[\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu} \right].$$

Damit haben wir tatsächlich die Differentialgleichung so umformen können, daß nur noch g eingeht. Diese Differentialgleichung wurde unter der Annahme abgeleitet, daß (D, g) flach ist. Sie ist jedoch auch sinnvoll für nicht flache Gebiete und auch für pseudoriemannsche Gebiete. Damit werden die folgenden beiden Definitionen nahegelegt, welche noch weitere Rechtfertigung erfahren werden.

4.3 Definition. Sei (D, g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Die **Christoffelsymbole** sind DcS

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n g^{k\nu} \left[\frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu} \right].$$

4.4 Definition. Sei (D, g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Eine glatte Kurve $u : I \rightarrow D$ heißt **geodätisch**, wenn sie der Differentialgleichung HdG

$$\ddot{u}_k + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j = 0$$

genügt.

Im Falle der „Euklidischen Metrik“, $g(x) = E = \text{Einheitsmatrix}$, verschwinden die Christoffelsymbole und man erhält die Geradengleichung $\ddot{u} = 0$.

4.5 Bemerkung. Sei $\varphi : (D, g) \rightarrow (\tilde{D}, \tilde{g})$ eine Isometrie. Dann gilt für die Christoffelsymbole folgende Umsetzungsformel: CrI

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_k(x)}{\partial x_j} \Gamma_{\mu\nu}^j(x) = \frac{\partial^2 \varphi_k(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_\nu} \tilde{\Gamma}_{ij}^k(\varphi(x)).$$

Da die Funktionalmatrix $(\partial \varphi_k / \partial x_j)$ invertierbar ist, kann man diese Formel auch nach Γ_{ij}^k auflösen, wenn man will. Bevor wir den Beweis kommentieren, formulieren wir noch

4.6 Bemerkung. Sei $(D, g) \rightarrow (\tilde{D}, \tilde{g})$ eine Isometrie. Eine glatte Kurve $u : I \rightarrow D$ ist genau dann geodätisch, wenn $\tilde{u} = \varphi \circ u$ geodätisch ist. IsG

Zu den Beweisen von 4.5 und 4.6: Man kann zunächst 4.5 und anschließend 4.6 stur nachrechnen. Diese Rechnung ist allerdings sehr mühselig. Wir skizzieren nur kurz den Weg, wie man 4.5 nachrechnet und geben im Anschluß einen viel natürlicheren Beweis an, der allerdings den Nachteil hat, daß Dinge benutzt werden, die erst noch entwickelt werden müssen.

Direkter Beweis von 4.5 (Skizze): Da in der Definition der Christoffelsymbole die inverse Matrix von g eingeht, ist es zweckmäßig, die Formel zunächst mit $g_{j\alpha} \tilde{g}_{k\beta}$ zu multiplizieren und über j und k zu summieren. Danach hat man eine (äquivalente) Formel, in die nur noch g , \tilde{g} und φ sowie partielle Ableitungen dieser Ausdrücke eingehen. Danach benutzt man

$$g_{ij}(x) = \sum_{\mu\nu} \frac{\partial \varphi_\mu(x)}{\partial x_i} \tilde{g}_{\mu\nu}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_\nu(x)}{\partial x_j}.$$

Man differenziert diese Formel unter Ausnutzung von Produkt- und Kettenregel und erhält dann eine zu 4.5 äquivalente Formel, in die \tilde{g} und φ sowie partielle Ableitungen dieser Ausdrücke eingehen. Diese recht längliche Formel ist dann Term für Term zu verifizieren. \square

Direkter Beweis von 4.6 (Skizze): Man transformiert die Geodätengleichung von D auf \tilde{D} mittels 4.5. \square

Natürlichere Beweise von 4.5 und 4.6: Dieser funktioniert nur im Falle Riemann'scher Gebiete. Man fängt besser mit 4.6 an. Im nächsten Abschnitt geben wir eine Charakterisierung Geodätischer als Lösung eines Variationsproblems an (5.6). Es ist unmittelbar klar, daß 4.6 hieraus folgt. Um 4.5 zu beweisen, genügt es danach folgendes zu zeigen: Die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k sind durch die Geodätischen eindeutig bestimmt. Ist also Γ'_{ij}^k ein System von Funktionen, so daß alle Lösungen von $\ddot{u}_k + \sum_{ij} \Gamma'_{ij}^k \dot{u}_i \dot{u}_j = 0$ derselben Gleichung mit Γ' anstelle von Γ genügen, so gilt $\Gamma = \Gamma'$. Es ist klar, daß man dies beweisen kann, wenn die Existenz genügend vieler Geodäten gesichert ist, in der Tat leistet der im übernächsten Abschnitt bewiesenen Existenzsatz 6.1 das Gewünschte. \square

Bemerkung 4.6 legt folgende Definition von Geodätischen auf parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten nahe:

4.7 Definition. *Eine Kurve $u : I \rightarrow X$ auf einer parametrisierbaren Mannigfaltigkeit heißt geodätisch, falls es eine Parametrisierung $\alpha : D \rightarrow X$ gibt, so daß $\alpha^{-1} \circ u$ in dem Riemann'schen Gebiet (D, g) , $g(x) = J(\alpha, x)'J(\alpha, x)$ geodätisch ist.* DgF

Bemerkung 4.6 besagt nun gerade:

4.8 Bemerkung. *Der Begriff der Geodätischen auf einer parametrisierbaren Mannigfaltigkeit hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab.* BgN

5. Geodätische als Lösung eines Variationsproblems

Sei $u : I \rightarrow (D, g)$ eine glatte Kurve in einem Riemann'schen Gebiet. Man nennt

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij}(u(t)) \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t).$$

die *Geschwindigkeit* von u zum Parameterwert t .

5.1 Definition. *Eine glatte Kurve $u : I \rightarrow (D, g)$ in einem Riemann'schen Gebiet heißt **regulär parametrisiert**, falls ihre Geschwindigkeit überall von 0 verschieden ist und **natürlich parametrisiert**, falls ihre Geschwindigkeit konstant ist.* DrP

Die erste Bedingung hängt gar nicht von der Metrik g ab, sie besagt wegen der positiven Definitheit von g einfach, daß $\dot{u}(t)$ für alle t von 0 verschieden ist. Die Bedingung der natürlichen Parametrisierung hängt sehr wohl von der Metrik ab.

5.2 Hilfssatz. Sei $u : I \rightarrow (D, g)$ eine regulär parametrisierte Kurve in einem Riemann'schen Gebiet. Wir wählen einen festen Punkt $t_0 \in I$. Die Funktion RnP

$$\tau(t) := \int_{t_0}^t \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(u(t)) \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t)} dt$$

ist streng monoton wachsend und bildet das Intervall I diffeomorph auf ein anderes Intervall J ab. Die Kurve

$$v : J \longrightarrow (D, g), \quad v(t) = u(\tau^{-1}(t))$$

ist natürlich parametrisiert.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist τ differenzierbar und die Ableitung ist der Integrand, also insbesondere positiv. Die Funktion ist daher streng monoton und daher injektiv. Das Bild von τ ist nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ein Intervall. Die Umkehrabbildung ist nach dem Satz für umkehrbare Funktionen differenzierbar. Der Rest ist klar. □

In üblicher Sprechweise nennt man τ eine Parametertransformation. Der Hilfssatz sagt also aus, daß jede regulär parametrisierte Kurve nach einer geeigneten Parametertransformation natürlich parametrisiert ist. Der Vollständigkeit halber erinnern wir an den Begriff der Parametertransformation:

Zwei Kurven $u : I \rightarrow D$, $v : J \rightarrow D$ heißen **parameteräquivalent**, falls es einen Diffeomorphismus $\tau : I \rightarrow J$ mit der Eigenschaft $v \circ \tau = u$ gibt. Der Diffeomorphismus ist entweder streng monoton wachsend oder fallend. Ist er streng monoton wachsend, so nennt man α und β **streng parameteräquivalent**.

Eine einfache Anwendung der Substitutionsregel für Integrale zeigt:

5.3 Bemerkung. Äquivalente Kurven in einem Riemann'schen Gebiet haben dieselbe Bogenlänge. AeL

Für viele Fragen ist es ausreichend, natürlich parametrisierte Kurven zu betrachten:

5.4 Bemerkung. Geodätische in Riemann'schen Gebieten sind natürlich parametrisiert. GnP

Beweis: Man hat zu zeigen, daß

$$\frac{d}{dt} \sum_{ij} g_{ij}(u(t)) \dot{u}_i(t) \dot{u}_j(t) = \sum_{ij\nu} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu} \dot{u}_\nu \dot{u}_i \dot{u}_j + 2 \sum_{ij} g_{ij} \ddot{u}_i \dot{u}_j$$

gleich Null ist. Ersetzt man \ddot{u} durch die Geodätengleichung, so kommt nach kurzer Rechnung Null heraus. \square

In der *gewöhnlichen Analysis* versucht man Maxima von differenzierbaren Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n zu bestimmen. Die Maxima sind unter den sogenannten kritischen Stellen zu suchen. Das sind definitionsgemäß Punkte in denen alle n partiellen Ableitungen verschwinden.

In der *Variationsrechnung* geht man weiter. Anstelle von D betrachtet man Mengen \mathcal{D} von Funktionen und anstelle f Abbildungen $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Auch hier kann man versuchen, den Begriff der kritischen Stelle zu prägen. Die Variationsrechnung definiert diese als die Nullstellen der *Variation* δF . Wir wollen keine systematische Variationsrechnung entwickeln, sondern diese nur an einem typischen Beispiel erläutern:

Sei (D, g) ein Riemann'sches Gebiet, $u : [a, b] \rightarrow D$ eine glatte Kurve. Wir wollen u „variieren“, ohne den Anfangs- und Endpunkt zu verändern. Wir betrachten daher eine Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $h(a) = h(b) = 0$ und bilden die variierte Funktion

$$u(t, s) := u(t) + sh(t), \quad |s| < \varepsilon.$$

Dabei sei die Zahl $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß $u(t, s)$ für alle $t \in [a, b]$ und $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ in D enthalten ist. Dies geht nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit. Wir wollen $u(t, s)$ als eine durch s parametrisierte Schar von Kurven

$$[a, b] \longrightarrow D, \quad t \longmapsto h(t, s),$$

ansehen. Alle diese Kurven verbinden a mit b . Uns interessieren diese Kurven für kleine s . Wir wollen also u nur wenig variieren. Genauer interessieren wir uns für folgende Bedingung:

5.5 Definition. *Eine glatte Kurve $u : [a, b] \rightarrow (D, g)$ in einem Riemann'schen Gebiet im \mathbb{R}^n genügt dem **Variationsprinzip**, falls für jede glatte Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $h(a) = h(b) = 0$ die Bogenlänge $l_g(u_s)$ der Kurve u_s* DkS

$$t \longmapsto u_s(t) := u(t, s) = u(t) + sh(t) \quad (|s| < \varepsilon)$$

eine kritische Stelle bei $s = 0$ hat,

$$\left. \frac{dl_g(u_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

Wenn u eine kürzeste Verbindungslinie ist, wenn also $l_g(u) \leq l_g(v)$ für alle glatten Kurven in (D, g) ist, welche $u(a)$ mit $u(b)$ verbinden, dann genügt u offensichtlich dem Variationsprinzip. Die Umkehrung hiervon ist jedoch falsch. Wir kommen hierauf noch zurück. Eigentlich interessieren uns die kürzesten Verbindungen, das Variationsproblem ist jedoch leichter zugänglich.

5.6 Satz. Sei $u : [a, b] \rightarrow (D, g)$ eine glatte Kurve in einem Riemann'schen Gebiet. Die folgenden beiden Aussagen sind gleichbedeutend: GV

- 1) u ist geodätisch.
- 2) u ist natürlich parametrisiert und genügt dem Variationsprinzip.

Vor dem Beweis formulieren wir einen einfachen

5.7 Hilfssatz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so daß PTv

$$\int_a^b f(t)P(t) dt = 0$$

für jedes Polynom P . Dann gilt $f = 0$.

Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Approximationssatzes von Weierstraß. Nach ihm existiert eine gegen f gleichmäßig konvergente Folge von Polynomen P_n . Aus der Voraussetzung folgt, daß das Integral über f^2 verschwindet. Da diese Funktion stetig und nirgends negativ ist, folgt $f = 0$. □

Es genügt, in 5.7 nur solche Polynome zu nehmen, welche Vielfache eines Polynoms $Q \neq 0$ sind. Denn dann folgt zunächst $fQ = 0$ und hieraus $f = 0$. (Da f stetig ist, spielen die endlich vielen Nullstellen von Q keine Rolle.) Insbesondere kann man sich in 5.7 auf Polynome P mit $P(a) = P(b)$ beschränken. □

Eine Variante des Hilfssatzes besagt:

5.8 Hilfssatz. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, so daß QTV

$$\int_a^b (f(t)P(t) + g(t)P'(t)) dt = 0$$

für alle Polynome P mit $P(a) = P(b) = 0$. Dann gilt

$$f = g'.$$

Zum Beweis benutzt man partielle Integration ($gP' \mapsto -g'P$). □

Beweis von 5.6: Wir wenden uns der Richtung 2) \Rightarrow 1) zu. Dabei wird auch die Umkehrung klar sein. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{d}{ds} \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} g_{ij}(u(t) + sh(t)) (\dot{u}_i(t) + s\dot{h}_i(t)) (\dot{u}_j(t) + s\dot{h}_j(t))} dt \Big|_{s=0} = 0.$$

Nach der Leibnizschen Regel, darf man die Ableitung unters Integralzeichen ziehen. Leitet man die Wurzel nach der Regel

$$\frac{d\sqrt{f}}{ds} = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

ab, so sieht man, daß der Nenner (nach Einsetzen von $s = 0$) konstant wird, da die Kurve u nach Voraussetzung natürlich parametrisiert ist. Es folgt

$$\int_a^b \left(\sum_{ij\nu} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu} h_\nu \dot{u}_i \dot{u}_j + 2 \sum_{i\nu} g_{i\nu} \dot{u}_i \dot{h}_\nu \right) dt = 0.$$

Man kann alle h_ν bis auf eines auf 0 setzen und dann 5.8 anwenden:

$$\sum_{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\nu} \dot{u}_i \dot{u}_j = 2 \sum_i \frac{d(g_{i\nu} \dot{u}_i)}{dt}.$$

Mittels der Auswertung

$$\frac{d(g_{i\nu} \dot{u}_i)}{dt} = \frac{d(g_{i\nu}(u(t)) \dot{u}_i(t))}{dt} = g_{i\nu}(u(t)) \ddot{u}_i(t) + \sum_\mu \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_\mu}(u(t)) \dot{u}_\mu(t) \dot{u}_i(t)$$

gelangt man nun rasch zur Geodätengleichung. \square

6. Existenz von Geodätischen

Wir haben Geodätische als Lösungen einer Differentialgleichung eingeführt, aber außer im flachen Fall wissen wir nicht, ob Geodätische existieren. Das muß aber zumindest geklärt sein, bevor man die Frage nach der Existenz von kürzesten Verbindungen stellen kann.

6.1 Satz. Sei $a \in (D, g)$ ein Punkt eines pseudoriemannschen Gebiets im \mathbb{R}^n und $A \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Es existiert ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und eine Geodätische ExG

$$u : I \longrightarrow D, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = A.$$

Sind $u : I \rightarrow D$, $v : J \rightarrow D$ zwei solche Geodätische, so gilt $u(t) = v(t)$ im Durchsschnitt der beiden Intervalle.

Folgerung. Unter allen Intervallen I gibt es ein größtes.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir wollen diesen nicht beweisen.

Der Existenzsatz ist noch etwas feiner. Man kann noch die Stetigkeit der Lösungen in Abhängigkeit von weiteren Parametern beweisen. Im Falle der Geodätischen besagt diese Erweiterung:

6.2 Zusatz zu 6.1. Seien $K \subset D$ und $L \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Mengen. Man kann ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$ finden, so daß die Geodätischen zu den Anfangswerten $a \in K$ und $A \in L$ alle auf I definiert sind. Bezeichnet man sie mit $u_{a,A}(t)$, so gilt: Die Abbildung ZpA

$$I \times K \times L \longrightarrow D, \quad (t, a, A) \longmapsto u_{a,A}(t),$$

ist stetig und im Innern sogar differenzierbar.

Kapitel II. Krümmung

1. Relative Krümmung einer Kurve

Es gibt zwei unterschiedliche Krümmungsphänomene. Eine in den Raum eingebettete Kurve kann relativ zu dem umgebenden Raum gekrümmt sein. Dies ist jedoch lediglich ein relatives Phänomen, da man eine Kurve längenerhaltend gerade biegen kann. Mathematisch kann man dies so ausdrücken.

1.1 Bemerkung. *Jedes eindimensionale Riemann'sche Gebiet (D, g) , $D \subset \mathbb{R}^n$ ist flach.* jEg

Beweis. Man muss zeigen, dass sich eine positive differenzierbare Funktion $g(x)$ einer Variablen in der Form $g(x) = \varphi'(x)^2$ schreiben läßt. Man gewinnt $\varphi(x)$ durch Integration von $\sqrt{g(x)}$. □

Das gleiche gilt für eine Zylinderfläche wie $\{(x, y, z); x^2 + y^2 = 1\}$. Auch diese kann man wenigstens lokal eben biegen ohne metrische Verhältnisse zu zerstören. Anders ist die Situation bei einer Kugelfläche. Diese kann man nicht eben biegen, ohne metrische Eigenschaften zu zerstören. Wir werden somit auf der Phänomen der Krümmung geführt. Dieses hat offenbar zwei verschiedene Aspekte. Gebilde wie die Zylinderfläche und die Kugelfläche krümmen sich im Raum. Die Zylinderfläche hat aber im Gegensatz zur Kugelfläche keine „innere Krümmung“.

Es ist unsere Ziel, Größen zu definieren, welche die innere Krümmung beschreiben. Zuvor müssen wir jedoch die relative Krümmung beschreiben. Es wird sich zeigen, daß zwischen beiden ein Zusammenhang besteht.

(Relative) Krümmung einer Kurve

Wir erinnern daran, daß $\dot{u}(t)$ den Tangentialvektor einer glatten Kurve zum Parameterwert t beschreibt. Genauer ist der Pfeil von $u(t)$ nach $u(t) + \dot{u}(t)$ das, was man als den geometrischen Tangentialvektor bezeichnen sollte. Die Euklidische Länge von $\dot{u}(t)$ ist die Geschwindigkeit. Wir beschränken uns auf natürlich parametrisierte Kurven $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (in bezug auf die Euklidische Metrik E des \mathbb{R}^n). Es gelte also

$$\sum_{i=1}^n |\dot{u}_i(t)|^2 = \text{konstant.}$$

Dann ist die Geschwindigkeit von u konstant. Änderungen von $\dot{u}(t)$ können also nur dadurch zustande kommen, daß sich die Richtung der Kurve ändert, also, daß sie sich krümmt. Dadurch wird nahegelegt, die zweite Ableitung $\ddot{u}(t)$ mit der Krümmung in Verbindung zu bringen. Da uns zunächst nur interessiert, wie stark sich die Kurve absolut krümmt (unabhängig von Richtungsfragen), werden wir dazu geführt, die Euklidische Norm $\|\ddot{u}\|$ als Maß für die Krümmung zu nehmen. Allerdings sollte man diese relativ zum Betrag der Geschwindigkeit nehmen. Dies garantiert, daß die Krümmung sich nicht ändert, wenn man die Kurve $u(t)$ durch $u(Ct)$ (C eine von 0 verschiedene Konstante) ersetzt.

1.2 Definition. Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine natürlich parametrisierte nicht konstante Kurve. Dann ist DrK

$$K_u(t) := \frac{\|\ddot{u}(t)\|}{\|\dot{u}(t)\|^2}$$

die (relative) Krümmung der Kurve u zum Parameterwert t .

Am Beispiel

$$u(t) = r(\cos t, \sin t), \quad K_u(t) = \frac{1}{r} \quad (r > 0)$$

sieht man, daß die Krümmung der Kreislinie vom Radius r gerade $1/r$ ist. Kleine Kreise sind stärker gekrümmt als große.

1.3 Bemerkung. Sei $u(t)$ eine natürlich parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^n . Dann gilt NpP

$$\dot{u}(t) \perp \ddot{u}(t).$$

Beweis. Man differenziere die Gleichung

$$\sum_i \dot{u}_i(t)^2 = \text{konstant.} \quad \square$$

Wenn die Krümmung von u zum Parameterwert t von 0 verschieden ist, so spannen insbesondere $\dot{u}(t)$ und $\ddot{u}(t)$ einen zweidimensionalen Untervektorraum des \mathbb{R}^n auf. Man nennt diesen zweidimensionalen Raum

$$\mathbb{R}\dot{u}(t) + \mathbb{R}\ddot{u}(t) \subset \mathbb{R}^n$$

dann die *Schmiegungeebene* von u zum Parameterwert t . Um die Schmiegungeebene im geometrischen Sinne zu erhalten muß man diesen Untervektorraum in den Punkt $u(t)$ verschieben. Die geometrische Schmiegungeebene ist also eigentlich der affine Raum.

$$u(t) + (\mathbb{R}\dot{u}(t) + \mathbb{R}\ddot{u}(t)).$$

(Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt affiner Raum, falls er von der Form $a + W$ mit einem Untervektorraum W gilt. Dabei ist W eindeutig bestimmt. Für a kann man jedes Element von A nehmen. Mathematisch arbeitet man lieber mit Vektorräumen als mit affinen Räumen. Daher ziehen wir es vor, $\dot{u}(t)\mathbb{R} + \ddot{u}(t)\mathbb{R}$ die Schmiegungebene zu nennen.)

2. Relative Krümmung von Flächenstücken

Wir wollen nun die relative Krümmung von parametrisierbaren Flächenstücken $X \subset \mathbb{R}^n$ definieren. Es existiert also eine reguläre und topologische Abbildung

$$\alpha : D \longrightarrow X, \quad D \subset \mathbb{R}^d \text{ offen.}$$

Sei $x \in X$ ein fester Punkt, $a \in D$ der entsprechende Parameterpunkt. Die Funktionalmatrix definiert eine lineare Abbildung

$$J(\alpha, a) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Diese ist injektiv, da die Funktionalmatrix nicht ausgeartet ist. Man nennt den d -dimensionalen Untervektorraum

$$T_x X := J(\alpha, a)\mathbb{R}^d$$

den Tangentialraum von X in x . (Der geometrische Tangentialraum ist eigentlich der affine Raum $x + T_x X$).

Der Name „Tangentialraum“ kann folgendermaßen gerechtfertigt werden:

- 1) Er hängt nicht ab von der Wahl der Parametrisierung.
- 2) Ist $u : I \rightarrow X$ eine glatte Kurve, so ist $\dot{u}(t)$ in $T_{u(t)}X$ enthalten.

Beide Eigenschaften folgen leicht aus der Kettenregel. Man kann sich sogar überlegen, daß $T_x X$ aus der Menge aller $\dot{u}(0)$ besteht, wobei u alle Kurven $u : (-r, r) \rightarrow X$ mit $u(0) = x$ durchläuft.

Wir erinnern daran, daß die Parametrisierung $\alpha : D \rightarrow X$ eines Flächenstücks eine Riemann'sche Metrik $g(x) = J(\alpha, x)'J(\alpha, x)$ definiert und daß man diese dazu benutzen kann, Geodätische auf X einzuführen. Der Existenzsatz für Geodätische impliziert:

Zu jedem Punkt $a \in X$ und zu jedem Tangentialvektor $A \in T_a X$ existiert eine Geodätische $u : I \rightarrow X$ mit den Eigenschaften

$$0 \in I, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = A.$$

Diese ist in naheliegenderm Sinne eindeutig bestimmt und es gibt ein eindeutig bestimmtes größtes I . Ist $K \subset T_a X$ eine beschränkte Teilmenge, so kann man

eine gemeinsame I für alle $A \in K$ finden. Die Abbildung (in naheliegender Bezeichnung)

$$K \times I \longrightarrow X, \quad (A, t) \longmapsto u_A(t)$$

ist stetig.

Wir wollen nun insbesondere Geodätische u auf X und deren relative Krümmung betrachten. Wir wissen bereits, daß $\ddot{u}(t)$ auf $\dot{u}(t)$ senkrecht steht. Wir wollen mehr zeigen, nämlich daß $\ddot{u}(t)$ auf dem ganzen Tangentialraum $T_{u(t)}X$ senkrecht steht und daß diese Eigenschaft die Geodäsie sogar charakterisiert.

2.1 Hilfssatz. *Eine glatte Kurve u auf einem Flächenstück $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann geodätisch, wenn $\ddot{u}(t)$ für jeden Parameterwert t senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{u(t)}X$ steht.* gsT

Beweis. Sei $\alpha : D \rightarrow X$ eine reguläre Parametrisierung des Flächenstücks. Wir transportieren die Kurve u ins Paramtergebiet, $v : I \rightarrow D$, $u = \alpha \circ v$. Der Tangentialraum in einem zu $a \in D$ gehörenden Punkt wird von den Spalten der Jacobimatrix aufgespannt. Es gilt also

$$\ddot{u}(t) \perp T_{u(t)} \iff \sum_{i=1}^n \ddot{u}_i(t) \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}(u(t)) = 0 \quad (\forall j).$$

Man wende jetzt zweimal die Kettenregel an, um \ddot{u} mittels $u = \alpha \circ v$ durch Ableitungen von α und v ermitteln. Eine einfache Rechnung zeigt, daß genau die Geodätengleichung für v zur Riemann'schen Metrik $g(x) = J(\alpha, x)'J(\alpha, x)$ herauskommt. □

2.2 Definition. *Sei X ein Flächenstück im \mathbb{R}^n , $a \in X$ ein Punkt und $A \in T_a X$ ein von 0 verschiedener Tangentialvektor. Die Krümmung von X in a in Richtung A ist die Krümmung einer Geodätischen $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ mit $u(0) = a$ und $\dot{u}(0) = A$ zum Parameterwert $t = 0$,* DKf

$$k_X(a, A) := K_u(0).$$

Es ist klar, dass diese Krümmung sich nicht ändert, wenn man A durch ein tA , $t \neq 0$, ersetzt. Man kann daher, wenn man will, A normieren und $\|A\| = 1$ annehmen.

3. Die Gaußsche Krümmung einer Hyperfläche

In diesem Abschnitt sei $\alpha : D \rightarrow X$ die Parametrisierung eines Hyperflächenstücks im \mathbb{R}^n , d.h. $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (offen). In diesem Fall hat der Tangentialraum die Dimension $n - 1$.

Ein Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Einheitsnormalenvektor*, falls er senkrecht auf $T_a X$ steht (bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts) und falls seine Euklidische Länge 1 ist. Es gibt genau zwei Einheitsnormalenvektoren. Ist \mathbf{n} der eine, so ist $-\mathbf{n}$ der andere.

3.1 Definition. *Eine Orientierung eines Hyperflächenstücks X in einem Punkt $a \in X$ ist eine Auswahl eines der beiden Einheitsnormalenvektors.* DoH

Ist $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ eine Geodätische, so steht $\ddot{u}(0)$, wie wir wissen, auf dem Tangentialraum senkrecht. Es gilt daher

$$\ddot{u}(0) = s\mathbf{n}.$$

Wir versehen nun die Krümmung mit einem Vorzeichen, dem Signum von s ,

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{falls } s > 0, \\ 0 & \text{falls } s = 0, \\ -1 & \text{falls } s < 0. \end{cases}$$

Es gilt offenbar

$$\operatorname{sgn}(s) = \operatorname{sgn}(\langle \ddot{u}(0), \mathbf{n} \rangle).$$

3.2 Definition. *Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Hyperflächenstück, welches in dem Punkt $a \in X$ orientiert ist und $A \in T_a X$ ein Tangentialvektor, so ist die gerichtete Krümmung von X in a in Richtung A durch* DgKa

$$K_X(a, A) = \operatorname{sgn}(\langle \ddot{u}(0), \mathbf{n} \rangle) k_X(a, A)$$

definiert.

Den Normalenvektor stelle man sich als Beobachter vor. Das Vorzeichen der Krümmung gibt an, ob sich das Flächenstück in Richtung A vom Beobachter wegkrümmt oder sich auf ihn zukrümmt. Ist X beispielsweise ein Stück Kugelfläche und weist der Normalenvektor nach außen, so krümmt sich X vom Beobachter weg, die (gerichtete) Krümmung ist also negativ. Ein anderes Beispiel erhält man, wenn man für X ein Stück Gebirgslandschaft nimmt. Ein Wanderer (Normalenvektor nach außen, also in die Luft gerichtet), mag bei einer Bergbesteigung die Krümmung folgendermaßen erleben. In Horizontalrichtung krümmt sich der Berg von ihm weg, in Horizontalrichtung ist also die Krümmung immer negativ. Zu Beginn der Besteigung, wenn die Steilheit noch im Zunehmen ist, krümmt sich der Berg in Vertikalrichtung auf ihn zu, die Krümmung in Vertikalrichtung ist dann also positiv. Gegen Ende des Aufstiegs, wenn die Steilheit allmählich geringer wird, krümmt sich der Berg von dem Wanderer in Vertikalrichtung weg. Ein Maulwurf, der unterirdisch die Wanderung begleitet, sieht dasselbe Krümmungsverhalten (soweit ein Maulwurf sehen kann) mit umgekehrtem Vorzeichen.

Wir kommen nun zur Gaußschen Krümmung eines Hyperflächenstücks. Zunächst eine kleine banale Bemerkung: Es gilt

$$K_X(a, tA) = K_X(a, A) \quad \text{für } t \neq 0 \ (t \in \mathbb{R}).$$

Wenn man sich in einem festen Punkt $a \in X$ für alle möglichen Krümmungen $K_X(a, A)$ interessiert (bei variablem A), so kann man sich auf Vektoren der Norm 1 beschränken, $\|A\| = 1$. Die Menge dieser Vektoren ist kompakt. Wir wissen außerdem, daß die Zuordnung

$$A \longmapsto K_X(a, A) \quad (A \neq 0)$$

stetig ist. Da eine stetige Funktion auf einem Kompaktum sowohl Minimum als auch Maximum besitzt, besitzt $K_X(a, A)$ ein Maximum und ein Minimum. (Es gilt sogar, daß die Menge all dieser Krümmungen ein abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} darstellt.) Sei m das Minimum und M das Maximum. Ersetzt man den Normalenvektor durch sein Negatives, so wird $-m$ das Maximum und $-M$ das Minimum. Das Produkt der beiden bleibt dasselbe! Dies führt zu:

3.3 Definition. Sei $X \in \mathbb{R}^n$ ein Hyperflächenstück. Die **Gaußsche Krümmung** in einem Punkt $a \in X$ ist das Produkt der beiden extremalen Krümmungen, DgK

$$\kappa_X(a) := \max_A K_X(a, A) \cdot \min_A K_X(a, A) \quad (A \neq 0).$$

(Dieses Produkt ist von der Wahl des Einheitsnormalenvektors unabhängig.)

Die Gaußsche Krümmung kann positiv und negativ sein. Der Bergsteiger in obigem Beispiel schreitet auf einer Fläche negativer Gaußscher Krümmung, solange er sich im Anstieg bei zunehmender Steilheit befindet. Erst weiter oben, wenn der Berg allmählich flacher wird, ist die Gaußsche Krümmung der Bergoberfläche positiv. Der Maulwurf unter ihm erlebt das genauso.

4. Theorema Egregium, Formulierung

Die Definition der Gaußschen Krümmung ist eine Größe, welche mit dem Krümmungsverhalten einer Fläche $X \subset \mathbb{R}^n$ relativ zu dem umgebenden Raum \mathbb{R}^3 zu tun hat. Gauß hat vermutet, daß diese Krümmung im Wahrheit nichts mit dem umgebenden Raum zu tun hat, sondern eine innere Eigenschaft von X ausdrückt. Was soll das heißen?

4.1 Theorema Egregium von Gauss. Die Gaußsche Krümmung von Flächenstücken im Raum \mathbb{R}^3 ist isometrisch invariant. Ist also $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Isometrie zwischen (zweidimensionalen) Flächenstücken im Raum, so gilt TEG

$$\kappa_X(a) = \kappa_Y(\varphi(a)) \quad (a \in X).$$

Vor dem Beweis benötigen wir eine Information über die Auswahl des Einheitsnormalenvektors. Dazu machen wir eine Vorbemerkung aus der linearen Algebra: Seien a_1, \dots, a_{n-1} Spaltenvektoren aus dem \mathbb{R}^n . Wir fassen sie zu einer $n \times (n-1)$ -Matrix $A = (a_1, \dots, a_{n-1})$ zusammen. Wir streichen aus dieser Matrix die i -te Zeile ($1 \leq i \leq n$) und erhalten eine $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix A_i . Wir definieren

$$d_i := (-1)^{i+1} \det(A_i).$$

Der Spaltenvektor d , welcher aus den d_1, \dots, d_n gebildet wird, heißt das Kreuzprodukt der Vektoren a_1, \dots, a_{n-1} :

$$d := a_1 \times \dots \times a_{n-1}.$$

Aus den Rechenregeln für die Determinante folgt (benutze Laplace'sche Entwicklung):

- 1) Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf den Vektoren a_1, \dots, a_{n-1} .
- 2) Das Kreuzprodukt ist dann und nur dann Null, wenn die $n-1$ Vektoren a_1, \dots, a_{n-1} linear abhängig sind.

Für uns reicht der Fall $n=3$, wo man dies leicht nachrechnen kann. Sei nun $\alpha : D \rightarrow X$ eine reguläre Parametrisierung eines Hyperflächenstücks. Wir betrachten die Jacobimatrix in einem Punkt $a \in D$. Sie besitzt $n-1$ Spalten,

$$J(\alpha, a) = (J_1(\alpha, a), \dots, J_{n-1}(\alpha, a)).$$

Diese bilden eine Basis des Tangentialraums $T_{\alpha(a)}X$. Ihr Kreuzprodukt ist daher ein Normalenvektor und

$$\mathbf{n}_\alpha(a) = \mathbf{n}(a) = \frac{J_1(\alpha, a) \times \dots \times J_{n-1}(\alpha, a)}{\|J_1(\alpha, a) \times \dots \times J_{n-1}(\alpha, a)\|}$$

ist ein Einheitsnormalenvektor im Punkt $\alpha(a)$. Dieser hängt natürlich von der Wahl der Parametrisierung ab.

4.2 Bemerkung. Sei $\alpha : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ ein regulär parametrisiertes Hyperflächenstück. Es existiert eine differenzierbare Auswahl AeD

$$D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \mathbf{n}_\alpha(x) \perp T_{\alpha(x)}X,$$

des Einheitsnormalenvektors (zum Punkt $\alpha(x)$).

Wir führen nun die Fundamentalformen eines parametrisierten Hyperflächenstücks ein:

4.3 Definition. Sei $\alpha : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ ein regulär parametrisiertes Hy- FuF
perflächenstück. Die **erste Fundamentalform** ist

$$g(x) = J(\alpha, x)' J(\alpha, x).$$

Die **zweite Fundamentalform** ist

$$h(x) = (h_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{mit} \quad h_{ij}(x) = \left\langle \mathbf{n}_\alpha(x), \frac{\partial^2 \alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle.$$

Die erste Fundamentalform haben wir bereits kennen gelernt, beispielsweise um die Geodätengleichung aufzustellen. Die zweite Fundamentalform wird Ähnliches für die Krümmung leisten.

4.4 Hilfssatz. Sei $\alpha : D \rightarrow X$ eine reguläre Parametrisierung eines bmZ
 d -dimensionalen Flächenstücks, $x \in D$ ein Parameterpunkt, $\tilde{x} = \alpha(x)$ der entsprechende Punkt auf X und schließlich $A \in \mathbb{R}^d$ ein von Null verschiedener Vektor, der dem Tangentialvektor

$$\tilde{A} = J(\alpha, x)(A) \in T_{\alpha(x)}X$$

entspreche. Dann gilt

$$K_X(\tilde{x}, \tilde{A}) = \frac{h(x)[A]}{g(x)[A]}.$$

Wir erinnern an die Bezeichnung

$$S[v] = \sum_{1 \leq i, j \leq d} s_{ij} v_i v_j$$

für eine symmetrische $d \times d$ -Matrix S und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Schreibt man v als Spaltenvektor, so gilt

$$S[v] = v' S v.$$

Beweis von 4.4. Sei $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ eine Geodätische mit $u(0) = \tilde{x}$ und $\dot{u}(0) = \tilde{A}$. Nach Definition gilt

$$\ddot{u}(0) = K_X(\tilde{x}, \tilde{A}) \|\dot{u}(0)\|^2 \mathbf{n}_\alpha(x).$$

Multipliziert man skalar mit $\mathbf{n}_\alpha(x)$, so erhält man

$$\langle \ddot{u}(0), \mathbf{n}_\alpha(x) \rangle = K_X(\tilde{x}, \tilde{A}) \|\dot{u}(0)\|^2.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus den Formeln

$$g(x)[v] = \|\dot{u}(0)\|^2 \quad \text{und} \quad h(x)[v] = \langle \mathbf{n}_\alpha(x), \ddot{u}(0) \rangle.$$

Um die beiden Formeln zu beweisen, schreibt man $u = \alpha \circ v$ mit einer Kurve $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow D$. Man leitet nun mittels der Kettenregel u zweimal ab und wertet dann bei $t = 0$ aus. Man benutze $v(0) = x$ und $\dot{v}(0) = A$ sowie die Tatsache, daß $\mathbf{n}(x)$ senkrecht auf $T_{\tilde{x}}X$ und damit auf $J(\alpha, x)(\dot{v}(0))$ steht. Die beiden Formeln und damit der Beweis von 4.4 folgen unmittelbar. \square

4.5 Hilfssatz. Seien g eine symmetrische positiv definite und h irgendeine symmetrische 2×2 -Matrix. Dann gilt mmD

$$\max_A \frac{h[A]}{g[A]} \cdot \min_A \frac{h[A]}{g[A]} = \frac{\det h}{\det g} \quad (A \neq 0).$$

Folgerung. Die Gaußsche Krümmung eines regulär parametrisierten Flächenstücks $u : D \rightarrow X \subset \mathbb{R}^3$ in einem Punkt $a = u(x)$ berechnet sich aus den beiden Fundamentalformen zu

$$\kappa_X(a) = \frac{\det h(x)}{\det g(x)}.$$

Beweis. Die Aussage ändert sich nicht, wenn man simultan die Ersetzung $g \mapsto u'gu$ und $h \mapsto u'hv$ mit einer invertierbaren 2×2 -Matrix vornimmt. Jede symmetrische reelle Matrix besitzt nach dem Spektralsatz eine Orthogonalbasis von Eigenvektoren oder anders ausgedrückt, es gibt eine orthogonale Matrix u ($u'u =$ Einheitsmatrix), so daß $u'gu = d$ eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonalelemente sind positiv, da g positiv definit ist. Da man aus den Diagonaleinträgen von d die Quadratwurzel ziehen kann, findet man eine Matrix – wir bezeichnen sie wieder mit u –, so daß $u'gu$ die Einheitsmatrix ist. (Daß u nicht mehr orthogonal zu sein braucht, macht nichts.) Wir können also von vornherein annehmen, daß g die Einheitsmatrix e ist. Ersetzt man nun h durch $v'hv$ mit einer orthogonalen Matrix und beachtet man $v'ev = e$, so kann man erreichen, daß auch h eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ist. Es ist eine einfache Übungsaufgabe zu zeigen, daß das Minimum bzw. Maximum der Funktion

$$\frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

gerade λ_1 bzw. λ_2 ist. Ihr Produkt ist gleich

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\det h}{\det g}. \quad \square$$

5. Theorema Egregium, Beweis

Sei $f : X \rightarrow \tilde{X}$ eine Isometrie von Hyperflächenstücken im \mathbb{R}^{n+1} . Wir wählen eine reguläre Parametrisierung $\alpha : D \rightarrow X$ und erhalten durch Zusammensetzung mit f eine reguläre Parametrisierung $\tilde{\alpha} : D \rightarrow \tilde{X}$. Wir bezeichnen die Fundamentalformen mit (g, h) bzw. (\tilde{g}, \tilde{h}) . Das Theorema Egregium besagt

$$\frac{\det h(x)}{\det g(x)} = \frac{\det \tilde{h}(x)}{\det \tilde{g}(x)}.$$

Da f eine Isometrie ist, gilt $g = \tilde{g}$. Das Theorema Egregium besagt also

$$\det h(x) = \det \tilde{h}(x).$$

Es ist somit unser Ziel, diese Formel zu beweisen. Da sich h in recht komplizierter Weise aus α berechnet, ist diese Formel alles andere als trivial. Wenn es gelingt, $\det h$ durch g auszudrücken, ist man natürlich fertig. Dies ist das Ziel der folgenden (recht komplizierten) Rechnungen.

5.1 Hilfssatz. *Es gilt*

ZnA

$$\left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right] \quad (= H_{ij}^k).$$

Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen. □

5.2 Hilfssatz. *Es gilt*

ZnB

$$\frac{\partial^2 \alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_k} + h_{ij}(x) \mathbf{n}_\alpha(x).$$

Beweis. Die Vektoren

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_n}, \mathbf{n}_\alpha(x)$$

sind linear unabhängig. (Der letzte steht senkrecht auf den ersten n .) Es gilt daher eine Darstellung

$$(*) \quad \frac{\partial^2 \alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma'_{ij}{}^k(x) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_k} + h'_{ij}(x) \mathbf{n}_\alpha(x)$$

mit zunächst irgendwelchen Γ', h' . Nach Definition der zweiten Fundamentalform ist

$$h_{ij} = \left\langle \mathbf{n}_\alpha(x), \frac{\partial^2 \alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle.$$

Multipliziert man (*) skalar mit $\mathbf{n}_\alpha(x)$, so folgt $h_{ij} = (h')_{ij}$. Multipliziert man (*) skalar mit $\partial \alpha / \partial x_k$, so folgt $\Gamma'_{ij}{}^k = \Gamma_{ij}^k$ mittels 5.1. □

Wir leiten jetzt die Formel aus Hilfssatz 5.2 nach x_k ab und multiplizieren das Resultat skalar mit den partiellen Ableitungen von α .

5.3 Hilfssatz. *Es gilt*

ZnC

$$\left\langle \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \Gamma_{ik}^\nu \Gamma_{j\nu}^\mu g_{\mu l} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ik}^\nu}{\partial x_j} g_{\nu l} - h_{ik} h_{jl}.$$

Beweis. Aus 5.2 folgt zunächst

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle &= \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{ik}^\nu \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_l}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_\nu} \right\rangle + \\ &\quad \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ik}^\nu}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_\nu}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x_j} \left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle + h_{ik} \left\langle \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial x_j}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle. \end{aligned}$$

Um diese Formel zu vereinfachen, nutzen wir

$$\left\langle \mathbf{n}_\alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle = 0$$

aus und die Folgerelation (Ableiten nach x_j)

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{n}_\alpha}{\partial x_j}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle + h_{jl} = 0$$

Schließlich und endlich benutze man

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x_\nu}, \frac{\partial \alpha}{\partial x_l} \right\rangle = g_{\nu l}.$$

und Hilfssatz 5.3 ist bewiesen. \square

Die Formel aus Hilfssatz 5.3 hat eine merkwürdige Eigenschaft. Die linke Seite ändert sich nicht wenn man j mit k vertauscht. Auf der rechten Seite ist dies nicht offensichtlich. Vergleicht man die beiden rechten Seiten (einmal j mit k vertauscht, so erhält man eine Relation, in der nur die Funktionen h und Funktionen, die sich aus g berechnen lassen eingehen. Wir definieren zunächst die g -Terme, die in diese Relation eingehen:

5.4 Definition. *Sei (D, g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Die „Krümmungsgrößen“ sind* DKt

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i &= \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x_k} + \sum_{\mu} \Gamma_{kj}^\mu \Gamma_{l\mu}^i - \sum_{\mu} \Gamma_{lj}^\mu \Gamma_{k\mu}^i, \\ R_{ijkl} &= \sum_{\nu} g_{i\nu} R_{jkl}^\nu. \end{aligned}$$

Aus 5.3 folgt nun auf dem angegebenen Wege:

5.5 Satz. Sei $\alpha : D \rightarrow X$ eine reguläre Parametrisierung eines Hy- **GkK**
perflächenstücks. Es gilt:

$$R_{likj} = h_{ik}h_{lj} - h_{ij}h_{kl}$$

Folgerung. Die Gauß'sche Krümmung eines regulär parametrisierten Flä-
chenstücks im \mathbb{R}^3 ist

$$\kappa_X(\alpha(x)) = -\frac{R_{1212}(x)}{\det g(x)}.$$

Unser Ziel, die Gauß'sche Krümmung ganz durch g und abgeleitete Größen
auszudrücken, ist somit erreicht. Damit ist das Theorema Egregium bewiesen. \square

Sei (D, g) ein zweidimensionales pseudoriemannsches Gebiet. Es liegt nahe,
die Gauß'sche Krümmung durch die Formel

$$\kappa_X(\alpha(x)) = -\frac{R_{1212}(x)}{\det g(x)}$$

zu definieren (unabhängig von der Frage, ob g von einem Flächenstück im Raum
kommt und auch im indefiniten Fall.) Es ist zu erwarten, dass auch in dieser
allgemeineren Situation das Theorema Egregium gilt, dass also Krümmung
isometrisch invariant ist. Dies sollte sich eigentlich ausrechnen lassen. Wir
wissen ja, wie sich die Fundamentalform g bei Isometrien transformiert. Wir
formulieren gleich die allgemeinsten Transformationsformeln (in beliebigen
Dimensionen).

5.6 Satz. Sei $\varphi : (D, g) \rightarrow (\tilde{D}, \tilde{g})$ eine Isometrie pseudoriemannscher Ge- **TrK**
biete. Es gilt

$$R_{ijkl}(x) = \sum_{\mu, \nu, \kappa, \lambda} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_\kappa}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_l} \tilde{R}_{\mu\nu\kappa\lambda}(y).$$

Die behauptete Transformationsformel folgt hieraus in Verbindung mit

5.7 Bemerkung. Es gilt **Srt**

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$$

sowie

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0 \quad (\text{Bianchi-Identität}).$$

Insbondere ist im Falle der Dimension zwei R_{1212} die einzig relevante Krüm-
mungsgröße.

Aus den angegebenen Formeln folgt nun folgende abstrakte Version des Theo-
rem Egregium 4.1.

5.8 Theorem. Die Gauß'sche Krümmung zweidimensionaler pseudorie- **TEGa**
mannscher Gebiete ist isometrisch invariant.

Kapitel III. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1. Der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit

Wir benutzen im folgenden den Begriff des topologischen Raumes. Alle topologischen Räume, die wir betrachten wollen, sollen Hausdorff'sch sein, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten sollen disjunkte Umgebungen existieren. Jedem metrischen Raum unterliegt ein topologischer Raum. Ist X ein topologischer Raum, so kann auch jede Teilmenge Y mit einer Topologie versehen werden, der sogenannten induzierten Topologie. Eine Teilmenge $V \subset Y$ heiße offen, wenn es eine offene Teilmenge $U \subset X$ gibt, so dass $V = U \cap Y$ gilt. Somit können insbesondere Teilmengen des \mathbb{R}^n als topologische Räume aufgefasst werden. Wir machen im folgenden stets stillschweigend eine weitere Annahme:

Der Raum X hat abzählbare Basis der Topologie, d.h. es gibt ein abzählbares System offener Mengen U_1, U_2, \dots , so daß jede offene Menge sich als Vereinigung von Mengen dieses Systems darstellen läßt.

Beispielsweise hat der \mathbb{R}^n abzählbare Basis der Topologie. Man betrachte das abzählbare System aller offenen Kugeln mit rationalen Radien um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten. Hat X abzählbare Basis der Topologie, so hat auch jede Teilmenge – versehen mit der induzierten Topologie – abzählbare Basis der Topologie.

Der Vorteil von Räumen mit abzählbarer Topologie ist der folgende.

Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. Eine Teilmenge $K \subset X$ ist genau dann berdeckungskompakt, falls jede Folge in K einen Häufungspunkt in K hat.

1.1 Definition. *Eine **Karte** auf einem topologischen Raum X ist eine topologische Abbildung einer offenen Teilmenge $U_\varphi \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ (n geeignet),* Dka

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad U_\varphi \subset X, \quad V_\varphi \subset \mathbb{R}^n \text{ (offen)}.$$

*Ein **Atlas** \mathcal{A} auf X ist eine Menge von Karten, deren Definitionsbereiche ganz X überdecken,*

$$X = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi.$$

Sind φ, ψ zwei Karten auf X , so definiert man die Kartenwechselabbildung durch

$$\gamma : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \longrightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi), \quad \gamma(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Abweichend von der strengen Konvention der Mengenlehre schreibt man häufig

$$\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}.$$

Solcher Mißbrauch der Schreibweise bedingt, daß man sich im Hintergrund über die genauen Definitions- und Zielbereiche klar ist. Interessant ist die Kartenwechselabbildung nur, wenn der Durchschnitt $U_\varphi \cap U_\psi$ nicht leer ist. Man braucht dies jedoch nicht extra zu fordern; wir halten uns an die Konvention, daß es von der leeren Menge in eine beliebige Menge genau eine Abbildung (die leere Abbildung) gibt.

1.2 Definition. *Man nennt zwei Karten*

Dkw

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi \subset \mathbb{R}^n, \quad \psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi \subset \mathbb{R}^m$$

differenzierbar verträglich, falls gilt:

1. $\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset \mathbb{R}^m$ sind offen.
2. Die Kartenwechselabbildung $\psi \circ \varphi^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus.

Wenn $U_\varphi \cap U_\psi$ nicht leer ist, so muß natürlich $n = m$ gelten.

1.3 Definition. *Ein Atlas \mathcal{A} heißt differenzierbar, falls alle Kartenwechsel-*

Dad

abbildungen in \mathcal{A} differenzierbar verträglich sind.

Zwei Atlanten \mathcal{A}, \mathcal{B} heißen differenzierbar verträglich, falls ihre Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ differenzierbar ist.

Man muß sich überlegen, daß dies eine Äquivalenzrelation ist. Nicht offensichtlich ist lediglich die Transitivität,

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \sim \mathcal{C} \implies \mathcal{A} \sim \mathcal{C}.$$

Wir verzichten auf den Beweis.

1.4 Definition. *Eine differenzierbare Struktur auf einer Menge X ist*

DMS

eine volle Äquivalenzklasse äquivalenter Atlanten.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine Menge mit einer ausgezeichneten differenzierbaren Struktur.

Somit definiert jeder differenzierbarer Atlas \mathcal{A} auch eine differenzierbare Struktur. Äquivalente Atlanten definieren dieselbe differenzierbare Struktur.

1.5 Bemerkung. Sei \mathcal{A} ein differenzierbarer Atlas. Es gibt einen größten Atlas \mathcal{A}_{\max} , welcher mit \mathcal{A} differenzierbar verträglich ist. Er besteht aus allen Karten φ , welche mit allen Karten aus \mathcal{A} differenzierbar verträglich sind. Es gilt $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\max}$. AmD

Zwei Atlanten sind genau dann äquivalent, wenn ihre maximalen Atlanten übereinstimmen.

Einfache Manipulationen mit differenzierbaren Karten:

- 1) Man kann eine Karte $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ verkleinern: Man nimmt einen offenen Teil $V'_\varphi \subset V_\varphi$, dessen Urbild $U'_\varphi \subset U_\varphi$ und definiert $\varphi' : U'_\varphi \rightarrow V'_\varphi$ durch Einschränken.
- 2) Sei $\sigma : V_\varphi \rightarrow V'$ irgendein Diffeomorphismus auf eine andere offene Teilmenge V' des \mathbb{R}^n . Dann ist auch $\sigma \circ \varphi$ eine differenzierbare Karte.

Diese beiden Manipulationen reichen aus, um zu zeigen:

Zu jedem Punkt $a \in X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine Karte φ mit

$$V_\varphi = \{ x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1 \}, \quad \varphi(a) = 0.$$

Das einfachste Beispiel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist der \mathbb{R}^n , versehen mit dem tautologischen Atlas, welcher nur aus einer einzigen Karte, der Identität $\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ besteht. Der zugehörige maximale Atlas besteht aus allen Diffeomorphismen

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad U_\varphi, V_\varphi \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

Allgemeiner kann jeder endlich dimensionale reelle Vektorraum V mit einer Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit versehen werden. Man nehme den Atlas aller Vektorraumisomorphismen $V \rightarrow \mathbb{R}^n$ als definierenden Atlas.

2. Differenzierbare Abbildungen

2.1 Definition. Eine Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten $f : X \rightarrow Y$ heißt differenzierbar, falls sie stetig ist und falls für je zwei differenzierbare Karten φ auf X und ψ auf Y gilt, daß $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ im üblichen Sinne differenzierbar ist. DdA

Wir begehen hierbei wieder einen „Bezeichnungsmißbrauch“: Unter $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ versteht man die Abbildung

$$\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi) \longrightarrow V_\psi, \quad x \longmapsto \psi(f(\varphi^{-1}(x))).$$

Man beachte, daß die linke Seite offen im \mathbb{R}^n ist. (Um dies zu garantieren, mußte man die Stetigkeit von f mit in die Definition aufnehmen. Trivial aber dennoch fundamental wichtig ist:

2.2 Bemerkung. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Zu jedem $a \in X$ möge ein Kartenpaar φ auf X und ψ auf Y mit $a \in U_\varphi$ und $f(a) \in U_\psi$ existieren, so daß $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist. Dann ist f differenzierbar. CdA

Hierbei wird benutzt, daß je zwei differenzierbare Karten differenzierbar verträglich sind.

Spezialfälle differenzierbarer Abbildungen sind differenzierbare Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Hier ist lediglich zu fordern, daß $f \circ \varphi^{-1}$ für alle differenzierbaren Karten differenzierbar ist.

Bezeichnung.

$$\mathcal{C}^\infty(X, Y), \quad \mathcal{C}^\infty(X) = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$$

für die Menge der differenzierbaren Abbildungen (Funktionen).

Die folgenden Permanenzregeln sind trivial:

Die identische Selbstabbildung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist differenzierbar.

Die Zusammensetzung $g \circ f$ differenzierbarer Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ ist differenzierbar.

Ebenfalls trivial ist: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen, welche wie im vorigen Abschnitt erläutert, als differenzierbare Mannigfaltigkeiten aufgefaßt werden. Eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ ist genau dann differenzierbar im Sinne der gewöhnlichen reellen Analysis, wenn sie eine differenzierbare Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten ist.

Schließlich erwähnen wir noch, daß jeder offene Teil $U \subset X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit selbst eine naheliegende Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt. Ist $U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ eine Karte auf X , so kann man die eingeschränkte Karte $U_\varphi \cap U \rightarrow \varphi(U_\varphi \cap U)$ auf U betrachten. Ist \mathcal{A} ein Atlas von X , so kann man den eingeschränkten Atlas $\mathcal{A}|_U$ betrachten. Er definiert eine differenzierbare Struktur auf U . Diese hängt nur von der Äquivalenzklasse von \mathcal{A} ab. Die natürliche Inklusion $U \rightarrow X$ ist differenzierbar.

Schließlich prägen wir noch den Begriff des Diffeomorphismus $f : X \rightarrow Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Dies ist eine bijektive Abbildung, so daß sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar sind.

Wir erhalten eine neue Interpretation des maximalen Atlas:

2.3 Bemerkung. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Elemente des maximalen Atlas sind nichts anderes als Diffeomorphismen von offenen Teilen von X auf offene Teile eines \mathbb{R}^n . dKd

Dabei sind offene Teile von X und \mathbb{R}^n als differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

Untermannigfaltigkeiten

2.4 Definition. Eine Teilmenge $Y \subset X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit heißt **glatt**, falls es zu jedem Punkt $a \in Y$ eine differenzierbare Karte φ auf X mit $a \in U_\varphi$, $0 \in V_\varphi$, $\varphi(a) = 0$ gibt, so daß DgT

$$\varphi(Y \cap U_\varphi) = \{ x \in V_\varphi, \quad 0 = x_{d+1} = \cdots = x_n \}$$

mit geeignetem d , $0 \leq d \leq n$ gilt.

Der Spezialfall n ist zugelassen: Offene Teilmengen von X sind spezielle glatte Mengen. Wir versehen Y mit einer differenzierbaren Struktur: Durch Einschränkung von φ in 2.4 erhält man eine bijektive Abbildung

$$\varphi_0 : Y \cap U_\varphi \longrightarrow \{ x \in \mathbb{R}^d; \quad (x, 0, \dots, 0) \in V_\varphi \}.$$

Dies ist eine Karte auf Y und die Menge der so definierten Karten bildet einen Atlas. Es ist ziemlich klar, daß dieser Atlas differenzierbar ist. Durch ihn wird Y zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Die natürliche Inklusion $i : Y \rightarrow X$, $i(x) = x$, ist differenzierbar. Mehr noch: eine Abbildung $f : Z \rightarrow Y$ einer weiteren differenzierbaren Mannigfaltigkeit Z in Y ist genau dann differenzierbar, wenn die Zusammensetzung $i \circ f : Z \rightarrow X$ mit der natürlichen Inklusion differenzierbar ist.

Eine differenzierbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten heißt eine *Einbettung*, falls es einen glatten Teil $Z \subset Y$ sowie einen Diffeomorphismus $g : X \rightarrow Z$ gibt, so daß $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Von besonderer Bedeutung sind glatte Teilmengen des \mathbb{R}^n . Man spricht auch von eingebetteten Mannigfaltigkeiten im Gegensatz zu den abstrakten Mannigfaltigkeiten. Beispiele sind die bereits betrachteten parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten.

2.5 Bemerkung. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann glatt, wenn jeder Punkt eine offene Umgebung (in X) besitzt, welche sich regulär parametrisieren läßt. Ist φ eine Karte, so ist $\alpha = \varphi^{-1}$ eine reguläre Parametrisierung und umgekehrt. Tg1R

Der Beweis ergibt sich aus dem Satz für implizite Funktionen. Wir verzichten auf Einzelheiten. □

Es läßt sich beweisen, daß jede differenzierbare Mannigfaltigkeit X diffeomorph zu einer eingebetteten Mannigfaltigkeit $Y \subset \mathbb{R}^n$ ist, daß also eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (n geeignet) existiert. (Hierbei wird verwendet, daß in X das Trennungsaxiom gilt und daß X abzählbare Basis der Topologie hat.)

3. Tangentialraum

Ein Wesensmerkmal des Begriffs der differenzierbaren Abbildung $f : U \rightarrow V$ offener Teile $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ist die lineare Approximation im Kleinen. Zu jedem Punkt existiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – vermittelt durch die Jacobimatrix $J(f, a)$ – welche f in der Nähe von a gut approximiert. Dieses Konzept will man auch für differenzierbare Mannigfaltigkeiten zur Verfügung haben. Man benötigt dazu für jeden Punkt a einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X einen Vektorraum $T_a X$ und es soll für jede differenzierbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung $T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$ erklärt werden. Es zeigt sich, daß eine solche Konstruktion möglich und mit sehr einfachen naheliegenden Forderungen sogar eindeutig ist. Wir beginnen damit, diese Forderungen zu formulieren:

3.1 Definition. Eine *Tangentialraumtheorie* besteht aus folgenden Vorschriften: DTTa

1. Jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und jedem Punkt $a \in X$ ist ein reeller Vektorraum $T_a X$ – der sogenannte Tangentialraum – zugeordnet.
2. Jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \rightarrow Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und jedem Punkt $a \in X$ ist eine lineare Abbildung – die sogenannte Tangentialabbildung –

$$T_a f : T_a X \longrightarrow T_{f(a)} Y$$

zugeordnet.

3. Jedem endlich dimensionalen Vektorraum V (aufgefaßt als differenzierbare Mannigfaltigkeit) und jedem $a \in V$ ist ein Isomorphismus

$$V \xrightarrow{\sim} T_a V$$

zugeordnet.

Folgende Bedingungen sollen erfüllt sein.

- a) **Lokalität:** Ist $U \subset X$ ein offener Teil und $i : U \rightarrow X$ die natürliche Inklusion, so ist für $a \in U$ die Tangentialabbildung

$$T_a i : T_a U \xrightarrow{\sim} T_a X$$

ein Isomorphismus.

- b) **Kettenregel:** Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ differenzierbare Abbildungen, so gilt

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)} g \circ T_a f.$$

Außerdem seien die Tangentialabbildungen der identischen Selbstabbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ die identischen Abbildungen $T_a X \rightarrow T_a X$.

- c) Ist $A : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung endlich dimensionaler Vektorräume, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_a V & \xrightarrow{T_a A} & T_{Aa} W \end{array}$$

kommutativ. (Die Vertikalpfeile sind die Isomorphismen aus 2.)

- d) **Anbindung an die Jacobimatrix:** Sei $f : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung offener Teile $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$. Für einen Punkt $a \in U$ ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J(f,a)} & \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_a \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_a f} & T_{f(a)} \mathbb{R}^m \end{array}$$

Wir wollen annehmen, daß eine solche Theorie existiert und einige ihrer Eigenschaften ableiten. Diese führen dann auch zu einem Eindeutigkeits- und Existenzbeweis. Zunächst einmal wollen wir den Isomorphismus $V \rightarrow T_a V$ benutzen, um einen Vektorraum mit seinen Tangentialräumen zu identifizieren. Ebenso wollen wir für einen offenen Teil $U \subset X$ die Tangentialräume $T_a U$ und $T_a X$ ($a \in U$) mittels des Isomorphismus a) identifizieren. Diese Identifikationen werden zu keinen Konflikten führen. Wenn Probleme entstehen sollten, kann man sie jederzeit wieder aufheben.

Nach diesen Identifikationen kann man sagen: Der Tangentialraum einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $a \in U$ ist der \mathbb{R}^n ,

$$T_a U = \mathbb{R}^n \quad \text{für } U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

Für eine differenzierbare Abbildung

$$f : U \rightarrow V, \quad U \subset \mathbb{R}^n, \quad V \subset \mathbb{R}^m \text{ (beide offen),}$$

und einen Punkt $a \in U$ stimmen die Tangentialabbildung und die durch die Jacobimatrix vermittelte lineare Abbildung überein:

$$T_a f = J(f, a).$$

Sei $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$, $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine differenzierbare Karte. Wir erhalten für $a \in U_\varphi$ einen Isomorphismus $T_a X \cong \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist die Dimension von $T_a X$ gleich der Dimension des Kartenblattes V_φ . Man nennt

$$\dim_a X = \dim T_a X = n \quad \text{,falls } V_\varphi \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

die Dimension von X in a . Man nennt X reindimensional, wenn seine Dimension in allen $a \in X$ gleich ist und man schreibt dann

$$\dim X = \dim_a X.$$

Die Menge der Punkte $X(n)$ einer festen Dimension n ist offenbar offen in X . Da X die disjunkte Vereinigung aller $X(n)$ ist, ist sie auch abgeschlossen (da ihr Komplement offen ist). Zusammenhängende Räume sind dadurch gekennzeichnet, daß sie außer \emptyset und ganz X keine offenen und abgeschlossenen Teile enthalten. Nicht leere zusammenhängende Räume sind daher immer reindimensional.

Wir haben gesehen, daß eine differenzierbare Karte einen Isomorphismus $T_a X \cong \mathbb{R}^n$ nach sich zieht. Da der Begriff der differenzierbaren Abbildung über Karten definiert wurde, kann man viele Aussagen der lokalen Theorie auf beliebige differenzierbare Mannigfaltigkeiten übertragen, beispielsweise den Satz für umkehrbare Funktionen:

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung und $a \in X$ ein Punkt. Folgende beiden Aussagen sind äquivalent:

1. Die Tangentialabbildung $T_a f : T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$ ist ein Isomorphismus.
2. Es gibt eine offene Umgebung U von $a \in X$, so daß f einen Diffeomorphismus von U auf eine offene Umgebung von $f(a)$ vermittelt.

Der Satz für implizite Funktionen kann folgendermaßen formuliert werden.

1. Die Tangentialabbildung $T_a f : T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$ ist injektiv
2. Es gibt eine offene Umgebung U von $a \in X$, so daß f eine Einbettung von U in Y vermittelt.

Richtungsableitung

Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Der Vektor $\dot{u}(t)$ beschreibt die Richtung der Kurve u zum Parameterwert t . Diese kann man sofort auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Sei $u : I \rightarrow X$ eine differenzierbare Kurve in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dazu sollte eigentlich $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall sein, da nur offene Intervalle differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind. Man kann jedoch den Begriff sofort auf nicht notwendig offene Intervalle ausdehnen. Wir übergehen dies und nehmen der Einfachheit halber an, I sei ein offenes Intervall. Man kann dann die Tangentialabbildung

$$T_t u : T_t I \longrightarrow T_{u(t)} X$$

betrachten. Wir benutzen die Identifizierung von \mathbb{R} mit $T_a I$ und können dann $(T_t u)(1)$ betrachten. Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$, so kann man $T_{u(t)} X$ mit \mathbb{R}^n identifizieren. Man bestätigt danach sofort

$$\dot{u}(t) = (T_t u)(1).$$

Dies führt zu folgender

3.2 Definition. Sei $u : I \rightarrow X$ eine differenzierbare Kurve in der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X . Man definiert für $t \in I$ DTp

$$\dot{u}(t) := (T_t u)(1).$$

und nennt dies den **Tangentialvektor** von u zum Parameterwert t .

Aus der lokalen Theorie folgert man:

3.3 Bemerkung. Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $A \in T_a X$ ein Tangentialvektor. Es gibt eine glatte Kurve $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ mit $u(0) = a$ und $\dot{u}(0) = A$. Jeder Tangentialvektor ist also Tangentialvektor einer geeigneten Kurve. BTk

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$ ein Punkt und $A \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Unter der Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung A versteht man

$$\left. \frac{d}{dt} f(a + tA) \right|_{t=0}.$$

Sei nun anstelle $a + tA$ eine Kurve $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ mit $u(0) = a$ und $\dot{u}(0) = A$ gegeben. Mittels der Kettenregel zeigt man

$$\left. \frac{d}{dt} f(a + tA) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(u(t)) \right|_{t=0}.$$

Damit ist nahegelegt wie man den Begriff der Richtungsableitung auf Mannigfaltigkeiten definiert.

3.4 Bemerkung und Definition. Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $A \in T_a X$ ein Tangentialvektor. Wir wählen eine glatte Kurve $u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ mit $u(0) = a$ und $\dot{u}(0) = A$. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so hängt BDr

$$A(f) := \left. \frac{d}{dt} f(u(t)) \right|_{t=0}$$

nicht von der Wahl von u ab. Man nennt $A(f)$ die Richtungsableitung von f in Richtung A .

Damit haben wir jedem Tangentialvektor $A \in T_a X$ eine Abbildung

$$C^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto A(f),$$

zugeordnet. Allgemeiner erhalten wir für jede offene Umgebung $a \in U \subset X$ die Abbildung

$$C^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto A(f) \quad (A \in T_a X).$$

Welche Abbildungen bekommt man auf diese Weise? Unmittelbar klar ist, daß die Produktregel $A(fg) = f(a)A(g) + g(a)A(f)$ gelten muß.

3.5 Definition. Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. DDe
Eine **Derivation** in a ist eine Familie von \mathbb{R} -linearen Abbildungen

$$D_U : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (a \in U \subset X \text{ offen})$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist $a \in V \subset U$ eine kleinere offene Umgebung, so gilt

$$D_V(f|_V) = D_U(f)|_V \quad \text{für } f \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

2. Es gilt die Produktregel

$$D_U(fg) = f(a)D_U(g) + g(a)D_U(f).$$

Wir bezeichnen mit $\text{Der}(\mathcal{C}_{X,a}^\infty, \mathbb{R})$ die Menge aller Derivationen von X in a . Dies ist ein reeller Vektorraum. Wie wir gesehen haben definiert die Richtungsableitung eine Derivation. Es gilt mehr:

3.6 Satz. Sei a ein Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Abbil- SRa
dung

$$T_a X \longrightarrow \text{Der}(\mathcal{C}_{X,a}^\infty, \mathbb{R}), \quad A \longmapsto \text{Richtungsableitung},$$

ist ein Isomorphismus.

Damit ist bewiesen, daß eine Tangentialraumtheorie im Wesentlichen (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist und es wird ein Existenzbeweis nahegelegt.

3.7 Definition. DTT

$$T_a X := \text{Der}(\mathcal{C}_{X,a}^\infty, \mathbb{R}).$$

Es ist auch klar, wie man die Tangentialabbildung

$$T_a f : T_a X \longrightarrow T_{f(a)} Y \quad (f : X \longrightarrow Y, a \in X)$$

zu definieren hat. Sei $D \in T_a X$, man will $D' = T_a f(D)$ definieren. Dazu muß man einer Funktion $g \in \mathcal{C}(V)$, $f(a) \in V \subset Y$ eine Zahl zuordnen. Man definiert

$$D'(g) = D(g \circ f).$$

Entscheidend ist, daß im Falle \mathbb{R}^n das richtige herauskommt. Spezielle Elemente von $\text{Der}(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n,a}^\infty, \mathbb{R})$ sind die partiellen Ableitungen im Punkt a :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right]_a : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad (a \in U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen})$$

3.8 Hilfssatz. *Die Abbildung*

HTr

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n, a}^\infty, \mathbb{R}), \quad A \mapsto \sum_{i=1}^n A_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right]_a,$$

ist ein Isomorphismus.

Der Beweis ergibt sich aus den folgenden beiden Beobachtungen:

1a) Sei $f = gh$ mit $g(a) = h(a) = 0$. Aus der Produktformel folgt $D(f) = 0$ für jede Derivation D in a .

1b) Sei f die Funktion konstant 1. Aus $f^2 = f$ und der Produktformel folgt $D(f) = 0$ für jede Derivation D . Insbesondere gilt $D(f) = 0$ für jede konstante Funktion.

2) Aus der Taylorschen Formel kann man folgern, daß f (in einer konvexen Umgebung von a) eine Darstellung der Form

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)g_i(x) \quad \text{mit} \quad g_i(a) = 0.$$

besitzt. Wichtig hierbei ist, daß die Funktionen g_i wieder differenzierbar sind. Dies folgt aus den expliziten Darstellungen des Restglieds in der Taylorschen Formel durch ein Integral in Verbindung mit der Leibnizschen Regel (Vertauschung von Differentiation mit Integration). Somit ist die Wirkung einer Derivation in a durch den linearen Teil der Taylorformel bestimmt. \square

Hilfssatz 3.8 zeigt allgemeiner, daß für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V durch die Richtungsableitung ein Isomorphismus

$$V \xrightarrow{\sim} \text{Der}(\mathcal{C}_{V, a}^\infty, \mathbb{R})$$

gegeben wird.

3.9 Satz. *Durch*

DTt

$$T_a X := \text{Der}(\mathcal{C}_{X, a}^\infty, \mathbb{R})$$

mit obigen Tangentialabbildungen $T_a f$ und den angegebenen Isomorphismen $V \cong T_a V$ (Richtungsableitung) wird eine Tangentialraumtheorie definiert.

Der Beweis folgt aus 3.8. \square

4. Das Tangentialbündel

Seien X, X' zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Ist (U, φ) eine differenzierbare Karte auf X und (U', φ') eine ebensolche von X' , so ist

$$\varphi \times \varphi' : U \times U' \longrightarrow V \times V'$$

eine Karte auf $X \times X'$. Wir identifizieren hierbei $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ auf naheliegende Weise mit \mathbb{R}^{n+m} . Man zeigt leicht, daß hierdurch ein differenzierbarer Atlas auf $X \times X'$ definiert wird und daß die so definierte differenzierbare Mannigfaltigkeit $X \times X'$ folgende universelle Eigenschaft besitzt:

4.1 Bemerkung. *Das kartesische Produkt zweier differenzierbarer Mannigfaltigkeiten X, Y hat folgende universelle Eigenschaft:* UeK

a) *Die beiden Projektionen*

$$X \times Y \longrightarrow X, Y, \quad p(x, y) = x, \quad q(x, y) = y,$$

sind differenzierbar.

b) *Eine Abbildung $Z \rightarrow X \times Y$ einer dritten differenzierbaren Mannigfaltigkeit Z in $X \times Y$ ist genau dann differenzierbar, wenn die Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen $Z \rightarrow X, Z \rightarrow Y$ differenzierbar sind.*

Der Beweis ist klar. □

Die beiden Projektionen induzieren Tangentialabbildungen

$$T_{(a,b)}X \times Y \longrightarrow T_aX, T_bY,$$

die man zu einer Abbildung

$$T_{(a,b)}X \times Y \longrightarrow T_aX \times T_bY$$

zusammenfassen kann. Ebenfalls klar ist

4.2 Bemerkung. *Die natürliche Abbildung* TkP

$$T_{(a,b)}X \times Y \longrightarrow T_aX \times T_bY,$$

ist ein Isomorphismus.

Eine ähnliche Konstruktion ist die des Tangentialbündels TX einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Als Menge besteht TX aus Paaren (a, A) mit $a \in X$ und $A \in T_aX$. Man hat eine kanonische Projektion

$$\pi : TX \longrightarrow X.$$

Ist $\varphi : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Karte auf X , so erhält man für jedes $a \in U$ einen Isomorphismus

$$T_aX = T_aU \longrightarrow T_{\varphi(a)}V = \mathbb{R}^n.$$

Damit erhält man eine bijektive Abbildung

$$\pi^{-1}U \longrightarrow V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

Die Menge all dieser Karten definiert offenbar einen differenzierbaren Atlas auf TX .

4.3 Bemerkung. *Das Tangentialbündel TX einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit trägt eine natürliche Struktur als differenzierbare Mannigfaltigkeit.* TBm

Die Projektion $TX \rightarrow X$ ist differenzierbar. Diese und ähnliche Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Konstruktion des Atlas.

5. Vektorraumbündel

Wir abstrahieren von dem Tangentialbündel $\pi : TX \rightarrow X$. Wir betrachten allgemeiner differenzierbare Abbildungen $\pi : E \rightarrow X$. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$E_a := \pi^{-1}(a) \quad \text{für } a \in X$$

und

$$E_U := \pi^{-1}(U) \quad \text{für } U \subset X \text{ offen.}$$

5.1 Definition. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Gegeben seien* DevVB

- a) *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit E .*
- b) *Eine differenzierbare Abbildung $\pi : E \rightarrow X$.*
- c) *Für jedes $a \in X$ sei E_a mit einer Struktur als reellem Vektorraum versehen.*

Man nennt E zusammen mit den Daten a), b), c) ein Vektorraumbündel über X , falls es einen endlichdimensionalen Vektorraum F_0 gibt, so dass zu jedem $a \in X$ eine offene Umgebung U sowie ein Diffeomorphismus $\sigma : U \times F_0 \xrightarrow{\sim} E_U$ existiert, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- 1) *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} U \times X & \xrightarrow{\sigma} & E_U \\ \downarrow & \swarrow \pi & \\ U & & \end{array}$$

ist kommutativ. (Der Vertikalpfeil bezeichnet die natürliche Projektion.)

- 2) *Die aus 1) entspringende bijektive Abbildung*

$$F_0 \longrightarrow E_a, \quad f \longmapsto \sigma(a, f)$$

ist für jedes $a \in X$ ein Vektorraumisomorphismus.

Man nennt F_0 die Faser des Vektorraumbündels, muss dabei aber bedenken, dass F_0 nur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Wenn man will, kann man immer $F_0 = \mathbb{R}^n$ nehmen. Die Dimension von F_0 nennt man den Rang des Vektorraumbündels. Das einfachste Beispiel für ein Vektorraumbündel ist das triviale Bündel $X \times F_0 \rightarrow X$ (natürliche Projektion). Einer weniger triviales Beispiel ist das Tangentialbündel.

Ist $E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel und $U \subset X$ eine offene Teilmenge, so ist auch $E_U \rightarrow U$ ein Vektorraumbündel. Die Bedingungen 2),3) besagen, dass Vektorraumbündel lokal trivial sind.

Schnitte von Vektorraumbündeln

Unter einem *Schnitt* einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ versteht man eine Abbildung $s : Y \rightarrow X$ mit $f \circ s = \text{id}_Y$. Die Abbildung s wählt (schneidet) also aus jeder Faser einen Punkt aus. Wenn ein Schnitt existiert, so ist f surjektiv. Allgemeiner versteht man unter einem Schnitt über einer Teilmenge $B \subset Y$ eine Abbildung $s : B \rightarrow X$ mit $f(s(b)) = b$ für $b \in B$.

Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Unter einem Schnitt verstehen wir im folgenden immer eine *differenzierbare* Abbildung $s : U \rightarrow E$ mit der Eigenschaft $\pi \circ s(a) = a$ für $a \in U$. Im Falle $U = X$ spricht man auch von einem globalen Schnitt. Wir bezeichnen die Menge der Schnitte mit $\mathcal{E}(U)$. Man kann Schnitte von Vektorraumbündeln addieren und mit differenzierbaren Funktionen multiplizieren.

5.2 Bemerkung. Sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel. Die Menge $\mathcal{E}(U)$ der Schnitte über einer offenen Teilmenge $U \subset X$ trägt eine natürliche Struktur als $\mathcal{C}^\infty(U)$ Modul. SchM

Man kann Schnitte in naheliegender Weise einschränken. Sind also $V \subset U$ offene Teile von X , so ist die Einschränkungabbildung $\mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(V)$, $s \mapsto s|_V$, in naheliegender Weise \mathcal{C}^∞ -linear: Für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ gilt $(fs)|_V = (f|_V)(s|_V)$. Außerdem gilt folgende Verheftungseigenschaft (auch Garbeneigenschaft genannt).

5.3 Bemerkung. Sei $U = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $U \subset X$. Für jedes i sei ein Schnitt $s_i \in \mathcal{E}(U_i)$ gegeben. Es gelte $s_i|(U_i \cap U_j) = s_j|(U_i \cap U_j)$ für alle Paare (i, j) . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Schnitt $s \in \mathcal{E}(U)$, so dass $s|_{U_i} = s_i$ für alle i gilt. GarE

6. Vektorfelder

6.1 Definition. Ein Vektorfeld A auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist ein Schnitt des Tangentialbündels. DVf

Im Klartext bedeutet dies, dass man für jedes $a \in X$ einen Tangentialvektor $A_a \in T_a X$ auszeichnet, welcher von a differenzierbar abhängt. Wir gehen weiter unten nochmals darauf ein, was dies konkret bedeutet. Wie Schnitte

von beliebigen Vektorraumbündeln kann Vektorfelder in naheliegender Weise addieren und mit Funktionen multiplizieren,

$$(A + B)_a = A_a + B_a, \quad (fA)_a = f(a)A_a.$$

Man kann sie auf offene Teile einschränken und man kann Diffeomorphismen $f : X \rightarrow Y$ benutzen, um so von X auf Y und umgekehrt zu transformieren. Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Teil, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} := \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_a \right)_{a \in V}$$

ein Vektorfeld und jedes andere Vektorfeld kann in der Form

$$A = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit einem n -Tupel von Funktionen geschrieben werden.

Ist φ eine Karte auf X , A ein Vektorfeld auf X , so gilt insbesondere

$$A|_{U_\varphi} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Man nennt die Funktionen

$$f^i : U_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

die Komponenten des Vektorfeldes bezüglich des Koordinatensystems $x = \varphi(a)$. Die Differenzierbarkeit des Vektorfeldes bedeutet konkret, dass diese Komponenten differenzierbare Funktionen sind.

Es ist wichtig zu wissen, wie die Komponenten bei Kartenwechsel umzurechnen sind. Eine einfache Anwendung der Kettenregel besagt:

6.2 Bemerkung. Sei A ein Vektorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X . Seien φ, ψ zwei Karten auf X mit Kartentransformationsabbildung $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$. Seien f^1, \dots, f^n bzw. g^1, \dots, g^n die Komponenten von A bezüglich φ bzw. ψ . Es gilt die Umsetzungsformel vdm

$$g^i(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_j} f^j(x) \quad (y = \gamma(x)).$$

Ist umgekehrt jeder Karte aus einem geeigneten Atlas ein n -Tupel von Funktionen zugeordnet, das sich genau so umsetzt, so sind dies die Komponenten eines eindeutig bestimmten Vektorfeldes.

Es gibt noch eine andere Deutung von Vektorfeldern. Sei A Vektorfeld auf X . Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Teil $U \subset X$, so kann man die Funktion

$$g : U \longrightarrow \mathbb{C}, \quad g(a) := A_a(f)$$

betrachten. Wir schreiben der Einfachheit halber $g = A_U(f)$ für diese Funktion.

6.3 Bemerkung. *Ein Vektorfeld ist genau dann differenzierbar, wenn die Funktion $A_U(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ($U \subset X$ offen) differenzierbar ist.* VdK

Der Beweis ist einfach und wird übergangen. Differenzierbare Vektorfelder induzieren also insbesondere Abbildungen

$$A_U : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U).$$

Es ist klar, daß diese einer Derivationsregel genügen. Wir werden dazu geführt, die Menge $\text{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$ einzuführen:

6.4 Definition. *Die Menge $\text{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$ besteht aus allen Familien von Abbildungen* DDd

$$A_U : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U), \quad U \subset X \text{ offen}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Sie ist verträglich mit Restriktion

$$A_U(f)|_V = A_V(f|_V) \quad (V \subset U \subset X).$$

2. Es gilt die Derivationsregel

$$A_U(fg) = f A_U(g) + g A_U(f).$$

Man zeigt nun leicht.

6.5 Bemerkung. *Die Zuordnung $A \mapsto (A_U)_U$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge der Vektorfelder und der Menge der Derivationen $\text{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$.* VfD

Eine schöne Anwendung dieser Uminterpretation von Vektorfeldern ist die Definition der Lieklammer. Sind A, B zwei Elemente von $\text{Der}(\mathcal{C}_X^\infty, \mathcal{C}_X^\infty)$ so ist offenbar $A_U \circ B_U$ in der Regel keine Derivation. Jedoch rechnet man sofort nach, daß

$$A_U \circ B_U - B_U \circ A_U$$

wieder eine Derivation definiert. Wir erhalten:

6.6 Bemerkung. *Es gibt eine eindeutige Abbildung, welche zwei differenzierbaren Vektorfeldern A, B ein drittes $[A, B]$ zuordnet, so daß für die zugeordneten Derivationen gilt:* DLk

$$[A, B]_U = A_U \circ B_U - B_U \circ A_U.$$

Man nennt $[A, B]$ die Lieklammer der beiden Vektorfelder. Genau dann ist die Lieklammer 0, wenn die beiden Derivationen miteinander vertauschbar sind. Beispielsweise gilt im Falle $X = \mathbb{R}^n$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Regel

$$\left[\sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j g^j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_i \left(\sum_j f^j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g^j \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

welche man ebenfalls zur Definition der Lieklammer verwenden könnte.

7. Etwas multilineare Algebra

Alle betrachteten Vektorräume sind als reell und endlichdimensional vorausgesetzt. Sind V, W zwei Vektorräume, so ist auch die Menge der linearen Abbildungen $\text{Hom}(V, W)$ von V nach W ein Vektorraum. Im Spezialfall $W = \mathbb{R}$ erhält man den Dualraum $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$. Ist e_1, \dots, e_n eine Basis von V , so ist die Elemente e_1^*, \dots, e_n^* aus V^* durch

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

Daher sind V und V^* isomorph. Aber diese Isomorphie hängt von der Wahl einer Basis ab und ist somit nicht kanonisch. Man kann auch den Dualraum V^{**} des Dualraums betrachten. Es gibt eine natürliche Abbildung

$$V \longrightarrow V^{**}, \quad a \longmapsto (L \mapsto L(a)).$$

Mit Hilfe von Basen rechnet man nach, dass dies ein Isomorphismus ist. Die Räume V und V^{**} sind also kanonisch isomorph. Häufig identifiziert man sie. Man schreibt also für Vektoren und die entsprechenden Elemente des Doppel-duals denselben Buchstaben.

Neben linearen muss man auch multilineare Abbildungen

$$M : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

betrachten. Dabei sind V_i, W Vektorräume. „Multilinear“ bedeutet, dass M in jeder einzelnen Variablen (also bei Festhaltung der restlichen) linear ist. Wenn man in jedem V_i eine Basis $e_1^{(i)}, \dots, e_{n_i}^{(i)}$ gegeben hat, so ist M durch die Kenntnis der $M(e_{\nu_1}^{(1)}, \dots, e_{\nu_n}^{(n)})$ eindeutig bestimmt und zu jeder Vorgabe dieser

Werte existiert ein M . Die Menge aller multilinearen Abbildungen bezeichnet man mit

$$\text{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_n, W)$$

ist in naheliegender Weise ein Vektorraum. Seine Dimension ist

$$\dim V_1 \cdots \dim V_n \cdot \dim W.$$

Im Spezialfall $W = \mathbb{R}$ spricht man von Multilinearformen.

Der Fall $n = 1$ ist nicht ausgeschlossen. In diesem Falle erhält man also $\text{Hom}(V, W)$, die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W . Im Spezialfall $W = \mathbb{R}$ somit den Dualraum $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$.

7.1 Definition. Seien V_1, \dots, V_n endlich dimensionale Vektorräume. Wir definieren DefTens

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := \text{Mult}(V_1^* \times \cdots \times V_n^*, \mathbb{R}).$$

Es gilt

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_n).$$

Wir konstruieren eine multilineare Abbildung

$$V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad (a_1, \dots, a_n) \longmapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

folgendermaßen. Wir setzen

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)(M) := M(a_1, \dots, a_n).$$

Diese kann man speziell im Fall $n = 1$ betrachten. Dort ist der kanonische Isomorphismus $V \rightarrow V^{**}$. Allgemein ist es eine multilineare Abbildung. Sie genügt folgender universeller Eigenschaft.

7.2 Hilfssatz. Seien V_1, \dots, V_n Vektorräume. Das Tensorprodukt und die dazugehörige multilineare Abbildung DtP

$$V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad (a_1, \dots, a_n) \longrightarrow a_1 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

haben folgende Eigenschaften:

- 1) V wird von dem Bild von erzeugt.
- 2) Ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein System linear unabhängiger Vektoren

$$e_1^{(i)}, \dots, e_{m_i}^{(i)}$$

gegeben, so sind die $m_1 \cdots m_n$ Vektoren

$$B(e_1^{(1)}, \dots, e_{m_i}^{(i)})$$

linear unabhängig.

Eine lineare Abbildung

$$L : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow W$$

in irgendeinen Vektorraum W ist durch die Kenntniss der Bilder der $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ eindeutig bestimmt. Häufig definiert man eine solche lineare Abbildung dadurch, daß man eine Formel

$$L(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = F(v_1, \dots, v_n)$$

hinschreibt. Man muß jedoch bedenken, daß zwischen den Elementen $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ lineare Relationen bestehen. Dennoch funktioniert diese Vorgehensweise häufig dank der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

7.3 Hilfssatz (Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts). Sei UnivT

$$F : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine **multilineare** Abbildung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung L , welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \cdots \times V_n & \xrightarrow{F} & W \\ & \searrow & \uparrow L \\ & & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \end{array}$$

kommutativ macht.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz 7.2. □

Man kann sich überlegen, dass das Tensorprodukt durch die universelle Eigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Seine Realisierung durch einen Raum von Multilinearformen sollte als einer von vielen möglichen Existenzbeweisen betrachtet werden. Die universelle Eigenschaft ist auch der korrekte Ansatz für die Definition des Tensorprodukts von nicht mehr notwendig endlich dimensionalen Vektorräumen, sie funktioniert sogar für Moduln über kommutativen Ringen mit Einselement anstelle von Vektorräumen über Körpern.

Das Tensorprodukt ist in folgendem Sinne assoziativ.

7.4 Hilfssatz. Seien V_1, \dots, V_n Vektorräume, $0 < a < n$. Es existiert ein AsT
eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$\begin{aligned} (V_1 \otimes \cdots \otimes V_a) \otimes (V_{a+1} \otimes \cdots \otimes V_n) &\xrightarrow{\sim} V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_a) \otimes (v_{a+1} \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n. \end{aligned}$$

Der Beweis erfolgt leicht mittels der universellen Eigenschaft (oder durch Benutzen von Basen). □

Ebenfalls klar ist die Kommutativität des Tensorprodukts in folgendem Sinne:

7.5 Hilfssatz. Seien V_1, \dots, V_n Vektorräume und σ eine Permutation der Ziffern $1, \dots, n$. Es existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{\sim} V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)}, \quad v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Zu einem Vektorraum V betrachtet man den Raum der p -fach kontra- und q -fach kovarianten Tensoren:

$$T^{p,q}V := \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^p \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^q$$

Die Fälle $p = 0$ und $q = 0$ sind zugelassen. Dies ist so zu verstehen:

$$T^{p,0}V = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^p, \quad T^{0,q}V = \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^q.$$

Insbesondere ist $T^{1,0} = V$ und $T^{0,1} = V^*$. Ergänzend definiert man

$$T^{0,0}V := \mathbb{R}.$$

Seien V, W zwei Vektorräume. Man kann jedem $L \in V^*$ und jedem $b \in W$ eine lineare Abbildung $V \rightarrow W$ zuordnen. Diese ist dadurch definiert, dass man einem Vektor $x \in V$ den Vektor $L(x)b \in W$ zuordnet. Dies liefert eine bilineare Abbildung $W \times V^* \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ und somit eine lineare Abbildung

$$W \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}(V, W).$$

Mit Hilfe von Basen rechnet man nach, dass diese ein Isomorphismus ist. Wir erhalten einen kanonischen Isomorphismus $W \otimes V^* \cong \text{Hom}(V, W)$.

Von der linearen Algebra kennt man die Spurabbildung

$$\text{Spur} : \text{Hom}(V, V) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese könnte man auch wie folgt definieren. Die Bilinearform

$$V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, L) \mapsto L(a),$$

induziert eine lineare Abbildung

$$V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass diese der Spurabbildung $\text{Hom}(V, V) \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht. Man kann sie benutzen um allgemeiner lineare Abbildungen

$$V_j^i : T^{p,q}V \rightarrow T^{p-1,q-1}$$

zu definieren. Diese hängen ab, von der Auswahl von zwei Indizes i, j mit $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ und sind wie folgt definiert

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_p \otimes L_1 \otimes \cdots \otimes L_q \longmapsto L_j(a_i) a_1 \otimes \cdots \hat{a}_i \cdots \otimes a_p \otimes L_1 \otimes \cdots \hat{L}_j \cdots \otimes L_q,$$

wobei der Hut einfach bedeutet, dass der darunterstehende Term wegzulassen ist. Diese Abbildungen nennt man *Verjüngungen*. Es handelt sich also dabei um Varianten der Spurabbildungen.

Ein andere Prozess ist das *Shiften*, das wir in zunächst abstrakter Form erklären wollen. Es beruht auf gewissen Konstruktionen der lineare Algebra, die wir zunächst kurz beschreiben wollen. Sei $\beta : A \times B \rightarrow C$ eine bilineare Abbildung von Vektorräumen Dann werden lineare Abbildungen

$$A \longrightarrow \text{Hom}(B, C) \quad \text{und} \quad B \longrightarrow \text{Hom}(A, C)$$

induziert, bei der ersten beispielsweise wird einem Element $a \in A$ die lineare Abbildung

$$B \longrightarrow C, \quad b \longmapsto \beta(a, b),$$

zugeordnet.

Wir haben einen Spezialfall hiervon bereits kennengelernt: Im Falle $A = V$, $B = V^*$ und $C = \mathbb{R}$ können wir die natürliche Paarung

$$V \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, l) \longmapsto l(v)$$

betrachten. Sie induziert die uns bekannte lineare Abbildung $V \rightarrow V^{**}$ von der wir wissen, dass es sich um einen Isomorphismus handelt.

Jetzt interessieren wir uns mehr für eine Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wir erhalten aus ihr zwei lineare Abbildungen

$$V \longrightarrow V^*.$$

Wenn die Bilinearform symmetrisch ist, stimmen beide überein. Dies ist der uns am meisten interessierende Fall.

Eine Bilinearform auf V heißt nicht ausgeartet, falls die beiden induzierten Abbildungen $V \rightarrow V^*$ injektiv sind (man kann sich überlegen, dass eine genügt). Aus Dimensionsgründen sind sie dann Isomorphismen. Wir erhalten also:

Eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V induziert einen natürlichen Isomorphismus $V \rightarrow V^$ und umgekehrt.*

Unter der Voraussetzung, dass auf V eine nicht ausgeartete Bilinearform ausgezeichnet wurde, kann man also V mit V^* identifizieren. Insbesondere kann man den induzierten Isomorphismus

$$T^{p,q}V \xrightarrow{\sim} T^{p+q,0}V$$

betrachten, der dadurch zustande kommt, dass man in dem Ausdruck $a_1 \otimes a_p \otimes \cdots \otimes L_1 \otimes \cdots \otimes L_q$ die Einträge L_i durch die entsprechenden Elemente aus V_i ersetzt. Als Folge erhält man (immer unter der Voraussetzung, dass eine nicht ausgeartete Bilinearform of V ausgezeichnet wurde) Isomorphismen

$$T^{p,q}V \cong T^{p',q'}V \quad (p+q = p'+q').$$

Tensorkomponenten

Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V . Dann bilden die n^{p+q} Vektoren

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_q}^*$$

eine Basis von $T^{p,q}V$. Jeder (p, q) -Tensor A besitzt also eine Darstellung

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} C_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_q}^*.$$

Man nennt die Koeffizienten $C_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ die Komponenten von A bezüglich der vorgelegten Basis.

Transformationsformalismus der Tensorkomponenten

Ist $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, so kann man ihre duale Abbildung $L^* : W^* \rightarrow V^*$ (in der anderen Richtung) betrachten. Sie ist durch $L^*(l) = l \circ L$ definiert. Sei ein Vektorraumisomorphismus $\sigma : V \rightarrow W$ gegeben. Die duale Abbildung $W^* \rightarrow V^*$ ist dann ebenfalls ein Isomorphismus. Man kann diesen umkehren und erhält damit Isomorphismen

$$V \xrightarrow{\sim} W, \quad V^* \xrightarrow{\sim} W^*.$$

Diese ziehen Isomorphismen

$$\sigma : T^{p,q}(V) \xrightarrow{\sim} T^{p,q}(W)$$

nach sich, welche wir der Einfachheit halber einfach mit σ bezeichnen. Sei nun e_1, \dots, e_n eine Basis von V und f_1, \dots, f_n eine Basis von W . Es stellt sich die Frage, wie die Komponenten eines Tensors $T \in V^{p,q}$ bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n mit denen von $\sigma(T) \in W^{p,q}$ bezüglich f_1, \dots, f_n zusammenhängen.

Nebenbei bemerkt: Im Falle $V = W$, $\sigma = \text{id}$ bedeutet diese Frage einfach, wie die Komponenten ein und desselben Tensors von der Wahl der Basis abhängen.

Dazu muß man daran erinnern, wie man dem Isomorphismus $V \rightarrow W$ eine Matrix zuordnet. Wir erinnern daran, wie man ganz allgemein einer linearen Abbildung

$$L : V \longrightarrow W, \quad e_1, \dots, e_n \text{ Basis von } V, \quad f_1, \dots, f_m \text{ Basis von } W$$

eine Matrix A zuordnet. Sie ist durch folgende Formel definiert:

$$L(e_i) = \sum_{j=1}^m a_j^i f_j \quad (1 \leq i \leq n).$$

Wir haben einen Index der Matrixkoeffizienten nach oben geschrieben. Wir wollen kurz erläutern, warum dies sinnvoll ist. Dazu nehmen wir $V = W$ an. In diesem Fall können und wollen wir $f_i = e_i$ nehmen. Wir erinnern an die kanonische Isomorphie $\text{Hom}(V, V) = V \otimes V^*$. Wir können also L als Tensor vom Typ $(1, 1)$ auffassen. Als solcher hat er Komponenten. Man kann leicht nachrechnen, dass diese mit obigen Matrixkoeffizienten übereinstimmen. Dies rechtfertigt für Schreibweise a_j^i .

Zurück zu unserem Isomorphismus $\sigma : V \rightarrow W$. Die zugeordnete Matrix sei A . Man weiß und kann leicht nachrechnen, daß die zugeordnete Matrix der dualen Abbildung $W^* \rightarrow V^*$ durch die transponierte Matrix A' gegeben ist, ihre Umkehrung wird also durch A'^{-1} gegeben. Entsprechend gilt

$$\sigma(e_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j^* \quad \text{mit} \quad B := A^{-1}.$$

Wir wenden nun σ auf einen Tensor

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} C_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_q}^*$$

an, um die Komponenten des Bildtensors

$$\sigma(A) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} D_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} f_{i_1} \otimes \dots \otimes f_{i_p} \otimes f_{j_1}^* \otimes \dots \otimes f_{j_q}^*$$

zu ermitteln. Aus der Formel

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} C_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \\ &\sum_{\nu_1} a_{\nu_1 i_1} f_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \sum_{\nu_p} a_{\nu_p i_p} f_{\nu_p} \otimes \sum_{\mu_1} b_{j_1 \mu_1} f_{\mu_1}^* \otimes \dots \otimes \sum_{\mu_q} b_{j_q \mu_q} f_{\mu_q}^* \end{aligned}$$

folgt:

$$D_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \sum a_{i_1 \nu_1} \dots a_{i_p \nu_p} b_{\mu_1 j_1} \dots b_{\mu_p j_p} C_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}.$$

Wir werden weiter unten sehen, daß es sinnvoll ist, in a_{ij} den ersten Index i nach oben zu setzen, also a_j^i anstelle a_{ij} zu schreiben, entsprechend b_j^i anstelle b_{ij} . Die Transformationsformel lautet dann

$$D_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \sum a_{\nu_1}^{i_1} \dots a_{\nu_p}^{i_p} b_{j_1}^{\mu_1} \dots b_{j_p}^{\mu_p} C_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}.$$

Die sogenannte Einsteinkonvention besagt, daß man über doppelt vorkommende Indizes automatisch zu summieren hat, wenn der eine oben und der andere unten steht. Mit dieser Konvention lautet die Tensortransformationsformel

$$D_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = a_{\nu_1}^{i_1} \cdots a_{\nu_p}^{i_p} b_{j_1}^{\mu_1} \cdots b_{j_p}^{\mu_p} C_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}.$$

Die folgenden Rechenregeln für Tensoren beruhen alle auf einfachen Eigenschaften des algebraischen Tensorprodukts.

1. Man kann Tensoren desselben Typs addieren. Bezüglich einer Basisdarstellung bedeutet dies komponentenweise Addition.
2. Man kann Tensoren verschiedenen Typs multiplizieren. Abstrakt beruht dies auf den kanonischen Isomorphismen

$$\begin{aligned} T^{p,q} \otimes T^{p',q'} &\xrightarrow{\sim} T^{p+p',q+q'}, \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes l_1 \otimes \cdots \otimes l_q \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_{p'} \otimes l'_1 \otimes \cdots \otimes l'_{q'} \\ &\longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_{p'} \otimes l_1 \otimes l_q \otimes l'_1 \otimes \cdots \otimes l'_{q'} \end{aligned}$$

Das Produkt eines (p, q) -Tensors mit einem (p', q') -Tensor ist also ein $(p + p', q + q')$ -Tensor. Für die Komponenten bedeutet dies einfach die Bildung

$$C_{j_1, \dots, j_q, \mu_1, \dots, \mu_{q'}}^{i_1, \dots, i_p, \nu_1, \dots, \nu_{p'}} = A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} B_{\mu_1, \dots, \mu_{q'}}^{\nu_1, \dots, \nu_{p'}}.$$

Im Falle $p = q = 0$ ist dies die gewöhnliche Multiplikation mit Skalaren.

3. Man kann Tensorfelder verjüngen. Ist A ein Tensor vom Typ (p, q) , so ist $V_i^j(A)$ ein Tensor vom Typ $(p - 1, q - 1)$. Hierbei ist $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$. Wir haben erklärt, daß die Verjüngung auf der kanonischen Abbildung $V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{R}$ beruht. Man rechnet nach, daß dies für die Komponenten einfach das folgende bedeutet: Man setze einen oberen und einen unteren Index gleich und summiere. Beispielsweise ist die Verjüngung bezüglich der ersten ko- und kontravarianten Komponenten gegeben durch

$$A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \longmapsto \sum_{i_1} A_{i_1, j_2, \dots, j_q}^{i_1, i_2, \dots, i_p}.$$

Wir nehmen an, daß auf V eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben ist. Wenn man will, kann man dies als ein zweifach kovarianten Tensor ansehen. Wie wir erläutert haben, induziert die Bilinearform eine Isomorphie $V \rightarrow V^*$ und man kann man Tensorfelder vom Typ (p, q) in solche vom Typ $(p + q, 0)$ „shiften“.

Für die Komponenten bedeutet dies, daß man Indizes von unten nach oben shiften kann und umgekehrt. Die Formel für dieses Shiften ist leicht zu ermitteln. Man rechnet im einfachsten Fall $p = 1$, $q = 0$ beispielsweise nach, daß die Formel durch

$$\sum A^i e_i \longmapsto \sum B_i e_i^*, \quad B_i = \sum_{ij} g_{ij} A^j,$$

gegeben ist. Dabei sei $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ gegeben.

Übrigens sind die g_{ij} gerade die Komponenten des zweifach kovarianten Tensors, welcher durch die Bilinearform gegeben ist. Shiftet man beide Indizes nach oben, so erhält man einen zweifach kontravarianten Tensor g^{ij} . Man rechnet nach, daß diese Matrix invers zur Matrix (g_{ij}) ist. Die früher verwendete Bezeichnung für die Inverse einer symmetrischen invertierbaren Matrix ist also konsistent mit dem Tensorkalkül.

8. Differentiale (Kovektorfelder)

Wir führen Differentiale und Kurvenintegrale ein.

8.1 Definition. *Ein **Kovektorfeld** ω auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist eine Abbildung, welche jedem $a \in X$ ein Element des Dualraums des Tangentialraums zuordnet, $\omega_a \in T_a^*X$.* KVf

Sei $u : I \rightarrow X$ eine glatte Kurve und ω ein Kovektorfeld auf X . Man kann dann die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \omega_{u(t)}(\dot{u}(t)),$$

betrachten. Man schreibt für deren Integral – sofern es existiert –

$$\int_u \omega := \int_I \omega_{u(t)}(\dot{u}(t)) dt.$$

Man nennt dieses Integral das *Kurvenintegral* von ω längs u . Man kann Kovektoren also längs Kurven integrieren. Man nennt aus diesem Grunde Kovektoren auch *Differentiale*.

Dies wird auch gerechtfertigt durch den Spezialfall, wo $X = U$ offener Teil des \mathbb{R}^n ist. Sei $a \in U$. Wir bezeichnen mit

$$dx_1|_a, \dots, dx_n|_a$$

die duale Basis von $[\partial/\partial x_i]_a$.

Mit dx_i wird das Kovektorfeld $a \mapsto dx_i|_a$ bezeichnet. Damit ist jedes Kovektorfeld auf U von der Form

$$\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n.$$

Das Kurvenintegral ist in diesem Falle gerade

$$\int_u \omega = \int_I \sum_i f_i(u(t)) \dot{u}_i(t) dt,$$

also das übliche Kurvenintegral. Dadurch wird die Bezeichnung dx_i gerechtfertigt.

Die Rechenregeln für Kovektorfelder sind denen der Vektorfelder analog (Addition, Multiplikation mit Funktionen, Einschränken auf offene Teile und Transformation bei Diffeomorphismen.)

Ist $f : X \rightarrow Y$ ein Diffeomorphismus, so kann man die induzierten Isomorphismen $T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$ dazu benutzen, um ein Differential von X auf Y in naheliegender Weise zu übertragen und umgekehrt.

Insbesondere kann man die Komponenten eines Differentials ω auf X bezüglich einer Karte einführen:

$$\omega|_{U_\varphi} \longleftrightarrow f_1(x)dx_1 + \cdots + f_n(x)dx_n.$$

Dabei sind f_i also Funktionen auf dem Kartenblatt V_φ . Die Umsetzungsformel der Komponenten kann man leicht berechnen und erhält folgende Bemerkung.

8.2 Bemerkung. Sei ω ein Differential auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X . Seien φ, ψ zwei Karten auf X mit Kartentransformationsabbildung $\gamma = \psi\varphi^{-1}$. Seien f_1, \dots, f_n bzw. g_1, \dots, g_n die Komponenten von ω bezüglich φ bzw. ψ . Es gilt die Umsetzungsformel vdm

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_j(x)}{\partial x_i} g_j(y) \quad (y = \gamma(x)).$$

Ist umgekehrt jeder Karte aus einem geeigneten Atlas ein n -Tupel von Funktionen zugeordnet, das sich genau so umsetzt, so sind dies die Komponenten eines eindeutig bestimmten Vektorfelds.

Wir merken an, daß die Transformation mit der transponierten Funktionalmatrix und nicht mit der Funktionalmatrix selbst wie bei Vektorfeldern vollzogen wird.

Zurückziehen von Differentialen

In einem unterscheiden sich Kovektorfelder von Vektorfeldern. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, ω ein Differential auf Y . man kann dann in naheliegender Weise eine Differentialform ω' auf X definieren. Ist $a \in X$, so hat man die Tangentialabbildung $T_a X \rightarrow T_{f(a)} Y$. Diese kann man mit der Linearform $\omega_{f(a)} : T_{f(a)} Y \rightarrow \mathbb{R}$ zusammensetzen und erhält so eine Linearform $\omega'_a : T_a X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bezeichnen das so gewonnene Differential mit $f^*\omega$ und nennen es das zurückgezogene Differential.

8.3 Satz. *Es gibt eine Vorschrift, welcher jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und jedem Differential ω auf Y ein Differential $f^*\omega$ auf X zuordnet. Diese Vorschrift hat folgende Eigenschaften und ist durch diese bestimmt:* DZd

1. Sie genügt der Kettenregel bezüglich der Zusammensetzung differenzierbarer Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, d.h.

$$f^*(g^*\omega) = (g \circ f)^*\omega \quad (\omega \text{ auf } Z).$$

2. Ist $U \hookrightarrow X$ die kanonische Inklusion einer offenen Teilmenge, so bedeuten Zurückziehen und natürliches Einschränken dasselbe.
3. Ist φ eine Karte auf X und sind f_1, \dots, f_n die Komponenten eines Differentials ω , so gilt

$$\omega|_{U_\varphi} = \varphi^*(f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n).$$

4. Ist $f : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung offener Teile $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, so gilt

$$f^*(dy_j) = \frac{\partial f_j}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n} dx_n.$$

4. Außerdem gelten die Regeln

$$f^*(\omega + \omega') = f^*(\omega) + f^*(\omega'), \quad f^*(h\omega) = hf^*(\omega).$$

Ein weiteres Indiz für die Nützlichkeit des Konzeptes „Differential“ ist

8.4 Bemerkung. *Seien $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung, ω ein Differential auf Y und $u : I \rightarrow X$ eine glatte Kurve. Dann gilt* ZKi

$$\int_{f \circ u} \omega = \int_u f^*\omega$$

(Existenz der Integrale vorausgesetzt).

Der Beweis ist trivial. □

Sei ω ein Differential auf X . Man dann jedem Vektorfeld A auf einer beliebigen offenen Teilmenge von X ein Funktion auf U zuordnen. Sie ordnet einem Punkt $a \in U$ den Wert $\omega_a(A_a)$ zu. Wir bezeichnen diese Funktion mit $\omega(A)$. Sie ist also durch die Formel

$$\omega(A)(a) := \omega_a(A_a)$$

definiert.

8.5 Hilfssatz. Für ein Differential ω auf X sind folgende beiden Bedingungen Difdif
gleichbedeutend.

- a) Die Funktionen $\omega(A)$ sind für alle offenen $U \subset X$ und alle (differenzierbaren) Vektorfelder A differenzierbar.
- b) Die Komponenten von ω bezüglich beliebiger (differenzierbarer) Karten (aus einem Atlas genügt) sind differenzierbar.

Beweis. Mittels Karten kann man die Behauptung auf den Fall reduzieren, wo X ein offener Teil des \mathbb{R}^n ist. Dort ist die Aussage trivial. □

Man nennt ein Kovektorfeld (Differential) mit den im Hilfssatz 8.5 formulierten Eigenschaften auch *differenzierbar*. Im folgenden betrachten wir nur noch differenzierbare Differentiale und verwenden den Begriff „Differential“ immer in diesem Sinn, wie wir es ja auch bei den Vektorfeldern getan haben. Es gibt auch eine andere sehr nützliche Beschreibung für Differentiale.

8.6 Hilfssatz. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Jedem offenen NeuDif
Teil $U \subset X$ sei eine Abbildung $\omega_U : \mathcal{T}(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$. Diese sei

- a) mit Restriktionen auf kleinere offenen Mengen verträglich,
- b) $\mathcal{C}^\infty(U)$ -linear in dem Sinne

$$\omega_U(A + B) = \omega_U(A) + \omega_U(B), \quad \omega_U(fA) = f\omega_U(A)$$

für $A, B \in \mathcal{T}(U)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Differential ω mit $\omega(A) = \omega_U(A)$.

Auch diese Aussage führt man auf den Fall offener Teile des \mathbb{R}^n zurück wo er dann trivial ist. □

Man kann Differentiale auch in der Sprache der Vektorraumbündel behandeln. Genauer kann man zu jedem Vektorraumbündel $E \rightarrow X$ ein duales Bündel $E^* \rightarrow X$ konstruieren. Die Konstruktion ist so gemacht, dass die Faser E_a^* von E^* der Dualraum von E_a ist. Als Spezialfall kann man dann das Dualbündel des Tangentialbündels betrachten. Dessen Schnitte sind dann die Differentiale. Wir gehen hierauf nicht weiter ein, da wir es nicht brauchen.

9. Tensorfelder

Wir führen nun allgemeine Tensorfelder ein. Auch hier gilt das am Ende des letzten Abschnitts Gesagte. Man könnte allgemein das Tensorprodukt von Vektorraumbündeln definieren. Wir behandeln aber nur den Fall des Tangentialbündels.

9.1 Definition. *Unter einem Tensorfeld A vom Typ (p, q) auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versteht man eine Vorschrift, welche jedem $a \in X$ ein Element* DtF

$$A_a \in T^{p,q}(T_a X)$$

zuordnet.

Funktionen sind als Tensorfelder vom Typ $(0, 0)$ (Physiker nennen sie Skalare), Vektorfelder sind Tensorfelder vom Typ $(1, 0)$ und Differentiale sind Tensorfelder vom Typ $(0, 1)$

Man kann Tensorfelder gleichen Typs addieren und mit Funktionen multiplizieren. Man kann sie auf offene Teile einschränken und mit Diffeomorphismen transformieren. Wie in diesen Spezialfällen kann man damit Tensorfelder auch durch Komponenten beschreiben. Ist φ eine Karte, so entspricht der Tensor $A|U_\varphi$ dank des Diffeomorphismus $U_\varphi \rightarrow V_\varphi$ einem Tensor auf dem Kartenblatt V_φ . Hier ist eine ausgezeichnete Basis vorhanden. Bezüglich dieser Basis kann man die Tensorkomponenten betrachten. Dies sind nun Funktionen

$$f_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(x)$$

auf dem Kartenblatt V_φ . Genauer gilt

$$A|U_\varphi \longleftrightarrow \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} f_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(x) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_q}.$$

Sei ψ eine zweite Karte und

$$A|U_\psi \longleftrightarrow \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n \\ 1 \leq j_1, \dots, j_q \leq n}} g_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(y) \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y_{i_p}} \otimes dy_{j_1} \otimes \dots \otimes dy_{j_q}$$

die entsprechende Komponentendarstellung. Die Umrechnung erfolgt nun mittels des Transformationsformalismus, wobei anstelle der Matrix A die Jacobi-matrix

$$J(\gamma, x) = (a_j^i(x))_{ij}$$

tritt. Die Komponenten der inversen Jacobimatrix werden entsprechend mit $b_j^i(x)$ bezeichnet. Die Transformationsformel lautet nun

$$g_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(y) = a_{\nu_1}^{i_1}(x) \cdots a_{\nu_p}^{i_p}(x) b_{j_1}^{\mu_1}(x) \cdots b_{j_p}^{\mu_p}(x) f_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}(x).$$

Auch diese Formel kann man noch mehr oder weniger vereinfacht schreiben. Man läßt den Buchstaben γ fallen, indem man anstelle $y = \gamma(x)$ einfach $y = y(x)$ schreibt. Für die Umkehrfunktion von γ schreibt man entsprechend $x = x(y)$. Damit ist

$$a_j^i(x) = \frac{\partial y^i}{\partial x_j}.$$

Die Jacobimatrix der Umkehrfunktion ist die inverse Matrix

$$b_j^i(x) = \frac{\partial x^i}{\partial y_j}.$$

Die Transformationsformel lautet somit

$$g_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(y) = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x_{\nu_p}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_q}}{\partial y_{j_q}} f_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}(x).$$

In der Physik wird noch eine weitere Vereinfachung verwendet: $g_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(y)$ und $f_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}(x)$ sind die Komponenten ein- und desselben Tensors A . Warum soll man zwei unterschiedliche Funktionssymbole f und g benutzen. Man schreibt also einfach $A_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}(x)$ für die Komponenten des Tensors bezüglich der Karte x und entsprechend für y . Die Transformationsformel hat jetzt die Form

$$A_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}(y) = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x_{\nu_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x_{\nu_p}} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_q}}{\partial y_{j_q}} A_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{\nu_1, \dots, \nu_p}(x).$$

Die folgende Bemerkung führt zu der meist in der Physik verwendeten Definition eines Tensorfeldes.

9.2 Bemerkung. *Ist jeder differenzierbaren Karte ein Tupel von Komponentenfunktionen zugeordnet, welches der Tensortransformationsformel genügt, so existiert ein eindeutig bestimmtes Tensorfeld mit diesen Komponenten.* DTK

Wir übergehen den Beweis.

9.3 Definition und Bemerkung. *Ein Tensorfeld heißt differenzierbar, wenn seine Komponenten bezüglich beliebiger differenzierbarer Karten differenzierbar sind. Es genügt dies für einen Teilatlas des maximalen Atlas zu fordern.* Tdd

Diese beruht auf der Interpretation

$$T^{p,q}(T_x X) = \text{Mult}(\overbrace{(T_x X)^* \times \cdots \times (T_x X)^*}^p \times \overbrace{T_x X \times \cdots \times T_x X}^q, \mathbb{R}).$$

Sei T ein (p, q) -Tensorfeld auf X . Sind A_1, \dots, A_q Vektorfelder und $\omega_1, \dots, \omega_p$ Kovektorfelder auf einem offenen Teil $U \subset X$, so kann man die Funktion

$$f(x) = T((\omega_1)_x, \dots, (\omega_p)_x, (A_1)_x, \dots, (A_q)_x)$$

auf U definieren. Wir bezeichnen diese sinngemäß mit

$$f = T(\omega_1, \dots, \omega_p, A_1, \dots, A_q) : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wenn das Tensorfeld T und alle A_i, ω_j differenzierbar sind, so ist diese Funktion differenzierbar.

9.4 Bemerkung. *Differenzierbare Tensorfelder vom Typ (p, q) entsprechen* nDT *umkehrbar eindeutig Vorschriften T , welche jeder offenen Menge $U \subset X$ und jedem Tupel A_1, \dots, A_q von differenzierbaren Vektorfeldern und $\omega_1, \dots, \omega_p$ und differenzierbaren Kovektorfeldern eine differenzierbare Funktion*

$$T(\omega_1, \dots, \omega_p, A_1, \dots, A_q) : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

zuordnen, wobei diese Vorschrift mit Restriktion auf kleinere offene Mengen verträglich sein soll und außerdem multilinear über dem Ring $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Multilinear über dem Ring $\mathcal{C}^\infty(U)$ soll natürlich u.a. bedeuten, daß neben der Additivität in jeder Variablen auch

$$T(f_1\omega_1, \dots, f_p\omega_p, g_1A_1, \dots, g_qA_q) = f_1 \cdots f_p g_1 \cdots g_q T(\omega_1, \dots, \omega_p, A_1, \dots, A_q)$$

gilt.

Kapitel IV. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten

1. Der Begriff der Riemann'schen Mannigfaltigkeit

1.1 Definition. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine pseudoriemannsche Metrik ist eine Vorschrift, welche jedem $a \in X$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform DRm

$$g_a : T_a X \times T_a X \longrightarrow \mathbb{E}$$

zuordnet, welche von a differenzierbar abhängt. Ist sie für alle a positiv definit, so heißt sie eine Riemann'sche Metrik.

Eine pseudoriemannsche Metrik kann auch als zweifach kovarianter Tensor angesehen werden. Ist $X = D$ ein offener Teil eines \mathbb{R}^n , so ist $T_a X = \mathbb{R}^n$ und die Metrik ist durch ihre Grammatrix $g_{ik}(x)$ gegeben. In diesem Falle ist (D, g) also einfach ein Riemann'sches Gebiet. Allgemein ist eine pseudoriemannsche Metrik durch ihre Komponenten gegeben. Ist φ eine Karte auf X , so definieren die Komponenten eine Struktur als Riemann'sches Gebiet (V_φ, g_φ) . Bei Kartenwechsel $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$ gilt eine Umsetzungsformel von g_φ nach g_ψ . Dies ist die gleiche Umsetzungsformel, wie wir sie bei Riemann'schen Gebieten gefunden hatten und in den Begriff der Isometrie Riemann'scher Gebiete gefaßt hatten. Man erhält:

1.2 Bemerkung. Ist (X, g) eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, so wird jedes Kartenblatt V_φ zu einem pseudoriemannschen Gebiet (V_φ, g_φ) . Die Kartenwechselabbildungen RgK

$$\gamma = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \longrightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

sind Isometrien pseudoriemannscher Gebiete. Ist umgekehrt für jedes Kartenblatt (aus einem Atlas genügt) eine pseudoriemannsche Metrik gegeben, so daß diese Verträglichkeitseigenschaften erfüllt, so kommen diese von einer pseudoriemannschen Metrik g auf X .

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung und g eine Riemann'sche Metrik auf Y . Man kann dann auf jedem $T_a X$ eine Bilinearform durch Zusammensetzung mit der Tangentialabbildung definieren. Im allgemeinen wird diese ausgeartet sein, also keine pseudoRiemann'sche Metrik definieren. Fälle in denen die Paarung nicht ausgeartet wird, sind:

1. f ist ein lokaler Diffeomorphismus.
2. g ist eine Riemann'sche Metrik und f eine lokale Immersion.

Insbesondere kann man Riemann'sche Metriken auf Untermannigfaltigkeiten einschränken.

Einige Begriffe übertragen sich sofort von pseudoriemannschen Gebieten auf pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten. Dazu gehören

1. Der Begriff der Isometrie $(X, g) \rightarrow (Y, h)$. Eine Isometrie ist ein Diffeomorphismus $f : X \rightarrow Y$, so daß für jedes $x \in X$ der induzierte Isomorphismus $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ mit den ausgezeichneten Bilinearformen verträglich ist,

$$g_x(A, B) = h_{f(x)}((T_x f)(A), (T_x f)(B)).$$

2. Der Begriff der Geodätischen

$$u : I \longrightarrow (X, g).$$

Der Existenzsatz für Geodätische überträgt sich unmittelbar auf pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten:

Es gibt zu jedem Punkt a und jedem Tangentialvektor $A \in T_a X$ eine Geodätische $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und $\dot{u}(0) = A$. Unter diesen Geodätischen gibt es eine mit größten I und diese ist eindeutig bestimmt.

Man hat wieder „differenzierbare Abhängigkeit“ von den Parametern a, A . Zu ihrer Formulierung benutzt man zweckmäßigerweise die Konstruktion des Tangentialbündels III.4.3.

Ist $U \subset TX$ eine offene relativ kompakte Teilmenge, so kann man I für alle $(a, A) \in U$ gemeinsam wählen. Die Abbildung

$$I \times U \longrightarrow X, \quad (t, a, A) \longmapsto u_{a,A}(t)$$

ist differenzierbar.

Auch diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus der lokalen Theorie. Wir verzichten darauf, dies näher auszuführen.

2. Zusammenhänge

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir erinnern daran, daß man einem (differenzierbaren) Vektorfeld A einen Operator $A : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ (U offen) zuordnen kann. Man nennt

$$\nabla_A f := Af$$

auch die kovariante Ableitung von f längs des Vektorfelds A . Sei $E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel über X . Man möchte gerne allgemeiner Schnitte differenzieren, also Abbildungen

$$\nabla_A : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$$

definieren.

2.1 Definition. *Eine **kovariante Ableitung** oder ein **Zusammenhang** auf einem Vektorraumbündel $E \rightarrow X$ über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Schar von Abbildungen* DZu

$$\mathcal{T}(U) \times \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U), \quad (A, s) \longmapsto \nabla_A(s),$$

welche mit Restriktion auf kleinere offenen Mengen verträglich ist und so, daß

$$\begin{aligned} \nabla_{fA+gB} &= f\nabla_A + g\nabla_B \\ \nabla_A(fs) &= f\nabla_A(s) + \nabla_A(f)s \end{aligned}$$

gilt ($f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$).

Es ist klar, daß man Zusammenhänge auf offene Untermannigfaltigkeiten $U \subset X$ und das eingeschränkte Bündel $E_U := \pi^{-1}U$ einschränken kann. Es gilt die übliche Verheftungseigenschaft. Ist $X = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung ist für jedes i ein Zusammenhang ∇_i auf $E_{U_i} \rightarrow U_i$ gegeben, so dass $\nabla_i|(U_i \cap U_j) = \nabla_j|(U_i \cap U_j)$ gilt, so existiert ein eindeutig bestimmter Zusammenhang ∇ auf $E \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $\nabla|_{U_i} = \nabla_i$. Wir beschreiben Zusammenhänge lokal. Sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\pi : E \rightarrow U$ ein triviales Bündel über U . Es gibt dann Schnitte e_1, \dots, e_n aus $\mathcal{E}(U)$, so dass sich jedes $s \in \mathcal{E}(V)$ für offenes $V \subset U$ eindeutig in der Form $s = f_1 e_1 + \dots + f_n e_n$ mit $f_i \in \mathcal{C}^\infty(V)$ schreiben läßt. Sei ∇ ein Zusammenhang auf diesem Bündel. Wir betrachten die Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(U)$, welche durch

$$\nabla_{\partial/\partial x_i} s_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k s_k$$

definiert sind. Diese Funktionen bestimmen den Zusammenhang, denn es gilt allgemein

$$\nabla_{\partial/\partial x_i} \sum_j f_j s_j = \sum_j (\partial f_j / \partial x_i) s_j + \sum_{jk} \Gamma_{ij}^k f_j s_k.$$

Umgekehrt wird durch diese Formel bei willkürlicher Vorgabe der Funktionen Γ_{ij}^k ein Zusammenhang definiert.

Der Levi-Civita-Zusammenhang

Wir untersuchen speziell Zusammenhänge des Tangentialbündels. Gegeben sei ein Diffeomorphismus $f : X \rightarrow Y$. Man kann dann in naheliegender Weise einen Zusammenhang des Tangentialbündels von X zu einem Zusammenhang des Tangentialbündels von Y übertragen und umgekehrt. Sei nun ∇ ein Zusammenhang auf X . Wir versuchen, ihn in Komponenten auszudrücken. Wir betrachten dazu eine differenzierbare Karte $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$. Wir können ∇ auf U_φ einschränken und dann auf V_φ übertragen. Das Tangentialbündel von V_φ ist trivial, als Basiselemente kann man $\partial/\partial x_i$ nehmen. Damit sind die Funktionen Γ_{ij}^k durch

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

definiert. Der Zusammenhang ist durch die Kenntnis aller Funktionen Γ_{ij}^k bestimmt. Wir schreiben manchmal $\Gamma_{\varphi;ij}^k$ um anzudeuten, daß diese Funktionen von der Karte φ abhängen. Wie müssen die Funktionen $\Gamma_{\varphi;ij}^k$ beschaffen sein, damit sie einen Zusammenhang definieren?

2.2 Hilfssatz. *Jeder differenzierbaren Karte φ (aus einem Atlas genügt) sei ein System von differenzierbaren Funktionen $\Gamma_{\varphi;ij}^k$ auf V_φ zugeordnet. Diese gehören genau dann zu einem (eindeutig bestimmten) Zusammenhang, falls sie beim Übergang zu einer anderen Karte ψ der Umsetzungsformel* ZCs

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \gamma_k(x)}{\partial x_j} \Gamma_{\varphi;\mu\nu}^j(x) = \frac{\partial^2 \gamma_k(x)}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial \gamma_i(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_j(x)}{\partial x_\nu} \Gamma_{\psi;ij}^k(y) \quad (y = \gamma(x))$$

(mit $\gamma = \psi \circ \varphi^{-1}$) genügen.

Merke: Dies ist nicht das Transformationsverhalten eines Tensors.

Genau dieses Transformationsverhalten hatten die Christoffelsymbole, welche wir eingeführt haben, um Geodätische zu beschreiben. Somit erhalten wir:

2.3 Satz. *Auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit (X, g) existiert ein Zusammenhang ∇ , so daß die Funktionen $\Gamma_{\varphi;ij}^k(x)$ bezüglich einer Karte φ genau die Christoffelsymbole von $(g_{\varphi;ij})$ sind.* ELz

Man nennt diesen Zusammenhang den *Levi-Civita-Zusammenhang*.

Wir übergehen hier den Beweis von Hilfssatz 2.2 und damit von Satz 2.3, da wir einen völlig koordinatenfreien Zugang zum Levi-Civita-Zusammenhang erhalten werde. Es sollte jedoch klar sein, daß diese Beweise direkt aus dem üblichen Transformationsformalismus folgen.

3. Parallelität

Sei ∇ ein Zusammenhang auf dem Vektorraumbündel $\pi : E \rightarrow X$. Sei $a \in X$ und sei $s \in \mathcal{E}(X)$ ein Schnitt von E . Gegeben seien zwei Vektorfelder A, B mit der Eigenschaft $A_a = B_a$. Wir behaupten dann $\nabla_A s(a) = \nabla_B s(a)$. Zum Beweis kann man annehmen, dass E das triviale Bündel über einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist. Dann folgt dies aus der expliziten lokalen Formel. Wir erhalten somit folgenden Hilffsatz.

3.1 Hilffsatz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf dem Vektorraumbündel $\pi : E \rightarrow X$. Sei $a \in X$ ein Punkt und $s \in \mathcal{E}(U)$ ein Schnitt von E über einer offenen Umgebung von a . Man kann für jeden Tangentialvektor $A \in T_a X$ die Richtungsableitung DRicht

$$\nabla_A(s)(a) \in E_a$$

definieren, so daß folgendes gilt: Ist \tilde{A} ein Vektorfeld über einer offenen Umgebung $a \in V \subset U$ mit der Eigenschaft $\tilde{A}_a = A$, so gilt

$$\nabla_A(s)(a) = \nabla_{\tilde{A}}(s|V)(a).$$

Man nennt $\nabla_A(s)(a)$ die Richtungsableitung von s im Punkt a längs A . Diese kann man wohlgermerkt für einen individuellen Tangentialvektor $A \in T_a X$ nur im Punkt a bilden.

Wir benutzen die Richtungsableitung für eine wichtige Konstruktion. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung und sei $\pi_F : F \rightarrow Y$ ein Vektorraumbündel über Y . Man kann dann ein „zurückgezogenes“ Bündel $\pi_E : E \rightarrow X$ definieren. Als Menge ist es durch

$$E := F \times_Y X := \{(A, x); \pi_F(A) = f(x)\}$$

definiert. Man kann dann die Projektion

$$\pi_E : E \rightarrow X, \quad (A, x) \mapsto x,$$

betrachten. Wie sehen die Fasern dieser Abbildung aus? Die Faser über $a \in X$ besteht aus allen Paaren (A, a) mit $A \in F_{f(a)}$. In anderen Worten: Die durch π_E induzierte Abbildung

$$E_a \mapsto F_{f(a)}$$

ist bijektiv. Wir versehen E_a mit einer Struktur als Vektorraum, so dass dies Abbildung ein Isomorphismus ist. Meist identifiziert man E_a mit $F_{f(a)}$ über diesen Isomorphismus. Wir wollen $E \rightarrow X$ mit einer Struktur als Vektorraumbündel versehen. Die Fasern tragen bereits eine Struktur als Vektorraum.

Als Topologie auf E nimmt man die induzierte Topologie von $F \times X$. Es bleibt noch eine differenzierbare Struktur zu erklären.

Sei ∇ ein Zusammenhang auf F . Wir wollen den *zurückgezogenen Zusammenhang* auf E definieren. Der Einfachheit halber bezeichnen wir ihn wieder mit ∇ . Für die Konstruktion ist es wichtig, folgendes zu bedenken. Man kann jedem Schnitt $t \in \mathcal{F}(V)$ über einer offenen Menge den zurückgezogenen Schnitt $s \circ f \in \mathcal{E}(U)$ über $U = f^{-1}(V)$ zuordnen. Man hat hier nur folgendes zu bedenken. Ein Schnitt $s \in \mathcal{E}(U)$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in U$ ein Element $s(x) \in E_x$ zuordnet. Wie wir gesehen haben, kann man E_x mit $F_{f(x)}$ identifizieren. Daher ist $s(x) = t(f(x))$ ein Schnitt von E über U .

An dieser Stelle machen wir darauf aufmerksam, dass es keine natürlichen Abbildungen gibt, welche Vektorfelder auf X in solche auf Y oder umgekehrt abbildet. Das einzige was man hat, sind die Abbildungen individueller Tangentialvektoren, welche durch die Tangentialabbildung $T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$ gegeben sind. Aus diesem Grund mussten wir die Richtungsableitung einführen.

3.2 Satz. *Seien $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung, F ein Vektorraumbündel über Y und E das zurückgezogene Bündel über X . Gegeben sei ein Zusammenhang ∇ auf F . Es gibt genau einen „zurückgezogenen“ Zusammenhang ∇ auf X mit folgender Eigenschaft:*

BackZus

Seien $a \in X$ ein Punkt, $A \in T_a X$ ein Tangentialvektor in a , $B \in T_{f(a)} Y$ sein Bildvektor und t ein Schnitt von F über einer offenen Umgebung von $f(a) \in V \subset Y$. Dann gilt die Formel

$$\nabla_A t \circ f(a) = \nabla_B t(f(a)).$$

Hierbei wurde die Faser E_a mit $F_{f(a)}$ identifiziert.

Beweis.

3.3 Definition. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf einem Vektorraumbündel E . Ein Schnitt s von E über einer offenen Teilmenge heißt **parallel**, falls $\nabla_A(s|_V) = 0$ für jedes Vektorfeld A auf einer offenen Teilmenge $V \subset U$ gilt.*

DParal

Wir behandeln einen sehr wichtigen Spezialfall. Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha : I \rightarrow X$ eine differenzierbare Abbildung. Wir nehmen zunächst an, dass I offen ist, da nur dann I eine differenzierbare Mannigfaltigkeit in unserem Sinne ist. Wir nehmen an, jedem Punkt $t \in I$ sei ein Tangentialvektor $A_t \in T_{\alpha(t)}(X)$ zu. Man nennt dies ein Vektorfeld längs der Kurve I . Wir wollen annehmen, dass dieses von t differenzierbar abhängt. Dies soll einfach bedeuten, dass A_t ein (differenzierbarer) Schnitt des auf I zurückgezogenen Tangentialbündels $\alpha^* T_X$ ist. Man merke also:

Tangentialfelder längs Kurven sind nichts anderes als Schnitte des auf das Parameterintervall zurückgezogenen Tangentialbündels.

Parallelverschiebung

Sei nun ∇ ein Zusammenhang auf X (also auf dem Tangentialbündel von X). Wie wir gesehen haben, kann man ∇ auf I zurückziehen. Sei nun $A = (A_t)$ ein Vektorfeld längs I , so man seine kovariante Abbildung längs Vektorfeldern auf I bilden. Das Basistangentialfeld of I ist d/dt . Wir verwenden die vereinfachende Bezeichnung

$$A' := \nabla_{d/dt} A.$$

Natürlich muss man sich dabei in Klaren sein, dass dies von dem gewählten Zusammenhang ∇ abhängt.

3.4 Definition. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇ . Sei $u : I \rightarrow X$ eine glatte Kurve und (A_t) ein Tangentialfeld längs u . Wir nennen A parallel, wenn $A' = 0$ gilt. DPar

Ein spezielles Tangentialfeld längs der Kurve u ist das Tangentenfeld $\dot{u}(t)$.

3.5 Bemerkung. Eine glatte Kurve $u : I \rightarrow X$ in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit ist genau dann geodätisch, wenn ihr Tangentenfeld parallel in bezug auf den Levi-Civita-Zusammenhang ist. ParLev

Ein anderer Aspekt von Zusammenhängen ist, dass man sie benutzen kann, um die Parallelverschiebung von Tangentialvektoren längs Kurven zu definieren.

3.6 Satz. Sei $u : I \rightarrow X$ eine glatte Kurve in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit Zusammenhang ∇ und sei $t_0 \in I$ ein Punkt, sowie $A_{t_0} \in T_{u(t_0)}X$ ein Tangentialvektor in $u(t_0)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Erweiterung von A_{t_0} zu einem parallelen Vektorfeld A_t längs u . ParF

Der Beweis folgt aus dem Existenz und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen und wird hier übergangen. \square

Satz 4.3.6 besagt insbesondere folgendes. Ist $u : [0, 1] \rightarrow X$ eine glatte Kurve, $a = u(0)$, $b = u(1)$ und ist $A \in T_a X$ ein Tangentialvektor in a , so kann man diesen längs der Kurve u parallel verschieben und gelangt zu einem Tangentialvektor $B \in T_b$. Natürlich kann das Resultat B von der Wahl der Kurve abhängen. Insbesondere kann B von A verschieden sein, wenn u geschlossen ist ($a = b$). Dies führt zu der sogenannten Monodromiegruppe, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen.

Abschließend bemerken wir noch, dass man den Zusammenhang ∇ rekonstruieren kann, wenn man weiß, wie Vektoren längs Kurven parallel zu verschieben sind. Dies eröffnet einen neuen Zugang zur Theorie der Zusammenhänge. Wir gehen hierauf nicht ein.

4. Kovariante Ableitung von Tensoren

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wir erinnern daran, daß man einem differenzierbaren Vektorfeld A einen Operator $A : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$ (U offen) zuordnen kann. Man nennt

$$\nabla_A f := Af$$

auch die kovariante Ableitung von f längs des Vektorfelds A . Man möchte allgemeiner Tensoren längs Vektorfeldern ableiten, also Abbildungen

$$\nabla_A : \mathcal{T}^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{T}^{p,q}(U)$$

definieren. Im Falle $p = q = 0$ soll natürlich der eben behandelte Fall $\nabla_A f = Af$ herauskommen. Dazu braucht man zunächst einmal einen Zusammenhang ∇ des Tangentialbündels. Wir erinnern daran, was dies ist.

*Eine **kovariante Ableitung** oder ein **Zusammenhang** des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Schar von Abbildungen*

$$\mathcal{T}(U) \times \mathcal{T}(U) \longrightarrow \mathcal{T}(U), \quad (A, B) \longmapsto \nabla_A(B),$$

welche mit Restriktion auf kleinere offenen Mengen verträglich ist und so, daß

$$\begin{aligned} \nabla_{fA+gB} &= f\nabla_A + g\nabla_B \\ \nabla_A(fB) &= f\nabla_A(B) + \nabla_A(f)B \end{aligned}$$

gilt ($f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$).

Wir erinnern daran, daß man Zusammenhänge auf offene Untermannigfaltigkeiten einschränken kann. Ist ein Diffeomorphismus $f : X \rightarrow Y$ gegeben, so kann man einen Zusammenhang von X auf Y übertragen und umgekehrt. Wir nehmen einmal an, ein Zusammenhang ∇ des Tangentialbündels sei gegeben. Wir drücken ihn in Komponenten aus. Wir betrachten also eine differenzierbare Karte $\varphi : U_\varphi \rightarrow V_\varphi$. Wir wollen die Formel $C = \nabla_A(B)$ in Komponenten formulieren und übertragen den Zusammenhang auf V_φ (nachdem man ihn auf U_φ eingeschränkt hat). Wir führen dann die Funktionen Γ_{ij}^k durch

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

ein. Der Zusammenhang ist durch die Kenntnis aller Funktionen Γ_{ij}^k bestimmt. Wir schreiben manchmal $\Gamma_{\varphi;ij}^k$ um anzudeuten, daß diese Funktionen von der Karte φ abhängen. Wir haben bereits in Satz 2.3 gesehen:

Auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit (X, g) existiert ein Zusammenhang ∇ (des Tangentialbündels), so daß die Funktionen $\Gamma_{\varphi;ij}^k(x)$ bezüglich einer Karte φ genau die Christoffelsymbole von $(g_{\varphi;ij})$ sind.

Man nennt diesen Zusammenhang den *Levi-Civita-Zusammenhang*.

Wir wollen eine koordinateninvariante Deutung dieses Zusammenhangs geben. Dazu ist es sinnvoll, einen Zusammenhang ∇ auszudehnen und auch die Ableitung $\nabla_A T$ von Tensoren T zu definieren. Wir beginnen damit, einen Zusammenhang ∇ des Tangentialbündels auf Differentiale auszudehnen.

4.1 Hilfssatz. Sei ∇ ein Zusammenhang des Tangentialbündels und sei ω ein Differential und A ein Vektorfeld auf X . Es gibt ein eindeutig bestimmtes Differential $\nabla_A \omega$ mit folgender Eigenschaft. Ist B ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge von X , so gilt KoD

$$(\nabla_A(\omega))(B) = A(\omega(B)) - \omega(\nabla_A(B)).$$

Beweis. Man muss nur nachrechnen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite $\mathcal{C}^\infty(U)$ linear in B ist. Man muss also

$$A(\omega(fB)) - \omega(\nabla_A(fB)) = fA(\omega(B)) - f\omega(\nabla_A(B))$$

zeigen. Tatsächlich gilt

$$A(\omega(fB)) = A(f\omega(B)) = (Af)\omega(B) + fA(\omega(B))$$

und

$$\omega(\nabla_A(fB)) = \omega((Af)B) + \omega(f\nabla_A(B)) = (Af)\omega(B) + f\omega(\nabla_A B).$$

Zieht man die beiden Gleichungen voneinander ab, so erhält man die Behauptung. □

Man kann die kovariante Ableitung auch auf beliebige gemischte Tensoren übertragen.

4.2 Hilfssatz. Sei ∇ ein Zusammenhang auf dem Tangentialbündel von X . Man kann dann für jedes offene $U \subset X$ und jedes Vektorfeld A auf U und jedes (p, q) eine Abbildung AaT

$$\nabla_A : \mathcal{T}^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{T}^{p,q}(U)$$

mit folgenden Eigenschaften definieren:

1. Im Falle $p = q = 0$ ist $\nabla_A(f) = A(f)$.
2. Im Falle $p = 1, q = 0$ stimmt ∇_A mit dem gegebenen Zusammenhang überein.

3. Im Falle $p = 0, q = 1$ stimmt ∇_A mit der Ausdehnung des Zusammenhangs auf Differentiale überein.
4. Die Abbildung ∇_A ist verträglich mit Einschränkung auf kleinere offene Mengen.
5. Die Abbildung ∇_A ist \mathbb{R} -linear.
6. Diese Abbildung genügt der Produktregel

$$\nabla_A(T \otimes S) = T \otimes \nabla_A(S) + \nabla_A(T) \otimes S.$$

Diese Ausdehnung des Zusammenhangs auf Tensoren ist eindeutig.

Der Beweis von 4.2 ist nun leicht zu erbringen. \square

Als eine Übungsaufgabe berechnen wir die kovariante Ableitung eines Tensors $T \in \mathcal{T}^{(0,2)}$. Wenigstens lokal kann man T in der Form $T = \omega_1 \otimes \omega_2$ schreiben. Mittels der Produktformel und 4.1 beweist man nun für solche T und danach allgemein:

4.3 Hilfssatz. Die kovariante Ableitung $\nabla_A(T)$ eines Tensors vom Typ $(0, 2)$ ist durch ckz

$$(\nabla_A(T))(X, Y) = T(X, Y) - T(\nabla_A(X), Y) - T(X, \nabla_A(Y))$$

charakterisiert.

Wir kommen nun zu einer koordinatenfreien Beschreibung des Levi-Civita-Zusammenhangs.

4.4 Satz. Auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit existiert ein und nur ein Zusammenhang ∇ mit den beiden Eigenschaften CLZ

$$\begin{aligned}\nabla_A(B) - \nabla_B(A) &= [A, B] \\ \nabla_A g &= 0.\end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang ist der Levi-Civita-Zusammenhang.

Beweis. Aus $\nabla_A g = 0$ folgt wegen 4.3

$$A(g(X, Y)) = g(\nabla_A X, Y) + g(X, \nabla_A Y)$$

und in Verbindung mit der ersten Bedingung

$$A(g(X, Y)) = g(\nabla_A X, Y) + g(X, \nabla_A Y) + g([A, X], Y).$$

man vertauscht in dieser Formel X, Y, A zyklisch und eliminiert aus diesen drei Gleichungen ∇_X und ∇_Y . Das Resultat ist

$$\begin{aligned}g(X, \nabla_A Y) &= \\ Ag(X, Y) + g(A, [X, Y]) + Yg(X, A) + g(Y, [X, A]) - Xg(Y, A) - g(X, [Y, A]).\end{aligned}$$

Es sollte klar sein, wie man $\nabla_A AY$ hier herausholen kann. Man erinnere sich an die Identifikation $V \cong V^*$ bei Vorhandensein einer nicht ausgearteten Bilinearform. Es ist leicht zu verifizieren, daß das durch diese Formel definierte $\nabla_A(Y)$ die geforderten Eigenschaften hat.

Wir übergehen den Nachweis, daß es sich um den bereits eingeführten Levi-Civita-Zusammenhang handelt. \square

5. Der Riemann'sche Krümmungstensor

Man rechnet ohne Mühe nach:

5.1 Hilfssatz. *Ist ∇ ein Zusammenhang, so ist*

DRt

$$R(A, B, C, D) = g(\nabla_A \nabla_B(C), D) - g(\nabla_B \nabla_A(C), D) - g(D, \nabla_{[A, B]}(C)).$$

ein Tensor vom Typ $(0, 4)$.

Zum Beweis muß man lediglich die Formel

$$R(f_1 A, f_2 B, f_3 C, f_4 D) = f_1 f_2 f_3 f_4 R(A, B, C, D)$$

verifizieren. \square

Man nennt diesen Tensor den dem Zusammenhang zugeordneten Krümmungstensor (in seiner kovarianten Form).

5.2 Satz. *Sei (X, g) eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. Der dem Levi-Civita-Zusammenhang zugeordnete Krümmungstensor stimmt mit dem Riemann'schen Krümmungstensor überein.*

CRt

Auch dies kann man direkt nachrechnen. \square

Man rechnet leicht folgende Eigenschaften von R nach.

5.3 Hilfssatz. *Es gilt*

BiD

$$R(A, B, C, D) = -R(B, A, C, D) = -R(A, B, D, C) = R(C, D, A, B),$$

$$R(A, B, C, D) + R(B, C, A, D) + R(C, A, B, D) = 0 \quad (\mathbf{Bianchi-Identität}).$$

Neben der rein kovarianten Form betrachtet man auch gemischte Formen des Riemann'schen Krümmungstensors und bezeichnet sie all mit demselben Buchstaben R . Beispielsweise kann man den $(1, 3)$ Tensor $R(\omega, B, C, D)$ betrachten. Wir erinnern, wie er zu definieren ist. Dem Differential ω entspricht ein Vektorfeld A , welches durch $\omega(X) = g(A, X)$ definiert ist. Wir setzen

$$R(\omega, B, C, D) := R(A, B, C, D) \quad (\omega(X) = g(A, X)).$$

Wir wollen die Darstellungen in Koordinaten ausrechnen. Sei also (D, g) ein pseudoriemannsches Gebiet. Wir setzen wie für Tensoren üblich

$$R_{ijkl} := R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l), \quad R^i_{jkl} := R(dx_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l).$$

Um die Formeln erträglich zu halten, verwenden wir die Abkürzungen

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{und} \quad \nabla_i := \nabla_{\partial_i}.$$

Wir berechnen als erstes $\nabla_i(\nabla_j \partial_k)$.

$$\begin{aligned} \nabla_i(\nabla_j \partial_k) &= \nabla_i \left(\sum_{\nu} \Gamma^{\nu}_{jk} \partial_{\nu} \right) = \sum_{\nu} (\partial_i \Gamma^{\nu}_{jk}) \partial_{\nu} + \sum_{\nu} \Gamma^{\nu}_{jk} \nabla_i \partial_{\nu} \\ &= \sum_{\nu} (\partial_i \Gamma^{\nu}_{jk}) \partial_{\nu} + \sum_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{jk} \Gamma^{\mu}_{i\nu} \partial_{\mu}. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus $\nabla_i(\nabla_j \partial_k)$, indem man die Indizes i, j vertauscht. Beachtet man noch $[\partial_i, \partial_j] = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \sum_{\nu} (\partial_i \Gamma^{\nu}_{jk}) (\partial_{\nu}, \partial_l) + \sum_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{jk} \Gamma^{\mu}_{i\nu} (\partial_{\mu}, \partial_l) - \\ &\quad \sum_{\nu} (\partial_j \Gamma^{\nu}_{ik}) (\partial_{\nu}, \partial_l) - \sum_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{ik} \Gamma^{\mu}_{j\nu} (\partial_{\mu}, \partial_l) \end{aligned}$$

oder in leicht veränderter Form

$$R_{ijkl} := \sum_{\nu} g_{\nu l} \left(\partial_i \Gamma^{\nu}_{jk} - \partial_j \Gamma^{\nu}_{ik} + \sum_{\mu} \Gamma^{\mu}_{jk} \Gamma^{\nu}_{i\mu} - \sum_{\mu} \Gamma^{\mu}_{ik} \Gamma^{\nu}_{j\mu} \right).$$

Wir wollen auch die Komponenten

$$R^i_{jkl} = R(dx_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$$

ausrechnen. Wir rechnen das ∂_i entsprechende Differential $\sum_j f_{ij} dx_j$ aus. Es ist definiert durch die Bedingung

$$\left(\sum_j f_{ij} dx_j \right) (\partial_k) = g(\partial_i, \partial_j) \quad (= g_{ij})$$

definiert. Nach Definition gilt $dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$. Wir erhalten also $f_{ik} = g_{ik}$. Damit erhalten wir

$$R_{ijkl} = \sum_{\nu} g_{i\nu} R^{\nu}_{jkl}.$$

Um Anschluss an die obige Formel zu bekommen, vertauschen wir die Indizes i und l .

$$R_{ljki} = \sum_{\nu} g_{\nu l} R_{jki}^{\nu}.$$

Nutzt man die Relation $R_{ikjl} = R_{ljki}$ aus, so folgt

$$R_{ikjl} = \sum_{\nu} g_{\nu l} R_{jki}^{\nu}.$$

Vertauscht man noch k mit j so erhält man

$$R_{ijkl} = \sum_{\nu} g_{\nu l} R_{kji}^{\nu}.$$

Vergleich mit obiger Formel für R_{ijkl} ergibt nun

$$R_{kji}^{\nu} = \partial_i \Gamma_{jk}^{\nu} - \partial_j \Gamma_{ik}^{\nu} + \sum_{\mu} \Gamma_{jk}^{\mu} \Gamma_{i\mu}^{\nu} - \sum_{\mu} \Gamma_{ik}^{\mu} \Gamma_{j\mu}^{\nu}.$$

Ersetzt man (ν, k, j, i) durch (i, j, k, l) , so erhält man:

5.4 Satz. *Es gilt*

KompR

$$R_{ijkl}^i = \partial_l \Gamma_{kj}^i - \partial_k \Gamma_{lj}^i + \sum_{\mu} \Gamma_{kj}^{\mu} \Gamma_{l\mu}^i - \sum_{\mu} \Gamma_{lj}^{\mu} \Gamma_{k\mu}^i,$$

$$R_{ijkl} = \sum_{\nu} g_{i\nu} R_{jkl}^{\nu}.$$

Wir wollen Verjüngungen des Riemann'schen Krümmungstensors untersuchen. Wir erinnern an den Mechanismus der Verjüngung. Sei (V, g) ein endlich dimensionaler Vektorraum mit einer ausgezeichneten nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform g . Sei B eine weitere Bilinearform B . Wir wollen diese verjüngen, ihr also eine Zahl zuordnen. Hier ist der Mechanismus. B definiert zunächst eine lineare Abbildung $B : V \rightarrow V^*$. g definiert einen Isomorphismus $V \rightarrow V^*$. Beide zusammen liefern eine lineare Abbildung $V \rightarrow V$. Deren Spur ist die Verjüngung von B . Halten wir dies nochmals fest.

5.5 Hilfssatz. *Sei (V, g) ein Vektorraum mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform g . Dann gibt es einen Isomorphismus*

IsBH

$$\text{Hom}(V, V) \xrightarrow{\sim} \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}), \quad f \longmapsto B.$$

Er ist durch die Formel

$$B(a, b) = g(f(a), b)$$

charakterisiert.

Man kann diese Abbildung auch leicht mit Basen verfolgen: Sei e_1, \dots, e_n eine Basis von V . Die lineare Abbildung wird dann durch eine Matrix C gegeben,

$$f(e_i) = \sum_j c_{ji} e_j.$$

Die Formel in Hilfssatz 5.5 lautet

$$B(e_i, e_j) = g(f(e_i), e_j) = \sum_\nu c_{\nu i} g(e_\nu, e_j).$$

Bezeichnen wir der Einfachheit die Matrix $(B(e_i, e_j))$ wieder mit B und mit g die Matrix $(g(e_i, e_j))$, so lautet diese Formel

$$B = C'g \quad \text{oder} \quad C = g^{-1}B'.$$

Dies ergibt folgende explizite Formel für die Verjüngung von B :

$$\sum_{i,j} g^{ij} b_{ij}$$

Diese Zahl ist Null, wenn B alternierend ist, $B(a, b) = -B(b, a)$. Ist allgemeiner

$$T : \overbrace{V \times \dots \times V}^{n\text{-fach}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \geq 2,$$

eine multilineare Abbildung. Man kann zwei Indizes $1 \leq i < j \leq n$ herausgreifen. Indem man die restlichen Variablen festhält, kann man T als bilineare Abbildung der Variablen v_i, v_j auffassen und dann verjüngen. Läßt man die restlichen Variablen wieder laufen, so erhält man die Verjüngung

$$C_{ij}T : \overbrace{V \times \dots \times V}^{(n-2)\text{-fach}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dies kann man auch auf kovariante Tensorfelder (punktweise) anwenden und so einen n -fach kovarianten Tensor zu einem $(n-2)$ -fach kovarianten verjüngen.

Wir wenden dies auf den Krümmungstensor $R(A, B, C, D)$ an. Je nachdem man zwei der vier Komponenten A, B, C, D herausgreift, erhält man 6 mögliche Verjüngungen. Wir definieren den Riccitenor durch Kontraktion der zweiten und dritten Komponente. Seine Komponenten sind demnach

$$\text{Ric}_{i,l} = \sum_{jk} g^{jk} R_{i,j,k,l}.$$

Mittels der Relationen aus Hilfssatz 5.3 kann man zeigen, dass eine Verjüngung entweder Null ergibt (zum Beispiel wenn man A und B kontrahiert) oder den

Ricci-Tensor oder sein Negatives Man kann zeigen, daß diese Verjüngung entweder 0 ergibt, zum Beispiel wenn man A, B herausgreift oder den Ricci-Tensor oder das Negative des Ricci-Tensors. Der Ricci-Tensor ist also bis aufs Vorzeichen die einzig relevante Verjüngung des Riemann'schen Krümmungstensors.

Man kann nachrechnen, daß der Ricci-Tensor symmetrisch ist,

$$\text{Ric}(A, B) = \text{Ric}(B, A).$$

Man kann den Ricci-Tensor nochmals verjüngen. Das Resultat ist eine Funktion auf X , die sogenannte *skalare Krümmung*. In Komponenten lautet sie

$$\sum_{i,j,k,l} g^{il} g^{jk} R_{ijkl}.$$

Wir berechnen sie für Flächen. Benutzt man die Formeln aus Hilfssatz 5.3, so erhält man

$$R_{1111} = R_{2222} = R_{1112} = R_{1121} = R_{1211} = R_{2111} = R_{2221} = R_{1222} = 0$$

sowie

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{2121} = -R_{1212}.$$

In diesem Falle erhält man für die skalare Krümmung $-2R_{1212}(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21})$. Dies ist das doppelte der Gauß'schen Krümmung.

5.6 Satz. *Die Gauß'sche Krümmung einer Fläche ist genau die halbe skalare Krümmung.* GiS

Dies zeigt nocheinmal die isometrische Invarianz der Gauß'schen Krümmung! Wir wollen diesen Satz etwas allgemeiner formulieren. (Die Rechnung ist aber dieselbe).

5.7 Hilfssatz. *Sei (V, g) ein zweidimensionaler Vektorraum, welcher mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform versehen sei. Sei R ein vierfach kovarianter Tensor, welcher den in Hilfssatz 5.3 formulierten Relationen genügt. Ist A, B eine Basis von V , so bilden wir* SchnAb

$$\frac{R(A, B, B, A)}{g(A, A)g(B, B) - g(A, B)^2}.$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Genauer gilt. Sein Doppeltes ist gleich der zweifachen Verjüngung von $R(A, B, C, D)$, wobei zuerst B, C und anschließend die zwei verbleibenden Variablen A, D kontrahiert werden.

Die Schnittkrümmung

Sei jetzt (X, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Sei $V \subset T_a X$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Sei A, B eine Basis von V . Wie wir gesehen haben, hängt der Ausdruck

$$K_{a,V}(X, g) = \frac{R(A, B, A, B)}{g(A, A)g(B, B) - g(A, B)^2}.$$

nicht von der Wahl der Basis A, B ab. Man nennt dies die *Schnittkrümmung* von X im Punkte a „in Richtung“ V . Ist X eine Fläche, so kann man für V nur den vollen Tangentialraum nehmen. Wie wir gesehen haben, ist die Schnittkrümmung gleich der Gauß'schen Krümmung. Allgemein kann man die Schnittkrümmung wie folgt interpretieren: Mit Hilfe der Exponentialabbildung kann man leicht in einer kleinen offenen Umgebung von a eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit $a \subset Y \subset X$ konstruieren, so daß V gleich dem Tangentialraum $T_a Y$ ist. Man kann die Riemann'sche Metrik g auf Y einschränken und erhält dann eine zweidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Die Schnittkrümmung ist offenbar genau der Gauß'sche Krümmung dieser Fläche im Punkt a . Diese Schnittkrümmung ist sehr viel anschaulicher als der Riemann'sche Krümmungstensor. Sie enthält aber noch die volle Information des Riemann'schen Krümmungstensors. Beispielsweise gilt (ohne Beweis):

Seien g_1, g_2 zwei Riemann'sche Metriken auf derselben differenzierbaren Mannigfaltigkeit X . Wenn alle Schnittkrümmungen von g_1 und g_2 (in allen Punkten) übereinstimmen, so stimmen auch die Riemann'schen Krümmungstensoren überein.

Ein weiterer Satz (ohne Beweis) unterstreicht die Richtigkeit des Konzeptes des Krümmungstensors:

Der Riemann'sche Krümmungstensor ist genau dann identisch Null, wenn (X, g) lokal flach ist, wenn also jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, welche zu einem offenen Teil des \mathbb{R}^n , versehen mit der Einheitsmatrix als Metrik, isometrisch äquivalent ist.

Ziemlich tief ist folgender Sphärensatz (ohne Beweis):

Sei $X = (X, g)$ eine zusammenhängende vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Die Schnittkrümmung sei konstant in dem Sinne, daß sie in jedem Punkt $a \in X$ und für jeden zweidimensionalen Untervektorraum $W \subset T_a X$ denselben Wert hat. Dieser Wert sei positiv. Dann ist X isometrisch äquivalent zu einer Sphäre

$$\{ x \in \mathbb{R}^n; \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2 \} \quad (r > 0),$$

welche natürlich mit der Riemann'schen Metrik versehen wurde, welche man durch Einschränkung der Euklidischen Metrik des \mathbb{R}^n erhält.

Diese Resultate zeigen, daß der Riemann'sche Krümmungstensor vollständig die „innere Krümmung“ beschreibt. Das Konzept der Schnittkrümmung zeigt, dass innere Krümmung ein Phänomen ist, welches im Zweidimensionalen auf-taucht und dort auch in gewissem Sinne endet.

6. Riemann'sche Mannigfaltigkeiten als metrischer Raum

Bekanntlich ist im \mathbb{R}^n – aufgefaßt als Riemann'sches Gebiet mit der Rie-mann'schen Metrik $g(x) = E$ (Einheitsmatrix) – die Verbindungsstrecke $u(t) = a + t(b - a)$ ($0 \leq t \leq 1$) die kürzeste Verbindung zweier Punkte a, b . Wir begründen dies kurz. Die Länge der Verbindungsstrecke ist offenbar die Euklidische Norm $\|b - a\|$. Für jede andere Verbindungskurve u (parametrisiert durch das Einheitsintervall) gilt

$$l(u) = \int_0^1 \|\dot{u}(t)\| dt \geq \left\| \int_0^1 \dot{u}(t) dt \right\| = \|a - b\|.$$

Die hierbei auftretende Ungleichung folgt aus der analogen für endliche Sum-men durch Grenzübergang.

Wir setzen im folgenden immer voraus, daß $X = (X, g)$ eine zusammenhän-gende Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist. Dann kann man je zwei Punkte a, b durch eine stückweise glatte Kurve

$$u : [0, 1] \longrightarrow X, \quad u(0) = a, \quad u(1) = b$$

verbinden. Man kann all diese Verbindungskurven und das Infimum ihrer Längen betrachten

$$d_X(a, b) := \inf_u l_g(u).$$

Man kann zeigen, daß es genügt, sich auf glatte Kurven zu beschränken. Wir beweisen dies nicht, fassen uns jedoch immer bei Fragen der stückweisen Glattheit kurz.

6.1 Satz. Die Funktion

MRm

$$d_X(a, b) := \inf_u l_g(u)$$

ist eine Metrik auf X . Die zugehörige Toplogie stimmt mit der gegebenen Toplo-gie auf X überein.

Beweis. Von den Axiomen einer Metrik sind die Reflexivität, Symmetrie und die Dreiecksungleichung klar. Nicht klar ist vorerst die Definitheit ($d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$) und die Gleichheit der Topologien. Diese gilt es nun zu beweisen:

Sei $a \in X$ ein Punkt und φ eine differenzierbare Karte mit $a \in U_\varphi$ und $\varphi(a) = 0$. Wir betrachten auf V_φ zwei verschiedene Metriken:

1. Die von d_X auf X übertragene Metrik. Diese bezeichnen wir mit d , also

$$d(x, y) = d_X(a, b) \quad \text{mit} \quad x = \varphi(a), \quad y = \varphi(b).$$

2. Die Euklidische Metrik

$$d'(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Im folgenden sei $r > 0$ immer so klein, daß die Euklidische Kugel $\|x\| \leq r$ ganz in V_φ enthalten ist.

Behauptung. *Ist $r > 0$ genügend klein, so sind die Metriken d und d' auf der Kugel $\|x\| < r$ äquivalent. Es existiert als ein $C > 0$ mit*

$$d(x, y) \leq C d'(x, y), \quad d'(x, y) \leq C d(x, y) \quad \text{für} \quad \|x\|, \|y\| < r.$$

Es ist klar, daß Satz 6.1 aus dieser Behauptung folgt. Zu ihrem Beweis betrachten wir die Funktion

$$\{A; \|A\| = 1\} \times \{x; \|x\| \leq r\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (A, x) \longmapsto g(x)[A].$$

Als stetige Funktion auf einem Kompaktum besitzt sie Minimum und Maximum und beide sind positiv. Wählt man die Konstante C genügend groß, so folgt für alle x mit $\|x\| \leq r$ die Ungleichung

$$C^{-1}\|A\|^2 \leq g(x)[A] \leq C\|A\|^2$$

zunächst unter der Nebenbedingung $\|A\| = 1$ und dann aus Homogenitätsgründen für alle A .

Die Behauptung wäre nun klar, wenn man bei der Definition von d_X nur Kurven zuließe, welche ganz in dem Teil $U \subset X$ verlaufen, der dem Kartenbereich $\|x\| < r$ entspricht. Es könnte aber zu jeder Verbindungskurve zweier Punkte a, b in U , welche in U verläuft, eine kürzere Verbindungskurve existieren, welche U zeitweilig verläßt. Wir zeigen nun, daß dies nicht eintreten kann, wenn man r geeignet verkleinert. Wir wollen also r durch ein geeignetes ε mit $0 < \varepsilon < r$ ersetzen. Wenn eine Kurve in der ε -Kugel startet und nicht ganz in U verläuft, so ist ihre Länge mindestens $C^{-1}(r - \varepsilon)$. (Es gibt ein kleinstes t_0 , so daß $u([0, t_0])$ ganz im Abschluß von U enthalten ist.) Andererseits können zwei Punkte aus der ε -Kugel innerhalb dieser durch eine Kurve (sogar ein Strecke) der Länge $\leq 2C\varepsilon$ verbinden lassen. Wählt man ε genügend klein, so ist dies kleiner als $C^{-1}(r - \varepsilon)$. \square

7. Die Exponentialfunktion

Wir setzen wieder voraus, daß (X, g) eine zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist. Sei $a \in X$ ein fest gewählter Punkt. Wir betrachten zu beliebigem $A \in T_a X$ die Geodätische $u_{a,A}(t)$ mit Anfangspunkt a und Anfangsrichtung A . Sie ist auf einem gewissen Intervall $(-r, r)$ definiert. Schränkt man sich auf alle A aus einem Kompaktum ein, so kann man r für all diese A gemeinsam wählen. Da mit $u(t)$ auch $u(t_0 t)$ geodätisch ist, gilt:

7.1 Bemerkung. Die Geodätische $u_{a,A}(t)$ sei auf dem Intervall $(-r, r)$ definiert. Es gilt RTg

$$u_{a,sA}(t) = u_{a,A}(st) \quad (|t| < r, |s| \leq 1).$$

Hieraus ergibt sich auch:

7.2 Bemerkung. Sei $a \in X$. Es existiert eine offene Umgebung GEf

$$0 \in U \subset T_a X,$$

so daß die Geodätische $u_{a,A}$ für alle $A \in U$ auf dem Intervall $(-2, 2)$ definiert ist. Insbesondere ist dann die Abbildung

$$\exp_a : U \longrightarrow X, \quad \exp_a(A) := u_{a,A}(1),$$

wohldefiniert.

Die Exponentialabbildung ist natürlich differenzierbar. Wir können insbesondere ihre Tangentialabbildung im Nullpunkt betrachten. Dies ist eine lineare Abbildung

$$T_0 U = T_a X \longrightarrow T_a X.$$

7.3 Hilfssatz. Die Tangentialabbildung $J(0, \exp_a)$ der Exponentialabbildung im Nullpunkt ist die Identität. TiI

Folgerung. Es existiert eine offene Umgebung von 0 im Tangentialraum $T_a X$, welche durch die Exponentialfunktion diffeomorph auf eine offene Umgebung von $a \in X$ abgebildet wird.

Beweis. Ist $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ein n -Tupel differenzierbarer Funktionen, welche in einer offenen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ definiert sind, so gilt nach der Kettenregel

$$\left. \frac{d}{dt} f_i(ta) \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) a_j.$$

Die Funktionalmatrix im Nullpunkt ist demnach genau dann die Einheitsmatrix, wenn

$$\left. \frac{d}{dt} f(ta) \right|_{t=0} = a$$

gilt. Zum Beweis von 7.3 ist also

$$\left. \frac{d}{dt} \exp_a(tA) \right|_{t=0} = A$$

zu zeigen. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung 7.2

$$\exp_a(tA) = u_{a,A}(t).$$

Die Kurven $\exp_a(tA)$ sind also insbesondere genau die Geodätischen zu den Anfangswerten (a, A) .

Wir wollen die Exponentialabbildung \exp_a auch zu variablem Mittelpunkt betrachten. Zunächst einmal sollte klar sein, daß es zu jedem $a \in X$ eine offene Umgebung $U \subset TX$ von $(a, 0)$ gibt, so daß

$$U \longrightarrow X, \quad (a, A) \longrightarrow \exp_a(A)$$

wohldefiniert ist. Wir betrachten allgemeiner

$$U \longrightarrow X \times X, \quad (b, A) \longmapsto (b, \exp_a(A)).$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die Jacobiabbildung dieser Abbildung in $(a, 0)$ invertierbar ist. Zum Beweis kann man annehmen, daß $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Riemann'sches Gebiet ist. Dann ist $TX = X \times \mathbb{R}^n$ und die Funktionalmatrix ist offenbar von der Form

$$\begin{pmatrix} E & * \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad E \text{ Einheitsmatrix.}$$

Damit folgt:

7.4 Hilfssatz. *Zu jedem Punkt $a \in X$ existiert eine offene Umgebung $(a, 0) \in TX$, so daß die Abbildung*

$$U \longrightarrow X \times X, \quad (b, A) \longmapsto (b, \exp_a(A))$$

einen Diffeomorphismus von U auf eine offene Umgebung von (a, a) bewirkt.

8. Normalkoordinaten

Nach 7.3 definiert die Exponentialfunktion einen Diffeomorphismus kleiner offener Umgebungen

$$\exp_a : U \longrightarrow V, \quad 0 \in U \in T_a X, \quad a \in V \subset X.$$

Die Umkehrung von \exp_a ist also eine differenzierbare Karte. Das Kartenblatt U trägt somit eine Struktur als Riemann'sches Gebiet. Damit können wir beweisen.

8.1 Satz. *Zu jedem Punkt $a \in X$ einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit existiert eine offene Umgebung, welche isometrisch zu einem Riemann'schen Gebiet (D, g) mit folgenden Eigenschaften ist:* GNf

- 1) D ist die Euklidische Einheitskugel $\|x\| < 1$.
- 2) Die Matrix $g(0)$ ist die Einheitsmatrix.
- 3) Die Geraden durch den Nullpunkt $u(t) = tA$ sind geodätisch.

Wichtig hierbei ist nur die Eigenschaft 3), welche man mit der Karte „Exponentialfunktion“ erreicht. Die Eigenschaft 2) kann man durch eine Transformation $g(x) \mapsto A'g(x)A$ mit konstantem A erreichen (ohne 3) zu verlieren) und 1) erreicht man durch Reskalierung. □

Riemann'sche Gebiete mit den Eigenschaften 1)-3) sind sehr spezieller Natur. Wir formulieren zwei Eigenschaften:

8.2 Hilfssatz. *Sei (D, g) ein Riemann'sches Gebiet wie in Satz 8.1. Die Funktion* EeG

$$t \longmapsto g(tA)[A] \quad (\|tA\| < R)$$

ist für jedes $A \in \mathbb{R}^n$ konstant $\|A\|^2$.

Folgerung. *Die Länge $l_g(u)$ der Geodätischen $u(t) = tA$, $0 \leq t \leq t_0$ ($0 < t_0 < 1$) ist gleich ihrer Euklidischen Länge $t_0\|A\|$.*

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Konstanz der Geschwindigkeit der Geodätischen tA . Sie besagt, dass $\sum g_{ij}(tA)A_i A_j$ konstant ist. Die Konstante ermittelt man aus $t = 0$. □

Wir nennen zwei Zeilen-Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ senkrecht bezüglich einer symmetrischen $n \times n$ -Matrix S , falls

$$aSb' = \sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} a_i b_j = 0$$

gilt.

8.3 Hilfssatz (Gauß'sches Lemma). Sei (D, g) ein Riemann'sches Gebiet EzG
wie in 8.1. Seien $A, B \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren, welche bezüglich $g(0)$ senkrecht
stehen. (Da $g(0)$ die Einheitsmatrix ist, bedeutet dies, daß A, B im üblichen
Euklidischen Sinne senkrecht stehen.) Dann stehen sie auch senkrecht bezüglich
allen $g(a)$ mit $a \in D \cap \mathbb{R}A$.

Beweis. Es ist klar, daß man diesen Hilfssatz nur in der Dimension zwei be-
weisen muß und außerdem annehmen kann, daß A, B die beiden Einheitsvek-
toren sind. Wir müssen zeigen, dass $(1, 0)g(t, 0)(0, 1)'$ verschwindet.

Wir haben also im Falle $n = 2$ zu zeigen, daß $g(t, 0)$ für alle t mit $|t| < 1$ eine
Diagonalmatrix ist.

Zum Beweis ist es zweckmäßig, Polarkoordinaten einzuführen. Die Abbildung

$$(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad 0 < r < 1,$$

ist ein lokaler Diffemomorphismus. Wir betrachten die zurückgezogene Rie-
mann'sche Metrik

$$\tilde{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Wir werden sogar zeigen, daß $\tilde{g}(a)$ für alle a eine Diagonalmatrix ist.

Dann ist $g(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ wenigstens dann eine Diagonalmatrix, wenn $\sin \varphi = 0$
ist.

Die Kurven $u(t) := (tr, \varphi)$ sind für festes (r, φ) geodätisch bezüglich \tilde{g} . Aus
der Differentialgleichung für Geodätische folgt

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \tilde{\Gamma}_{11}^2 = 0$$

also mittels der expliziten Gestalt der Christoffelsymbole

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{11} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial r} + \tilde{g}^{12} \left(2 \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial \varphi} \right) &= 0 \\ \tilde{g}^{21} \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial r} + \tilde{g}^{22} \left(2 \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial \varphi} \right) &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial r} = 0, \quad 2 \frac{\partial \tilde{g}_{12}}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{g}_{11}}{\partial \varphi}.$$

Folgedessen gilt

$$\tilde{g}_{11}(r, \varphi) = h(\varphi) \quad \text{und} \quad \partial \tilde{g}_{12} = \frac{1}{2} h'(\varphi) + l(\varphi)$$

mit gewissen Funktionen einer Veränderlicher h, l .

Andererseits folgt aus der \tilde{g} definierenden Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten $h(\varphi) = 1$ und $l(\varphi) = 0$. □

8.4 Hilfssatz. Sei (D, g) ein Riemann'sches Gebiet wie in Satz 8.1. Sei $u : [0, 1] \rightarrow D - \{0\}$ eine stückweise glatte Kurve mit $u(0) = a$, $u(1) = b$. Es gelte $\|a\| = \alpha$ und b mit $\|b\| = \beta$ (Euklidische Norm). Dann gilt emM

$$l_g(u) \geq |\beta - \alpha|.$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnung

$$\|x\|_S := \sqrt{S[x]} \quad (= \sqrt{\sum s_{ij}x_i x_j})$$

für die von einer symmetrischen positiv definiten Matrix S induzierte Norm. Wir erinnern an die Formel

$$l_g(u) = \int_0^1 \|\dot{u}(t)\|_{g(u(t))} dt.$$

Wir nehmen hierbei o.B.d.A. an, daß $u(t)$ durch $0 \leq t \leq 1$ parametrisiert wurde.

Wir setzen

$$a(t) = \|u(t)\|_{g(u(t))}.$$

Wir schreiben $u(t)$ in „Polarkoordinaten“,

$$u(t) = a(t)b(t), \quad \|b(t)\|_{g(u(t))} = 1.$$

Aus Hilfssatz 8.2 folgt

$$g(a(t)b(t))[b(t)] = \|b(t)\|,$$

also

$$\|b(t)\|_{g(u(t))} = \|b(t)\| \quad (\text{Euklidische Norm}).$$

Wir bilden die Funktion zweier Variabler

$$\alpha(s, t) = sb(t).$$

Die Kurve $u(t)$ schreibt sich dann

$$u(t) = \alpha(a(t), t).$$

Hieraus ergibt sich

$$\dot{u} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \dot{a} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Wir benutzen nun $\langle b(t), b(t) \rangle = 0$. Durch Differentiation erhält man hieraus $\langle b'(t), b(t) \rangle = 0$. Es folgt

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 0,$$

wobei das Skalarprodukt bezüglich der Euklidischen Metrik zu bilden ist. Aus Hilfssatz 8.3 folgt aber, daß dann auch $b(t) = \partial \alpha / \partial s$ und $\partial \alpha / \partial t$ aufeinander senkrecht bezüglich $g(u(t))$ stehen. Hieraus wiederum folgt

$$\|\dot{u}(t)\|_{g(u(t))}^2 = \dot{a}(t)^2 + \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\|_{g(u(t))}^2 \geq \dot{a}(t)^2.$$

Dies ist die entscheidende Ungleichung. Aus ihr folgt

$$l_g(u) \geq \int_0^1 |\dot{a}(t)| dt.$$

Es gilt die folgende allgemeine Ungleichung

$$\int_0^1 |\dot{a}(t)| dt \geq \|a(1)\| - \|a(0)\| = |\beta - \alpha|.$$

Gleichheit gilt nur, wenn $\dot{a}(t)$ immer ≥ 0 oder immer ≤ 0 ist. Damit ist Hilfssatz 8.4 bis auf den Zusatz bewiesen. Dieser folgt aus Hilfssatz 8.2.

□

Wenn die Ungleichung $l_g(u) \geq |\alpha - \beta|$ eine Gleichung ist, so muss notwendigerweise $\dot{b} = 0$ gelten. Hieraus folgt.

Wenn in Hilfssatz 8.4 Gleichheit gilt, so verläuft $u(t)$ notwendigerweise auf der Strecke zwischen a und b . zemM

8.5 Satz. *Sei (D, g) eine Riemann'sches Gebiet wie in Satz 8.1. Seien a, b zwei Punkte aus D , welche auf derselben Geraden durch den Nullpunkt. Die Verbindungsstrecke ist eine Geodätische der Länge $\|a - b\|$ (Euklid'sche Norm). Sie ist eine kürzeste Verbindungslinie in der Klasse aller stückweisen glatten Verbindungskurven. Jede andere kürzeste Verbindungskurve verläuft ganz in der Verbindungsstrecke.*

ErsG

Zum ersten Mal haben wir in einer speziellen Situation ein Resultat erhalten, dass kürzeste Verbindungen durch Geodätische gegeben werden können.

Beweis von 8.5. Es besteht ein kleines Problem, wenn der Nullpunkt in der Verbindungsstrecke enthalten ist. In Satz 8.1 hatten wir den Nullpunkt ausgeschlossen, da sonst ein Problem besteht, Polarkordinaten einzuführen. Dieses Problem ist aber kein echtes Problem. Gäbe es eine kürzere Verbindungskurve als die Strecke, so gäbe es auch eine, welche den Nullpunkt nicht trifft.

□

9. Geodätisch konvexe Umgebungen

Wir beweisen in diesem Abschnitt, dass Geodätische wenigstens in Kleinen stets kürzeste Verbindungen sind.

9.1 Definition. *Eine offene Teilmenge $W \subset X$ einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit X heißt geodätisch konvex, falls folgende Bedingung erfüllt ist:* EgK

Zu je zwei Punkten a, b existiert genau eine Geodätische $u(t)$, $0 \leq t \leq 1$, welche innerhalb W verläuft und welche a mit b verbindet, $u(0) = a$, $u(1) = b$. Ist v irgendeine stückweise glatte Kurve in X , welche a mit b verbindet, so gilt $l_g(v) \geq l_g(u)$. Im Falle von Gleichheit haben u und v dasselbe Bild. Ist v überdies glatt und regulär parametrisiert, so entsteht v durch Umparametrisierung von u .

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von

9.2 Theorem. *Sei (X, g) eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit assoziierter Metrik d . Sei $a \in X$ ein Punkt von X . Die Menge* EgK

$$B_r(a) := \{x \in X; d(a, x) < r\}$$

ist geodätisch konvex, wenn r genügend klein ist.

Zum Beweis betrachtet man eine offene Umgebung U von a , welche zu einem Riemann'schen Gebiet (D, g) wie in Satz 8.1 isometrisch ist. Die Umgebung W wird so konstruiert werden, daß sie in U enthalten ist und in D der Euklidischen Kugel $\|x\| < r$ entspricht mit geeignetem $r < 1$ entspricht.. Wir bezeichnen diese Umgebung mit $a \in D(r) \subset X$. Die Zahl $r > 0$ wird man genügend klein zu wählen haben. Zu jedem $0 < \epsilon < 1$ kann man r so klein wählen, daß sich je zwei Punkte aus $D(r)$ innerhalb $D(r)$ durch eine Kurve u der Länge $l_g(u) < \epsilon$ verbinden lassen. Man nehme einfach Euklidische Verbindungsstrecken in D . Aus 8.4 folgt, daß jede Kurve, die in $D(r)$ startet aber den Bereich U verläßt, die Länge mindestens $1 - r$ hat. Wir sehen also:

Wählt man r genügend klein, so existiert zu jeder Kurve in X , welche zwei Punkte a, b aus $D(r)$ verbindet, eine kürzere Verbindungskurve, welche ganz in U verläuft.

Aus diesem Grunde ist es für den Beweis von 9.2 ausreichend, X durch U zu ersetzen. Dann kann man aber gleich annehmen, daß X das Riemann'sche Gebiet (D, g) ist. Für den Rest des Beweises arbeiten wir also nur mit diesem Gebiet und nicht mehr mit der Mannigfaltigkeit X .

Wir müssen die Exponentialfunktion \exp_a zu variablem a betrachten und stützen uns hierbei auf Hilfssatz 7.4. Man kann mit diesem Hilfssatz leicht folgendes zeigen:

Wählt man $r < 1$ genügend klein, so existiert zu jedem Punkt $a \in D(r)$ eine offene Umgebung $U(b) \subset D$ mit Mittelpunkt b , welche durch \exp_a diffeomorph auf eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt b abgebildet wird, so dass $D(r) \subset U(b)$ gilt.

Die gesuchte geodätisch konvexe Menge wird von der Form $D(\varepsilon)$ mit $0 < \varepsilon < r$ sein. Wir können zunächst ε so klein wählen, dass zu der Kurve in D , welche zwei Punkte a, b in $W(\varepsilon)$ verbindet und welche $D(r)$ verläßt, eine kürzere Verbindung innerhalb $W(\varepsilon)$ existiert. Seien nun a, b zwei Punkte aus $W(\varepsilon)$. Mittels der Exponentialfunktion \exp_a konstruiert man eine Geodätische, welche a mit b verbindet. Diese verläuft in $U(a)$ und ist die kürzeste Verbindung von a und b innerhalb $U(a)$. Wenn wir wüssten, dass sie sogar in $W(\varepsilon)$ verläuft, so ist sie sogar kürzeste Verbindungslinie aller Verbindungskurven innerhalb D . Wir wissen, dass diese zumindest in $D(r)$ verlaufen muss. Die Behauptung (und damit der Beweis von Theorem 9.2) folgt damit aus folgendem Hilfssatz.

9.3 Hilfssatz. Sei (D, g) ein Riemann'sches Gebiet wie in Satz 8.1. Für genügend kleines $r > 0$ gilt: Sei $0 < \varepsilon < r$. Ist $u(t)$ eine Geodätische in $D(r)$, deren Anfangs- und Endpunkt in $D(\varepsilon)$ enthalten sind, so ist u insgesamt in $D(\varepsilon)$ enthalten. G1D

Beweis. Wir nehmen von vornherein $r \leq 1/2$ an. Wir betrachten das Maximum von

$$h(t) := \langle u(t), u(t) \rangle \quad (\text{Euklidische Norm}).$$

Wir schließen indirekt und nehmen an, daß $u(t)$ die Kugel $W(\varepsilon)$ irgendwann einmal verläßt. Dann wird dieses Maximum in einem inneren Punkt $0 < t_0 < 1$ angenommen. Es gilt dann

$$\dot{h}(t_0) = 0, \quad \ddot{h}(t_0) < 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\ddot{h}(t_0)}{\|\dot{u}(t_0)\|^2} = 1 + \frac{\langle \ddot{u}(t_0), u(t_0) \rangle}{\|\dot{u}(t_0)\|^2} < 0.$$

Die Christoffelsymbole sind auf dem Kompaktum $\|x\| \leq 1/2$ beschränkt. Aus der Differentialgleichung für Geodätische folgt eine Abschätzung

$$\|\ddot{u}(t)\| \leq C\|\dot{u}(t)\|^2$$

mit einer Konstanten C , welche von $r < 1/2$ unabhängig ist. Wir erhalten mittels der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\frac{|\langle \ddot{u}(t_0), u(t_0) \rangle|}{\|\dot{u}(t_0)\|^2} \leq C\|u(t_0)\| \leq Cr.$$

Wenn r genügend klein gewählt wurde, ist die rechte Seite < 1 im Widerspruch zu $\ddot{h}(t_0) < 0$. Damit ist 9.2 vollständig bewiesen. \square

Man kann Satz 8.5 zu folgendem Satz ausbauen.

9.4 Satz. Sei X eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit assoziierter Metrik d . Sei u eine stückweise glatte Kurve, welche Punkte a, b verbindet und so dass die Länge von u gleich $d(a, b)$ ist (kürzeste mögliche Verbindung). Dann existiert eine Geodätische v derselben Länge und mit demselben Bild, welche a mit b verbindet. Ist u sogar glatt und regulär parametrisiert, so entsteht u durch Umparametrisieren von v . kuerzV

Beweis. Wenn $u : [0, 1] \rightarrow X$ eine kürzeste Verbindung von $a = u(0)$ und $b = u(1)$, gilt für jedes Teilintervall $[t_1, t_2] \subset [0, 1]$, dass $u|_{[t_1, t_2]}$ kürzeste Verbindung von $a_1 = u(t_1)$ und $b_1 = u(t_2)$ ist. Aus diesem Grund kann man den Beweis auf den Fall reduzieren, wo u glatt und X ein Riemann'sches Gebiet ist. Wenn u regulär parametrisiert ist, so ist man bereits fertig. Dann kann man nämlich annehmen, dass u natürlich parametrisiert ist. Nach dem Variationsprinzip ist dann u geodätisch. Im allgemeinen Fall kann man Satz 4.8.5 anwenden. Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen. \square

10. Vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeiten

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis von

10.1 Theorem (Hopf–Rinow). Für eine zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit sind folgende Bedingungen gleichbedeutend: VaB

- 1) Der metrische Raum (X, d) (s. Satz 6.1) ist vollständig (jede Cauchyfolge konvergiert).
- 2) Jede abgeschlossene und bezüglich d beschränkte Teilmenge ist kompakt.
- 3) Jede Geodätische ist auf ganz \mathbb{R} definierbar.
- 4) Es gibt einen Punkt $a \in X$, so daß jede von a ausgehende Geodätische auf ganz \mathbb{R} definierbar ist.

Eng zusammen mit diesem Theorem hängt

10.2 Theorem. Sei X eine vollständige Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Dann existiert zu je zwei Punkten $a, b \in X$ eine Geodätische u , welche a mit b verbindet und welche kürzeste Verbindung ist ($l_g(u) = d(a, b)$). EkV

Warnung. Die Geodätische u ist i.a. nicht eindeutig (Nord- und Südpol der Kugelfläche lassen sich durch verschiedene Großkreise verbinden).

Beweis der beiden Theoreme. Die Strategie ist folgende: Wir beginnen mit einem (X, g) , welches einen Punkt $a \in X$ mit der Eigenschaft 3) besitzt. Dann gibt es für jedes $A \in T_a X$ die Geodätische $\alpha_A : \mathbb{R} \rightarrow X$ mit $\dot{\alpha}_A(0) = A$. Wir können dann die Abbildung

$$T_a X \times \mathbb{R} \rightarrow X, \quad (A, t) \mapsto \alpha_A(t),$$

betrachten. Wir werden im folgenden benutzen, dass diese Abbildung stetig ist. Dies kann man aus dem bekannten Satz folgern, nachdem die Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangswerten stetig abhängen. Wir verzichten auf Einzelheiten.

Als nächstes betrachten wir für ein vorgegebenes $r \geq 0$ die Menge $E_r(a)$ aller Punkte b , welche sich mit a durch eine Geodätische der Länge $d(a, b) \leq r$ verbinden lassen. Wir behaupten, dass diese Menge kompakt ist. Es genügt zu zeigen, dass sie folgenkompakt ist. Sei also (a_n) eine Folge aus $E_r(a)$. Nach Voraussetzung existieren Geodätische α_n der Länge $d(a, a_n)$, welche a mit a_n verbinden. Wir parametrisieren sie so, dass der Betrag der Geschwindigkeit 1 ist,

$$\alpha_n : [0, C_n] \rightarrow X, \quad C_n = d(a_n, a).$$

Wir können annehmen, dass die Folge $C_n \leq r$ konvergiert. Ihr Limes sei C . Außerdem können wir annehmen, dass $\dot{\alpha}_n(0)$ konvergiert. Der Limes sei A . Wir können dann die Geodätische $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = a$ und $\dot{\alpha}(0) = A$ betrachten. Dann konvergiert $a_n = \alpha_n(C_n)$ nach $a = \alpha(C)$ und dieser Punkt liegt auch in $E_r(a)$.

Wir betrachten nun die offenen Kugeln

$$B_r(a) := \{ x \in X; \quad d(a, x) < r \}.$$

Es gilt $E_r(a) \subset \bar{B}_r(a)$.

Behauptung. Es gilt

$$E_r(a) = \bar{B}_r(a).$$

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, merken wir an, dass $\bar{B}_r(a)$ für genügende kleine r kompakt ist. Aus der Behauptung folgt dann, dass dies für beliebige r gilt. Insbesondere ist dann jede abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt.

Beweis der Behauptung. Wir betrachten die Menge \mathcal{R} aller $r \geq 0$, für welche die Behauptung richtig ist. Es gilt offenbar $\mathcal{R} = [0, r)$, $0 < r < \infty$ oder $\mathcal{R} = [0, r]$, $0 \leq r < \infty$ oder $\mathcal{R} = [0, \infty)$. Wir schließen die ersten beiden Fälle aus. Sei zunächst $\mathcal{R} = [0, r)$, $0 < r < \infty$. Jeder Punkt von $B_r(a)$ ist Limes einer Folge von Punkten $B_{r_n}(a)$, $r_n < r$. Diese liegen in $E_{r_n}(a)$ und damit in $E_r(a)$, da diese Menge abgeschlossen ist. Sei also $\mathcal{R} = [0, r]$, $0 \leq r < \infty$. Es genügt ein $R > r$ zu konstruieren, so dass $E_R(a) = B_R(a)$ gilt. Zum Beweis überdecken wir $E_r(a)$ durch endlich viele offene geodätisch Mengen $B_r(a)$ mit kompaktem Abschluss, so dass $B_{2r}(a)$ geodätisch konvex ist.

$$E_r(a) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(a_i), \quad \bar{B}_{r_i}(a_i) \text{ kompakt, } B_{2r_i}(a_i) \text{ geodätisch konvex.}$$

Da der Abschluß von $\bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(a_i)$ kompakt ist, existiert in seinem Komplement ein Punkt b mit minimalem Abstand $R = d(a, b)$ von a . Es gilt dann

$r < R$ und es gilt $\bar{B}_R(a) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(a_i)$. Wir können und wollen R so nahe bei r wählen, dass

$$R < r + \min r_i$$

gilt. Nun behaupten wir $E_R(a) = \bar{B}_R(a)$. Sei also $b \in B_R(a)$. Wir wählen einen Punkt c aus der durch $d(a, c) = r$ definierten kompakten Menge, welcher minimalen Abstand von b hat. Aus der Dreiecksungleichung $d(a, c) + d(c, b) = d(a, b)$ folgt $d(c, b) \leq R - r < \min r_i$. Hieraus folgt, dass b und c in einer der geodätisch konvexen Mengen $B_{2r_i}(a_i)$ liegen müssen. Daher existiert eine Geodätische welche c und b verbindet und so, dass dies die kürzeste Verbindung ist. Außerdem existiert eine Geodätische der Länge $d(a, c)$, welche mit a mit c verbindet. Durch Zusammensetzung der beiden Geodätischen erhält man eine stückweise glatte Kurve, welche a mit b verbindet. Da jede Verbindung von a mit b die Menge $d(a, x) = r$ treffen muss, ist dies die kürzeste aller möglichen Verbindungen von a und b . Wir wissen, dass eine kürzeste stückweise glatte Verbindung eine Geodätische ist. Jedenfalls gibt es eine Geodätische mit demselben Bild und von derselben Länge (Satz 9.4). Dies impliziert $b \in E_R(a)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir haben in Theorem 10.1 nunmehr 4) \implies 2) gezeigt. Als nächstes zeigen wir 2) \implies 1). Diese Aussage ist aber sehr einfach. Jede Cauchyfolge ist beschränkt und nach 2) in einem Kompaktum enthalten. Jede Folge in einem Kompaktum hat eine konvergente Teilfolge. Jede Cauchyfolge, welche eine konvergente Teilfolge hat, konvergiert.

Es bleibt 1) \implies 3) zu zeigen, denn 3) \implies 4) ist trivial. Es genügt offenbar folgendes zu zeigen. Jede Geodätische $u : [0, C) \rightarrow X$, $C > 0$ ist auf ein größeres Intervall $[0, C')$, $C' > C$ fortsetzbar. Dazu betrachten wir eine monoton wachsende Folge $t_n \rightarrow C$, $0 \leq t_n < C$. Dann ist $u(t_n)$ eine Cauchyfolge. Hieraus folgt, dass sich u zu einer stetigen Abbildung $u : [0, C] \rightarrow X$ fortsetzen läßt. Wir behaupten, dass u differenzierbar ist. Wenn dies gezeigt wurde, kann man ausgehend von $u(C)$ eine Geodätische mit Anfangsrichtung $\dot{u}(C)$ betrachten und mit dieser die Geodätische u verlängern, was zu zeigen war. Wir müssen also nur noch zeigen, dass u differenzierbar ist (auch im Punkt C). Dazu können wir annehmen, dass X ein Riemann'sches Gebiet ist. Die partiellen Ableitungen von u sind beschränkt, da die Geschwindigkeit von u konstant ist. Aus der Differentialgleichung für Geodätische folgt, dass auch \ddot{u} und danach auch alle höheren Ableitungen beschränkt sind. Die Differenzierbarkeit von u folgt damit aus folgendem Hilfssatz aus der reellen Analysis.

Sei $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine (unendlich oft) differenzierbare Funktion, so dass f und alle Ableitungen von f beschränkt sind. Dann ist f auf ganz $[0, 1]$ differenzierbar fortsetzbar.

Zum Beweis benutzt man, dass aus der Beschränktheit der Ableitungen $f^{(n)}$ folgt, dass sie auf $[0, 1)$ uneigentlich integrierbar sind. Der Hauptsatz der Differ-

entialrechnung ergibt nun eine stetige Fortsetzung aller Ableitungen auf $[0, 1]$.

$$f^{(n)}(x) = \int_0^x f^{(n+1)}(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Aus dieser Formel folgt leicht, dass alle $f^{(n)}$ auch im Punkt 1 differenzierbar sind.

Damit ist Theorem 10.1 vollständig bewiesen und Theorem 10.2 wurde mitbewiesen. \square

Kapitel V. Vergleichssätze

1. Jacobifelder

Es ist manchmal nützlich, den Riemann'schen Krümmungstensor etwas anders zu interpretieren. Wir erinnern daran (Hilfssatz IV.5.5), dass es für einen Vektorraum (V, g) mit nicht ausgearteter Bilinearform einen natürlichen Isomorphismus $\text{Hom}(V, V) \cong \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ gibt. Man kann diesen dazu benutzen, um den Riemann'schen Krümmungstensor folgermaßen zu interpretieren, Man halte zunächst A, B fest. Dann kann man $(C, D) \rightarrow R(A, B, C, D)$ als eine Familie von Bilinearformen der Tangentialräume benutzen. Man kann nun Hilfssatz IV.5.5 dazu benutzen, um hieraus lineare Abbildungen der Tangentialräume in sich zu produzieren. Insgesamt bekommt dann eine Abbildung, welches Vektorfelder in Vektorfelder abbildet. Diese Abbildung bezeichnen wir mit $R(A, B)$. Ist also C ein Vektorfeld (auf irgend einer offenen Teilmenge von X), so ist $D = R(A, B)C$ ebenfalls ein Vektorfeld. Die Formel in Hilfssatz IV.5.5 besagt gerade

$$R(A, B, C, D) = g(C, R(A, B)D).$$

Dies kann als definierende Gleichung für den Operator $R(A, B)$ ansehen.

1.1 Definition. Sei $u : I \rightarrow X$ eine Geodätische in einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit (X, g) und sei V ein Vektorfeld längs u (also $V_i \in T_{u(t)}X$). Man nennt A ein **Jacobifeld**, falls die Differentialgleichung JacF

$$u'' = R(V, \partial/\partial t)(\partial/\partial t)$$

gültig ist.

Etwas pingeliger geschrieben lautet die Differengtalgleichung: Für jedes $t_0 \in I$ gilt

$$u''(t_0) = (R_{u(t_0)}(V_{t_0}, (\partial/\partial t)|_{t_0})) ((\partial/\partial t)|_{t_0}).$$

Diese Definition bedarf einer Rechtfertigung. Vorerst wissen wir nur, dass die Jacibfelder irgend etwas mit der Krümmung zu tun haben.

1.2 Satz. Sei $u : I \rightarrow X$ eine Geodätische auf einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit (X, g) und sei $t_0 \in I$. Zu je zwei Vektoren $A, B \in T_{u(t_0)}$ existiert genau ein Jacobifeld V längs u mit den Anfangswerten $V_0 = A$ und $V'_0 = B$. ExJacF

2. Konjugierte Punkte

3. Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung

Kapitel VI. Lorentzmannigfaltigkeiten

1. Der Minkowskiraum

Wir versehen den \mathbb{R}^n mit der nicht ausgearteten Bilinearform

$$(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Wir nennen $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$ den (konkreten) Minkowskiraum. Uns interessiert vor allem der Fall $n = 4$. Wir spalten $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ manchmal in einen „Zeitanteil“ \mathbb{R} und einen Raumanteil \mathbb{R}^3 auf. Ein Vektor heißt

$$\begin{array}{ll} \text{raumartig} & \text{falls } (a, a) > 0, \\ \text{lichtartig} & \text{falls } (a, a) = 0, \\ \text{zeitartig} & \text{falls } (a, a) < 0. \end{array}$$

Die Menge der zeitartigen Vektoren zerfällt in zwei konvexe Kegel

$$\{x; (x, x) < 0, x_1 > 0\} \quad \text{und} \quad \{x; (x, x) < 0, x_1 < 0\}.$$

(Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt konvex, wenn mit je zwei Elementen auch die ganze Verbindungsstrecke in ihr enthalten ist.) Wir nennen den ersten Kegel den Zukunftskegel. Seine Elemente heißen *zeitartig zukunftsgerichtet*. Wir erläutern kurz diese Sprechweisen. In der klassischen Physik wird ein sich im Raum \mathbb{R}^3 bewegendes Teilchen durch eine Kurve $\alpha(t)$ beschrieben. In der Relativitätstheorie betrachtet man stattdessen die Viererkurve im \mathbb{R}^4

$$u(t) = (t, \alpha(t)).$$

Die Ableitung dieser Kurve ist $\dot{u}(t) = (1, \dot{\alpha}(t))$. Nach der Relativitätstheorie ist die Geschwindigkeit von $\alpha(t)$ durch die Lichtgeschwindigkeit (bei uns 1) begrenzt, Dies bedeutet

$$\dot{\alpha}_1(t)^2 + \dot{\alpha}_2(t)^2 + \dot{\alpha}_3(t)^2 < 1.$$

Dies bedeutet dies nichts anderes, dass $\dot{u}(t)$ zeitartig zukunftsgerichtet ist. Will man eine Reise in die Vergangenheit antreten, so müßte man die Zeit umkehren und anstelle u die Kurve $u(t) = (-t, \alpha(t))$ betrachten. In der Relativitätstheorie ist die Trennung des Minkowskiraums \mathbb{R}^4 in seinen Zeit- und Raumanteil nicht immer zweckmäßig. Man wird also Kurven $u(t)$ im \mathbb{R}^4 betrachten für

die nicht unbedingt $u_1(t) = t$ gilt. So werden wir später die Parametrisierung durch die Eigenzeit kennenlernen. Kurven im \mathbb{R}^4 heißen allgemein Weltlinien. Damit eine Weltlinie ein massives Partikel beschreiben kann, muß gelten, dass $\dot{u}(t)$ zeitartig und zukunftsgerichtet ist. So bewegt sich jeder von uns auf einer zeitartigen und zukunftsgerichteten Weltlinie.

Der Begriff „zukunftsgerichtet“ ist auch für lichtartige Vektoren a sinnvoll. Man nennt a zukunftsgerichtet, falls $a_1 > 0$. Ein lichtartiger Vektor ist genau dann zukunftsgerichtet, falls er von Null verschieden ist und falls er im Abschluss des Zukunftskegels liegt.

Es ist von großem Vorteil, eine abstrakte Version des Minkowskiraums einzuführen. Dazu betrachten wir einen Vektorraum V zusammen mit einer ausgezeichneten symmetrischen Bilinearform (\cdot, \cdot) . Wir setzen voraus, dass ein Isomorphismus auf den Minkowskiraum gibt, welcher diese Bilinearform in die Bilinearform des Minkowskiraumes überführt. Konkret bedeutet dies: Es soll eine Basis e_1, \dots, e_n geben, so dass $((e_i, e_j))$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $-1, 1, \dots, 1$ ist. Man sagt dann auch, dass die Bilinearform die Signatur $(n-1, 1)$ hat. Erst nach Wahl dieser Basis hat man eine Trennung in Zeit und Raum. Es gibt viele solcher Basen und damit viele Aufspaltungen in Raum und Zeit. Man kann sie folgendermaßen beschreiben. Man wähle sich irgendeinen Vektor e_1 mit der Eigenschaft $(e_1, e_1) < 0$ aus. Wenn man will, kann man ihn so normieren, dass $(e_1, e_1) = -1$ gilt. Danach betrachte man das orthogonale Komplement W von a :

$$W := \{x \in V; (a, x) = 0.\}$$

Aus dem Sylvesterschen Trägheitssatz kann man folgern, dass die Einschränkung von (\cdot, \cdot) auf W positiv definit ist. Wenn man will, kann man in W eine Orthonormalbasis e_2, \dots, e_n auswählen. Jedenfalls bedingt die Wahl des Vektors e_1 eine Aufspaltung des Minkowskiraumes in Raum und Zeit.

Wir konzentrieren uns auf den Fall $n = 4$. In dem abstrakten Raum $V, (\cdot, \cdot)$ kann man wie im Minkowskiraum \mathbb{R}^4 von raumartigen, lichtartigen und zeitartigen Vektoren reden. Genau wie im Minkowskiraum muss die Menge der zeitartigen Vektoren in zwei Kegel zerfallen. Es gibt jedoch keine Möglichkeiten, einen von beiden auszuzeichnen. Deshalb definieren wir:

1.1 Definition. *Ein abstrakter Minkowskiraum ist ein Tripel, bestehend aus einem vierdimensionalen Vektorraum V , einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform (\cdot, \cdot) der Signatur $(3, 1)$ und einer Auszeichnung eines der beiden Kegel der Menge der zeitartigen Vektoren.* DM

Der ausgezeichnete Kegel heißt dann wieder der Zukunftskegel. Seine Elemente heißen zeitartig zukunftsgerichtet. Der Zukunftskegel ist bestimmt durch jedes seiner Elemente: Ist a im Zukunftskegel, besteht der gesamte Zukunftskegel offenbar aus der Menge aller Vektoren b , so dass die gesamte Verbindungsstrecke ganz aus zeitartigen Vektoren besteht.

Man kann auch lichtartige zukunftsgerichtete Vektoren einführen. Ein Vektor heißt lichtartig zukunftsgerichtet, falls er von Null verschieden ist, falls $(a, a) = 0$ gilt und falls er im Abschluss des Zukunftskegels liegt.

2. Der Begriff der Lorentzmannigfaltigkeit

Wir betrachten vierdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten, auf denen ein zweifach kovarianter Tensor ausgezeichnet ist, so dass jeder Tangentialraum die Signatur $(3, 1)$ hat. Wir nehmen außerdem an, dass in jedem Tangentialraum $T_a X$ einer der beiden Kegel zeitartiger Vektoren ausgezeichnet wurde. Diese Auszeichnung soll in folgendem Sinne von a stetig abhängen: Zu jedem Punkt a gibt es offene Umgebung U und ein Vektorfeld A auf U , so dass A_x für jedes $x \in U$ zeitartig und zukunftsgerichtet ist. Dies nennen wir eine *Lorentzmannigfaltigkeit*. In einer Lorentzmannigfaltigkeit sind also die Tangentialräume Minkowskiräume.

Eine Kurve $u(t)$ in X nennen wir wieder eine Weltlinie. Ihr Definitionsbereich ist irgend ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die Kurve heißt zeitartig zukunftsgerichtet, falls $\dot{u}(t)$ immer zeitartig zukunftsgerichtet ist. Nach den Gesetzen der allgemeinen Relativitätstheorie bewegen sich massive Partikel (zu denen können wir uns annäherungsweise zählen) auf zeitartigen zukunftsgerichteten Weltlinien. Die Weltlinien von Lichtteilchen sind lichtartig zukunftsgerichtet, d.h. $\dot{u}(t)$ ist überall lichtartig zukunftsgerichtet. Genauer gilt nach der allgemeinen Relativitätstheorie, dass die Weltlinien von Lichtteilchen zeitartige zukunftsgerichtete Geodätische sind.

Wie wir in der Riemann'schen Geometrie gesehen haben, kann man eine regulär parametrisierte Kurve immer so umparametrisieren, dass der Betrag der Geschwindigkeit konstant 1 ist. Derselbe Beweis zeigt, dass man die Weltlinie eines massiven Teilchens immer so umparametrisieren kann, dass $g(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) = -1$ gilt. Man nennt dies die Parametrisierung durch die Eigenzeit.

Um Beobachtungen durchzuführen, braucht man eine zukunftsgerichtete zeitartige Weltlinie. (Wir können als Beobachter fungieren). Sagen wir einfach: *Ein Beobachter ist eine zukunftsgerichtete zeitartige Weltlinie.*

2.1 Definition. *Ein Bezugssystem auf einem offenen Teil U einer Lorentzmannigfaltigkeit X ist ein Vektorfeld A auf U , so dass A_a für jedes $a \in U$ zeitartig zukunftsgerichtet ist.* DefBeo

Eine Kurve $u(t)$ heißt Integralkurve eines Vektorfeldes A , falls $\dot{u}(t) = A_{u(t)}$ für alle t gilt. Aus dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, dass durch jeden Punkt im Definitionsbereich des Vektorfeldes eine Integralkurve läuft. Diese lebt in der Regel nur in einer kleinen Umgebung des Punktes.

Will man ein Vektorfeld auf einer Fläche visualisieren, so zeichnet man viele Integralkurven ein.

Wir sehen somit, dass die Auszeichnung eines Bezugssystems die Auszeichnung von Beobachtern beinhaltet, welche den gesamten Bereich U abdecken.

Für die Konstruktion von Lorentzmannigfaltigkeiten verwendet man häufig *verzerrte Produkte*. Wir beschreiben zunächst die Konstruktion des direkten Produkts. Seien (X_1, g_1) , (X_2, g_2) zwei pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir haben bereits erläutert, wie man $X_1 \times X_2$ mit einer Struktur als Riemann'scher Mannigfaltigkeit versieht. Sei (a_1, a_2) ein Punkt aus $X_1 \times X_2$. Die Inklusionen $X_1 \rightarrow X_1 \times X_2$, $x \mapsto (x, x_2)$ und analog $X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ induzieren lineare Abbildungen $T_{a_1}(X_1) \rightarrow T_{(a_1, a_2)}(X_1 \times X_2)$ und $T_{a_2}(X_2) \rightarrow T_{(a_1, a_2)}(X_1 \times X_2)$. Diese sind injektiv. Wir benutzen sie, um $T_{a_i}(X_i)$ mit Unterräumen von $T_{(a_1, a_2)}(X_1 \times X_2)$ zu identifizieren. Durch Summenbildung erhält man eine Abbildung

$$T_{a_1}(X) \times T_{a_2}(Y) \longrightarrow T_{(a_1, a_2)}(X_1 \times X_2).$$

Man verifiziert leicht, dass sie ein Vektorraumisomorphismus ist. Wir benutzen sie, um $T_{a_1}(X) \times T_{a_2}(Y)$ und $T_{(a_1, a_2)}(X_1 \times X_2)$ zu identifizieren. Man kann nun

$$g((A_1, A_2), (B_1, B_2)) := g_1(A_1, B_1) + g_2(A_2, B_2)$$

definieren und versieht so $X_1 \times X_2$ mit einer Struktur als pseudoriemannscher Mannigfaltigkeit. Im Falle pseudoriemannscher Gebiete bedeutet dies, dass man die Matrizen g_i diagonal zusammenfügt,

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Metrik g verzerren. Dazu betrachten wir eine überall positive differenzierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren dann

$$\tilde{g}_{(a,b)} = f(a)g_{a,b}.$$

Die so gewonnene pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit bezeichnen wir mit $X \times_f Y$ und nennen sie das durch f verzerrte Produkt. Natürlich kann man auch eine positive differenzierbare Funktion $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ nehmen und in analoger Weise das verzerrte Produkt definieren.

Man kann nun viele Lorentzmannigfaltigkeiten konstruieren. Man betrachtet beispielsweise \mathbb{R} versehen mit der negative definiten pseudoriemannschen Metrik $g(t) = -1$ und nimmt irgendeine dreidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit Y . Danach betrachtet man verzerrte Produkte $X = \mathbb{R} \times_f Y$. Man kann für f sowohl eine Funktion auf \mathbb{R} als auch auf X nehmen. Das Vektorfeld $\partial/\partial t$ auf \mathbb{R} kann als Vektorfeld auf X aufgefaßt werden. Offenbar gilt $g(\partial/\partial t, \partial/\partial t) = -1$. Wir definieren den Zukunftskegel so, dass $\partial/\partial t$ zukunftsgerichtet wird. Damit ist X zu einer Lorentzmannigfaltigkeit geworden. $\partial/\partial t$ ist ein mögliches Bezugssystem.

3. Die Einstein'schen Feldgleichungen

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Raumzeit durch eine Lorentz-Mannigfaltigkeit X beschrieben. Die Energie- und Impulsverteilung wird durch einen symmetrischen zweifach kovarianten Tensor T beschrieben. Die Einstein'schen Feldgleichungen lauten:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}gS = T.$$

Dabei ist Ric die Riccikrümmung und S die skalare Krümmung. Da der größte Teil des Weltalls aus Vakuum besteht, sind die Lösungen der Vakuumgleichung

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}gS = 0$$

von besonderer Bedeutung.

Die ersten Lösungen der Feldgleichungen waren verzerrte Produkte $X = I \times_f Y$. Wir erinnern daran, dass $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, versehen mit dem Negativen der Standardmetrik, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine überall positive differenzierbare Funktion und Y eine dreidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit ist. Wir nehmen nun an, dass deren Schnittkrümmung überall konstant k ist. Beispiele sind die Sphäre, der hyperbolische Raum und der euklidische Raum. Man bekommt eine Lösung der Feldgleichungen, indem man einfach T durch sie definiert. Doch nicht jede T ist physikalisch sinnvoll.

Wir beschreiben einen physikalisch sinnvollen Energie-Moment-Tensor auf X . Er modelliert eine von einer idealen Flüssigkeit ausgefüllte Raumzeit. Mathematisch wird ein solcher beschrieben durch zwei differenzierbare Funktionen $\rho, p : I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir deuten kurz ihre physikalische Bedeutung an. $\rho(t)$ ist die Energiedichte in dem Raumzeitpunkten (t, y) . Diese wird also bei festem t als konstant angenommen. Schließlich ist $p(t)$ der Druck in dem Raumzeitpunkt (t, y) . Auch dieser wird also als konstant bei festem t angenommen. Diesen beiden Funktionen ordnen wir einen Energie-Moment-Tensor T zu. Dieser ist durch folgende Eigenschaften festgelegt. Sei $a = (t_0, y_0) \in X$. Wir betrachten den Tangentialvektor $U = (\partial/\partial t)|_{t_0}$ in $T_a(X)$. Folgende Bedingungen sollen erfüllt sein.

- 1) $T(U, U) = \rho(t_0)$.
- 2) Steht $A \in T_a X$ senkrecht auf U , so gilt $T(U, A) = T(A, U) = 0$.
- 3) Stehen $A, B \in T_a X$ beide senkrecht auf U , so gilt $T(A, B) = p(t_0)g(A, B)$.

Es ist klar, dass genau eine symmetrische Bilinearform mit diesen Eigenschaften auf $T_a X$ existiert und dass hierdurch ein Tensorfeld auf X definiert wird.

Damit dieser Tensor aber physikalisch sinnvoll ist, sollte $\rho, p \geq 0$ gelten.

4. Die Robertson–Walker-Raumzeit

Wir betrachten eine Robertson–Walker-Raumzeit $X = I \times_f Y$. Man kann ihren berechnen und daraus Formel für die Ricci- und die skalare Krümmung ableiten.

4.1 Satz. *Sei $X = I \times_f Y$ eine Robertson–Walker-Raumzeit. Dann gilt:* RWR

a) *Der Riccitenor hat folgende Eigenschaften. Sei $a = (t_0, y_0) \in X$ und sei $U := (\partial/\partial t)|_{t_0}$ (aufgefaßt als Element von $T_a X$). Dann gilt*

$$\text{Ric}(U, U) = -3f''/f.$$

Ist $A \in T_{y_0}(Y)$ (aufgefaßt als Element von $T_a X$), so gilt $\text{Ric}(A, U) = 0$. Ist $B \in T_{y_0}$ ein weiterer Vektor, so gilt

$$\text{Ric}(A, B) = (2(f'/f)^2 + 2k/f^2 + f''/f)g(A, B).$$

b) *Die skalare Krümmung ist*

$$S = 6((f'/f)^2 + k/f^2 + f''/f).$$

Wir verzichten, diese nicht ganz einfache Rechnung hier durchzuführen. □

Wir können nun Bedingungen aufstellen, wann eine Robertson–Walker-Raumzeit den Einstein'schen Feldgleichungen mit dem im vorherigen Abschnitt definierten Energie-Moment-Tensor T erfüllt. Wir erinnern daran, dass T durch zwei Funktionen $\varrho, p : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist.

4.2 Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei Y eine dreidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit überall konstanter Schnittkrümmung k . Seien $f, \varrho, p : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. f sei überall positiv und ϱ, p seien nirgends negativ. Sei X die Robertson–Walker-Raumzeit $X = I \times_f Y$ und T der durch ϱ, p definierte Energie-Moment-Tensor auf X . Die Einstein'schen Feldgleichungen sind äquivalent zu den beiden Gleichungen* RWfeld

$$\begin{aligned}\varrho &= 3(f'/f)^2 + 3k/f^2, \\ p &= -2f''/f - (f'/f)^2 - k/f^2.\end{aligned}$$

Wir wollen diesen Satz hier nicht beweisen. \square

Man kann bei gegebenem f natürlich ϱ und p durch diese Formeln definieren. Die entscheidende physikalische Einschränkung ist $\varrho \geq 0$ und $p \geq 0$. Nutzt man $\varrho + 3p \geq 0$, so folgt hieraus mittels der Gleichungen in Satz 4.2 die fundamental wichtige Beziehung

$$f'' \leq 0.$$

Nur Robertson–Walker-Raumzeiten mit dieser Bedingung sind also physikalisch sinnvoll! Dies hat entscheidende kosmologische Konsequenzen.

Man kann einen Punkt $y \in Y$ zeitlich verfolgen. Gemeint ist damit, dass man die Weltlinie (t, y) betrachtet. Wir benutzen die Bezeichnung

$$X_t := \{(t, y) : y \in Y\}.$$

Schränkt man den Fundamentaltensor g von X auf X_t ein, so erhält man eine dreidimensionale Riemann'sche Mannigfaltigkeit. Ihr metrischer Tensor g_t ist gleich $f(t)g_Y$, wenn g_Y den Fundamentaltensor auf Y bezeichnet. Wir bezeichnen die Abstandsfunktion in X_t mit d_t . Es gilt also

$$d_t((t, y_1), (t, y_2)) = f(t)d_t(y_1, y_2).$$

Die Funktion f beschreibt also, wie sich die Abstände zweier Punkte im Laufe der Zeit verändern.

Wir nehmen nun an, dass das reale Weltall durch eine Robertson–Walker-Raumzeit modelliert werden kann. (Dies ist eine sehr kühne Annahme. Insbesondere wird dabei angenommen, dass man die Raumzeit global in Zeit- und Raumanteil aufspalten kann.) Wir bezeichnen einmal den gegenwärtigen Zeitpunkt mit t_0 . Durch Vermessung der Abstände zwischen Sternen kam Hubble zu dem Schluss, dass $f'(t_0)$ zur gegenwärtigen Zeit positiv ist. Mit anderen Worten. Das Weltall dehnt sich derzeit aus. (Dies sagt nichts über die Größe von X_t an sich aus. Gemeint ist nur, dass sich die Abstände vergrößern.) Genauer kam Hubble zu einem numerischen Wert für $H_0 = f'(t_0)/f(t_0)$. Dies ist die sogenannte Hubblekonstante. Sie ist also positiv. Nun machen wir Gebrauch von der Bedingung $f'' \leq 0$. Sie bedeutet, dass die Funktion f ganz unterhalb ihrer Tangenten $F(t)$ im Punkt $(t_0, f(t_0))$ verläuft,

$$F(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) = f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0),$$

denn ihre Steigung nimmt mit wachsendem t ab. Es gilt also

$$f(t) \leq f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird negativ für $t < t_0 - 1/H_0$. Es muß aber $f(t) > 0$ gelten. Die Konsequenz ist, dass das Intervall I durch diese Schranke

nach unten beschränkt ist. *Das Weltall kann also nicht länger als $1/H_0$ existiert haben.*

Ein ähnliches Argument macht auch Voraussagen über die Zukunft des Weltalls. Entweder die Funktion bleibt immer monoton steigend. Dann kann I nach rechts unbeschränkt sein, das Weltall könnte dann für alle Zeiten – immer langsamer – expandieren (und würde dann immer dünner, kälter und langweiliger, so weit noch jemand da ist, Langeweile zu empfinden). Es könnte aber auch sein, dass f irgendwann einmal eine waagrechte Tangente bekommt. Die Funktion f würde danach immer schneller fallen. Nach einer gewissen Phase der Expansion würde sich also das Weltall zum Stillstand kommen und sich danach immer schneller werdend kontrahieren. Ähnlich wie oben zeigt man, dass dann das Intervall I nach oben beschränkt sein muss. Ein solches – zunächst expandierendes und später kontrahierendes – Weltall kann also nur für eine endliche Zeitspanne existieren.

Da die Funktion f ausgehend von der Gegenwart in die Vergangenheit monoton fällt, existiert der Limes $\lim f(t)$, wenn t gegen den linken Eckpunkt von I strebt. Bei den Urknallmodellen wird angenommen, dass dieser Limes gleich Null ist. Dies hat zur Folge, dass der Abstand zweier Punkte des Weltalls y_1, y_2 gegen Null konvergiert, wenn man sie in die Vergangenheit verfolgt (also die Weltlinien (t, y_i) , betrachtet).

Für genauere Aussagen benötigt man mehr Information über die Modelle.

4.3 Definition. *Eine Friedmann-Raumzeit ist eine Robertson–Walker-Raumzeit mit folgenden Eigenschaften.* Fried

a) $p = 0$, $\rho > 0$. b) *Es gibt einen Zeitpunkt t_0 mit $f'(t_0) > 0$.*

(In diesem Fall heißt die ideale Flüssigkeit „Staub“.) Ein spezielles Friedmannmodell ist die Einstein–de Sitter-Raumzeit.

4.4 Definition. *Die Einstein–de Sitter-Raumzeit ist die Friedmann-Raumzeit der speziellen Form $I = (0, \infty)$, $Y = \mathbb{R}^3$ (Euklid'sche Metrik), $f(t) = t^{3/2}$, $\rho(t) = C/t^2$ mit einer Konstanten $C > 0$.* EdeS

Die Feldgleichungen sind leicht zu verifizieren. Da man die die Hubblekonstante $f'(t_0)/f(t_0)$ zum gegenwärtigen Zeitpunkt kennt, kann man unter der Annahme, dass das Einstein–de Sitter-Modell unser Weltall korrekt modelliert, das Alter des Weltalls t_0 ermitteln. Da man auch die Energiedichte $\rho(t_0)$ derzeit kennt, kann man C bestimmen. Damit ist das Modell völlig bestimmt. Es handelt sich um ein Modell, das ewig expandiert.

Nimmt man für $Y = S^3$ die dreidimensionale Sphäre, so gelangt man zu Friedmann-Raumzeiten mit endlicher Lebensdauer.

Einstein hat die von seinen Feldgleichungen vorausgesagte Instabilität des Weltalls sehr beunruhigt. Er hat daher seine Feldgleichungen modifiziert durch

Einführung einer kosmologischen Konstanten Λ . Die modifizierten Feldgleichungen lauten

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}gS = T - \Lambda g.$$

Es kommt also ein Vielfaches von g zu T hinzu. Dadurch wirkt die kosmologische Konstante wie eine zusätzliche Energie. Man spricht manchmal von dunkler Energie. Um zu stabilen Modellen zu kommen, experimentierte Einstein mit der kosmologischen Konstanten. Nach der Entdeckung des Hubbleeffektes nannte er diese Einführung die größte Eselei seines Lebens. Er irrte sich, sie wird heute in der Kosmologie wieder eingeführt, da sich das Weltall schneller als erwartet ausdehnt. Die kosmologische Konstante, die Einstein verwendet hat, ist um den Faktor 10^{120} größer als die heutzutage verwendete. Eine der genialsten Voraussagen Einsteins ist damit auch vielleicht die numerisch falscheste Vorhersage, die je gemacht wurde.

5. Das Kruskalmodell

Die Robertson–Walker-Raumzeiten mögen für die Modellierung des Weltalls im Großen geeignet sein, in der Nähe eines schwarzen Loches sind sie es nicht. Hier wird man eher nach Vakuummodellen suchen. Ein berühmtes Modell ist die Kruskal-Raumzeit. Sie stellt eine Weiterentwicklung der Schwarzschildlösung dar. Wir wollen sie in aller Kürze mathematisch beschreiben. Wir benötigen die Zahl $e = \exp(1) = 2,718\dots$. Die Kruskal-Raumzeit hängt ab von einem Parameter $m > 0$, welcher als Masse des schwarzen Loches interpretiert wird. Eine wichtige Rolle spielt die Funktion

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(r) = (r - 2m) \exp\left(\frac{r}{2m} - 1\right).$$

Ihre Ableitung

$$f'(r) = \frac{r}{2m} \exp\left(\frac{r}{2m} - 1\right)$$

ist überall positiv. Die Funktion f ist nach rechts unbeschränkt. Es gilt

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = -\frac{2m}{e}.$$

Hieaus folgt, dass die Abbildung f einen Diffeomorphismus

$$(0, \infty) \xrightarrow{\sim} \left(-\frac{2m}{e}, \infty\right)$$

induziert. Wir bezeichnen die Umkehrabbildung mit

$$h : \left(-\frac{2m}{e}, \infty\right) \xrightarrow{\sim} (0, \infty).$$

Wir betrachten nun die offene Menge

$$Q = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2; \quad uv > -\frac{2m}{e} \right\}.$$

Diese Menge ist zusammenhängend. Sie ist der Bereich zwischen den beiden Ästen der Hyperbel $uv = -2m/e$. (Man überzeuge sich mit einem Bild davon.) Auf ihr können wir die Funktion

$$r : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r(u, v) = h(uv),$$

betrachten. Sie ist überall positiv. Mithilfe der Funktion r bilden wir die Funktion

$$F : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u, v) = \frac{8m^2}{r(u, v)} \exp\left(1 - \frac{r(u, v)}{2m}\right).$$

Sie ist ebenfalls überall positiv. Wir definieren nun auf Q die pseudoriemannsche Metrik

$$\begin{pmatrix} 0 & F \\ F & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$g(\partial/\partial u, \partial/\partial u) = g(\partial/\partial v, \partial/\partial v) = 0, \quad g(\partial/\partial u, \partial/\partial v) = g(\partial/\partial v, \partial/\partial u) = F.$$

Insbesondere ist

$$g(\partial/\partial u - \partial/\partial v, \partial/\partial u - \partial/\partial v) < 0$$

und

$$g(\partial/\partial u + \partial/\partial v, \partial/\partial u + \partial/\partial v) > 0.$$

Dies zeigt, dass für jeden Punkt $a \in Q$ einen Isomorphismus $T_a X \cong \mathbb{R}^2$ gibt, so dass die Bilinearform auf $T_a X$ der Bilinearform

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

entspricht. (Es handelt sich um eine Bilinearform der Signatur $(1, 1)$.)

Wir nennen Q versehen mit dieser pseudoriemannschen Struktur die *Kruskalebene* der Masse m .

Wir betrachten als weitere Mannigfaltigkeit die zweidimensionale Einheitskugel

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Wir schränken die Euklidische Metrik des \mathbb{R}^3 ein und versehen so S^2 mit einer Struktur als Riemann'scher Mannigfaltigkeit.

Wir betrachten nun das verzerrte Produkt

$$K = Q \times_r S^2.$$

Es ist klar, dass die Tangentialräume von K die Signatur $(3, 1)$ haben. Man kann $\partial/\partial u - \partial/\partial v$ als Vektorfeld auf K auffassen. Dieses ist zeitartig. Wir definieren die Zukunftskegel so, dass dieses Feld zukunftsgerichtet ist. Damit wird K eine Lorentzmannigfaltigkeit. Man nennt sie die *Kruskal-Raumzeit* der Masse m .

5.1 Satz. *Die Kruskal-Raumzeit ist Ricci-flach, d.h. $\text{Ric} = 0$. Insbesondere ist auch die skalare Krümmung 0. Folgedessen ist die Kruskal-Raumzeit eine Vakuumlösung ($T = 0$) der Einstein'schen Feldgleichungen.* KrVak

(Man kann zeigen, dass jede Vakuumlösung der Einstein'schen Feldgleichungen Ricci-flach ist.) Wir wollen den Beweis, den man mit mehr oder weniger Geschick führen kann, nicht durchführen. Der folgende Vorschlag ist nicht ganz ernst gemeint. Man parametrisiere ein Stück der Kugelfläche und beschreibe so den entsprechenden Teil von K durch eine explizit gegebene 4×4 -Matrix g . Diese tippe man in ein Computeralgebrasystem wie MAPLE ein und schreibe dann ein kleines Programm, welches die Christoffelsymbole, die Komponenten des Riemann'schen Krümmungstensors und schließlich die Komponenten des Riccitors ausrechnet. Man lasse sich durch MAPLE bestätigen, dass die letzteren 0 sind. \square

Wir können r auch als Funktion auf der Kruskal-Raumzeit auffassen, indem wir $r(u, v, y) = r(u, v)$ definieren. (Man soll sich r als ein Maß vorstellen, wie weit man von dem schwarzen Loch entfernt ist.) Wir untersuchen die Kruskal-Raumzeit für große r . Zunächst einmal untersuchen wir den Teil $r > 2m$. Wenn man sich die Definition von r ansieht, so stellt man leicht fest, dass

$$uv > 0 \iff r(u, v) > 2m.$$

Wir betrachten daher folgende Teile der Kruskalebene

$$\begin{aligned} Q_{\text{I}} &:= \{(u, v) \in Q; \quad u > 0, \quad v > 0\}, \\ Q_{\text{II}} &:= \{(u, v) \in Q; \quad u > 0, \quad v < 0\}. \end{aligned}$$

Entsprechend kann man in der Kruskal-Raumzeit die offenen Teilmengen

$$K_{\text{I}} = Q_{\text{I}} \times S^2, \quad K_{\text{II}} = Q_{\text{II}} \times S^2$$

betrachten. Für das Verhalten für große r ist also der Bereich K_{I} verantwortlich. Wir betrachten auf den beiden Bereichen $Q_{\text{I}}, Q_{\text{II}}$ die Funktion

$$t(u, v) = 2m \log \left| \frac{u}{v} \right|.$$

Diese ist nicht auf ganz Q stetig fortsetzbar, da in Q Punkte mit $u = 0$ oder $v = 0$ existieren. Wir bezeichnen mit $P_{\text{I}}, P_{\text{II}}$ das Bild von $Q_{\text{I}}, Q_{\text{II}}$ unter der Abbildung

$$(u, v) \mapsto (t, r).$$

Man rechnet leicht folgendes nach.

5.2 Satz. *Es gilt*

KruSchw

$$P_I = \mathbb{R} \times (2m, \infty), \quad P_{II} = \mathbb{R} \times (0, 2m).$$

Die Funktion $(u, v) \mapsto (t, r)$ definiert Diffeomorphismen

$$Q_I \xrightarrow{\sim} P_I, \quad Q_{II} \xrightarrow{\sim} P_{II} = \mathbb{R} \times (0, 2m)$$

Diese werden Isometrien, wenn man P_I, P_{II} mit der pseudoriemannschen Geometrie

$$\begin{pmatrix} (2m - r)/r & 0 \\ 0 & r/(r - 2m) \end{pmatrix}$$

versieht.

Man nennt P_I, P_{II} die beiden *Schwarzschild-Ebenen* und

$$P_I \times S^2, \quad P_{II} \times S^2$$

die beiden *Schwarzschild-Raumzeiten*. Deren Geometrie ist natürlich so zu definieren, dass z.B.

$$Q_I \times S^2 \xrightarrow{\sim} P_I \times S^2, \quad (u, v, x) \mapsto (t, r, x)$$

eine Isometrie ist. Die beiden Schwarzschild-Raumzeiten erscheinen als zwei verschiedene Welten. Die Matrix in Satz 5.2 ist ja nicht in $r = 2m$ stetig fortsetzbar. Doch dies ist trügerisch. Die Umparametrisierung in K_I, K_{II} läßt sie als Teile einer umfassenden Lorentzmannigfaltigkeit K erkennen. Sie gehören also einer Welt an. Nun können wir das Verhalten der Metrik für große r beschreiben. Wir tun das im Schwarzschildmodell $P_I \times S^2$. Es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (2m - r)/r & 0 \\ 0 & r/(r - 2m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Radius der anhängenden Sphäre strebt über alle Grenzen. Damit nähert sich ihre Geometrie immer mehr der des zweidimensionalen euklidischen Raumes an. In diesem Sinne kann man sagen, dass die Geometrie von K mit wachsendem r der des Minkowski Raumes immer ähnlicher wird. Weit weg vom schwarzen Loch verhält sich also K ungefähr wie ein Minkowskiraum. Das war eine der Zielsetzungen für die Modellierung eines schwarzen Loches. Das eigentliche Wesen des schwarzen Loches ist in dem Bereich K_{II} zu suchen. Man nennt diesen Bereich manchmal das schwarze Loch der Kuskal-Raumzeit. Hier ist die Geometrie eine völlig andere und anschaulich schwer zu fassen. Folgender mathematische Satz verdeutlicht das Wesen des schwarzen Loches. Wir verzichten auf den Beweis.

5.3 Satz. *Sei $u(t)$ die Weltlinie eines massiven Teilchens oder eines Lichtteilchens. Wenn $u(t)$ zu einem gewissen Zeitpunkt t_0 in Q_{II} enthalten ist, so gilt dies für alle $t \geq t_0$.* Loch

Es gibt also kein Entweichen. Insbesondere kann ein Beobachter in Q_{I} nichts vom schwarzen Loch sehen.

Es gibt noch manches Überraschende. Weltlinien sind auf offenen Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ definiert. Man kann folgendes zeigen. Ist $u(t)$, $t \in I$, die Weltlinie eines durch die Eigenzeit parametrisierten massiven Teilchens oder eines Lichtteilchens, so dass $u(t)$ zu irgend einem Zeitpunkt in Q_{II} enthalten ist, so ist I nach oben beschränkt. Mit anderen Worten. Ein Teilchen hat nur eine endliche Lebensdauer, wenn es in ein schwarzes Loch geraten ist. Kruskal-Raumzeiten sind insbesondere nicht vollständig in dem Sinne, dass jede Geodätische auf ganz \mathbb{R} definierbar ist. Andererseits kann man auch zeigen, dass es keine K echt umfassende (als offenen Teil) Lorentzmannigfaltigkeit gibt.

Wenn man in ein schwarzes Loch gefallen ist, so wird man das physikalische Ende seiner Weltlinie nicht erleben, da man durch die Gravitationskräfte schon vorher in seine elementaren Bestandteile zerupft worden ist. Auch aus diesem Grunde ist eher davon abzuraten, sich in ein schwarzes Loch zu stürzen.

Literatur

Cheeger, J., Ebin, D.G.: *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, AMS Chelsea Publishing

Jost, J.: *Riemannian geometry and geometric analysis*, Universitext, Springer-Verlag

Klingenberg, W.P.A.: *Klassische Differentialgeometrie*, Edition am Gutenbergplatz Leipzig

Lee, J.M.: *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag

Lee, J.M.: *Riemannian Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag

O'Neill, B.: *Semi-Riemannian Geometry (With Application to Relativity)*, Academic Press, INC.

Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish-or-Perish-Press (5 Bände)

Verschiedene Skripte findet man in der Skriptensammlung der Fachschaft:

http://mathphys.fsk.uni-heidelberg.de/skripte/skripte_diffgeometrie.html