Lokale Theorie der Differentialfomen

1. Alternierende Differentialformen

Im folgenden sei n eine feste natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{M}_p := \mathcal{M}_p^{(n)} := \{\, a \subset \{\, 1, \ldots, n \,\}; \quad \#a = p \,\}$$

die Menge aller p-elementigen Teilmengen von $\{\, 1, \ldots, n \,\}$. Deren Anzahl ist

$$\binom{n}{p} \qquad\qquad (= 0,\ \text{falls } p < 0 \text{ oder } p > n).$$

Definition. *Eine (alternierende)* ***Differentialform*** ω *vom Grade* p *auf einem offenen Teil* $D \subset \mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung, welche jedem* $a \in \mathcal{M}_p$ *eine* C^∞*-Funktion*

$$f_a : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

zuordnet.

$$\omega = (f_a)_{a \in \mathcal{M}_p}.$$

Wir bezeichnen mit $A^p(D)$ die Menge aller Differentialformen vom Grade p auf D und nennen diese auch kurz p-Formen.

Die Menge $\mathcal{M}_0^{(n)}$ besteht aus einem einzigen Element (nämlich der leeren Menge). Eine Nullform besitzt daher nur eine einzige Komponente. Wir können und wollen daher 0-Formen mit Funktionen identifizieren. Es gilt speziell

$$A^0(D) = C^\infty(D).$$

Rechnen mit alternierenden Differentialformen

I. Algebraische Rechenregeln

Da man p-Formenen komponentenweise addieren kann und mit Funktionen multiplizieren darf, bildet $A^p(D)$ einen *Modul* über $C^0(D)$

$$(f_a) + (g_a) = (f_a + g_a),$$

$$f \cdot (f_a) = (f \cdot f_a).$$

Übrigens ist

$$A^p(D) = 0 \text{ für } p < 0 \text{ oder } p > n,$$

da in diesen Fällen $\mathcal{M}_p$ leer ist.

II. Das totale Differential einer Funktion.

Da einelementige Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit den Elementen $\{1, \ldots, n\}$ identifiziert werden können, ist eine 1-Form nichts anderes als ein n-Tupel von Funktionen

$$\begin{aligned} A^1(D) &= A^0(D) \times \ldots \times A^0(D), \\ A^1(D) &= \underbrace{C^\infty(D) \times \ldots \times C^\infty(D)}_{n-\text{fach}}. \end{aligned}$$

Das *totale Differential* einer C^∞-Funktion f ist durch

$$df := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

erklärt. Es gelten die Rechenregeln

a) $d(f+g) = df + dg$,
b) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$,
c) $df = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ ist lokal konstant.

Bezeichnet man mit

$$p_\nu : D \to \mathbb{C}, \quad p_\nu(x) = x_\nu,$$

die Projektion auf die ν-te Koordinate, so gilt

$$dp_\nu = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0).$$

Schreibweise: $dx_\nu := dp_\nu$.

Man kann also jede 1-Form $(f_1, \ldots f_n)$ auch in der Gestalt

$$(f_1, \ldots f_n) = \sum_{\nu=1}^n f_\nu dx_\nu$$

schreiben. Das totale Differential sieht dann wie folgt aus:

$$df = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu.$$

III. Das schiefe Produkt

In Analogie zum Fall $p = 1$ ordnen wir einer p-elementigen Teilmenge $a \subset \{1, \ldots, n\}$ die p-Formen

$$(dx_a)_b = \begin{cases} 1 & \text{für } a = b \\ 0 & \text{für } a \neq b \end{cases}$$

zu. Jede p-Formen $\omega = (f_a)_{a\in\mathcal{M}_p}$ kann man dann auch in der Form

$$\omega = \sum_{a\in\mathcal{M}_p} f_a dx_a$$

schreiben. Seien

$$a, b \subset \{\, 1, \dots, n \,\}, \quad \#a = p, \quad \#b = q.$$

Wir definieren einen „Vorzeichenfaktor“ $\varepsilon(a, b)$.

Erster Fall. Wir setzen

$$\varepsilon(a, b) = 0, \text{ falls } a \cap b \neq \emptyset.$$

Zweiter Fall. Sei $a \cap b = \emptyset$.
Wir ordnen die Elemente von a in ihrer natürlichen Reihenfolge an:

$$a = \{\, a_1, \dots a_p \,\}, \quad a_1 < a_2 < \dots < a_p,$$

und entsprechend

$$b = \{\, b_1, \dots b_q \,\}, \quad b_1 < b_2 < \dots < b_q.$$

Es gilt dann

$$a \cup b = \{\, a_1, \dots a_p, b_1, \dots b_q \,\}, \quad \#(a \cup b) = p + q.$$

Aber die Elemente in der geschweiften Klammer stehen nicht notwendigerweise in ihrer natürlichen Reihenfolge (es muss nicht $a_p < b_1$ gelten).

Wir bezeichnen mit $\varepsilon(a, b)$ das Vorzeichen derjenigen Permutation (von $p+q$ Elementen), welche man braucht, um $(a_1, \dots a_p, b_1, \dots b_q)$ in die natürliche Reihenfolge zu bringen.

Beispiele.

$$\begin{aligned}
a &= \{\, 1, 2 \,\}, \quad b = \{\, 2, 3 \,\}, \quad \varepsilon(a, b) = 0,\\
a &= \{\, 1, 3 \,\}, \quad b = \{\, 2, 4 \,\}, \quad \varepsilon(a, b) = -1,\\
a &= \{\, 2, 4 \,\}, \quad b = \{\, 3, 5 \,\}, \quad \varepsilon(a, b) = -1.
\end{aligned}$$

Wir definieren nun das *schiefe Produkt*

$$\begin{array}{ccccc}
A^p(D) & \times & A^q(D) & \longrightarrow & A^{p+q}(D),\\
\omega & , & \omega' & \longmapsto & \omega \wedge \omega',
\end{array}$$

durch die Formeln

$$\left(\sum_{a\in\mathcal{M}_p} f_a dx_a\right) \wedge \left(\sum_{b\in\mathcal{M}_q} g_b dx_b\right) := \left(\sum_{\substack{a\in\mathcal{M}_p\\ b\in\mathcal{M}_q}} f_a g_b dx_a \wedge dx_b\right)$$

$$\boxed{dx_a \wedge dx_b := \varepsilon(a,b) dx_{a\cup b}\,.}$$

Es ist eine einfache Übungsaufgabe, die folgenden Rechenregeln zu verifizieren.

1) Im Falle $p = 0$ stimmt das schiefe Produkt mit dem in I. eingeführten gewöhnlichen Produkt überein,

$$f \wedge \omega = f \cdot \omega \text{ für } f \in A^0(D).$$

2) Das schiefe Produkt ist *schiefkommutativ*,

$$\omega \wedge \omega' = (-1)^{pq}\, \omega' \wedge \omega \text{ für } \omega \in A^p(D),\ \omega' \in A^q(D).$$

Insbesondere gilt

$$\omega \wedge \omega = 0,$$

falls p ungerade ist.

3) Das schiefe Produkt ist *assoziativ*,

$$(\omega \wedge \omega') \wedge \omega'' = \omega \wedge (\omega' \wedge \omega''),$$
$$\omega \in A^p(D), \quad \omega' \in A^q(D), \quad \omega'' \in A^r(D).$$

4) Das schiefe Produkt ist *bilinear*,

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega = \omega_1 \wedge \omega + \omega_2 \wedge \omega,$$
$$\omega_1, \omega_2 \in A^p(D), \quad \omega \in A^q(D).$$

Wegen der Assoziativität kann man insbesondere das schiefe Produkt

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m$$

mehrerer alternierender Differentialformen definieren.

Man zeigt leicht durch Induktion nach p, dass, wenn $a = \{\, a_1, \ldots a_p \,\}$ (in natürlicher Reihenfolge) eine p-elementige Teilmenge von $\{\, 1, \ldots n \,\}$ ist, folgendes gilt:

$$dx_a = dx_{a_1} \wedge \ldots \wedge dx_{a_p}.$$

Schreibt man noch $f_{a_1,\dots a_p}$ anstelle von f_a, so erhält man die besonders häufig benutzte Darstellung einer p-Formen ω

$$\boxed{\begin{aligned}\omega &= \sum_{a\in\mathcal{M}_p} f_a dx_a \\ &= \sum_{1\le a_1<\dots<a_p\le n} f_{a_1,\dots a_p} dx_{a_1}\wedge\ldots\wedge dx_{a_p}\end{aligned}}$$

Als Beispiel berechnen wir das schiefe Produkt zweier 1-Formen. Beachtet man

$$dx_\nu \wedge dx_\mu = -dx_\mu \wedge dx_\nu = 0, \text{ falls } \mu = \nu,$$

so folgt

$$\left(\sum_{\nu=1}^n f_\nu dx_\nu\right) \wedge \left(\sum_{\mu=1}^n g_\mu dx_\mu\right) = \sum_{1\le\nu<\mu\le n} (f_\nu g_\mu - f_\mu g_\nu) dx_\nu \wedge dx_\mu.$$

IV. Die äußere Ableitung

In Verallgemeinerung der totalen Ableitung einer Funktion definieren wir eine Abbildung

$$d : A^p(D) \to A^{p+1}(D)$$

durch die Formel

$$d\left(\sum f_a dx_a\right) = \sum df_a \wedge dx_a.$$

Die Überprüfung der folgenden Rechenregeln sei wiederum dem Leser überlassen:

1. $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$,
2. $d(\omega \wedge \omega') = (d\omega) \wedge \omega' + (-1)^p\, \omega \wedge (d\omega')$,
   $\omega \in A^p(D), \quad \omega' \in A^q(D)$.
   Insbesondere also $d(c\omega) = cd\omega$ für $c \in \mathbb{C}$.
3. $d(d\omega) = 0$.

Ein wichtiger Spezialfall von 2. ist die Formel

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' \text{ falls } d\omega' = 0.$$

Durch Induktion folgert man

$$d(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m) = 0 \text{ falls } d\omega_1 = \ldots = d\omega_m = 0.$$

Daher gilt auch

$$d(\omega \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_m) = d\omega \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_m.$$

V. Komplexe Koordinaten

Wir betrachten nun den Fall einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{C}^n$. Da wir $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ identifizieren können,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\longleftrightarrow \mathbb{R}^{2n}, \\ (z_1, \ldots z_n) &\longleftrightarrow (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), \end{aligned}$$

gilt alles für den reellen Fall Gesagte auch in Komplexen. Es empfiehlt sich jedoch häufig, im Komplexen auch *„komplexe Koordinaten"* zu benutzen

$$dz_\nu := dx_\nu + \mathrm{i} dy_\nu, \quad d\bar{z}_\nu := dx_\nu - \mathrm{i} dy_\nu.$$

Es gilt

$$dx_\nu = \frac{1}{2}(dz_\nu + d\bar{z}_\nu), \quad dy_\nu = \frac{1}{2\mathrm{i}}(dz_\nu - d\bar{z}_\nu).$$

Durch einfaches „Umrechnen" erhält man, dass sich jede 1-Form schreiben lässt als

$$\omega = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu dz_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu d\bar{z}_\nu.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} A^{1,0}(D) &= \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu dz_\nu \right\} \\ A^{0,1}(D) &= \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu d\bar{z}_\nu \right\}, \end{aligned}$$

so folgt

$$A^1(D) = A^{1,0}(D) + A^{0,1}(D).$$

Wir wollen diese Zerlegung auf beliebige Grade verallgemeinern und setzen hierzu

$$A^{p,q}(D) := \left\{ \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n \\ 1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n}} f_{\binom{i_1, \ldots i_p}{j_1, \ldots j_q}} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q} \right\}.$$

Dann gilt offensichtlich

$$A^m(D) = \sum_{p+q=m} A^{p,q}(D).$$

Diese Summenzerlegung ist *direkt*, d.h die Zerlegung einer m-Form ω in der Gestalt

$$\omega = \sum \omega_{p,q}, \quad \omega_{p,q} \in A^{p,q}(D),$$

ist eindeutig.

Offensichtlich respektiert das schiefe Produkt diese Zerlegung in folgendem Sinne: Ist

$$\omega \in A^{p,q}(D), \quad \omega' \in A^{p',q'}(D),$$

so gilt

$$\omega \wedge \omega' \in A^{(p+p',q+q')}(D).$$

Die äußere Ableitung hingegen respektiert die Zerlegung von $A^m(D)$ nicht. Es ist jedoch möglich, $d\omega$ in eine Summe aufzuspalten, so dass die einzelnen Summanden diese Zerlegung respektieren. Hierzu setzen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z_\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right), \\
\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right).
\end{aligned}$$

Definiert man die Operatoren

$$\begin{aligned}
\partial : C^\infty(D) &\longrightarrow A^{1,0}(D), \\
\bar{\partial} : C^\infty(D) &\longrightarrow A^{0,1}(D)
\end{aligned}$$

durch

$$\partial f := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f z_\nu}{\partial z_\nu} \underset{.}{\mathrm{z}}_\nu,$$

$$\bar{\partial} f := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f z_\nu}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu,$$

so gilt offensichtlich

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Wir definieren nun allgemeiner lineare Abbildungen

$$\begin{aligned}
\partial : A^{p,q}(D) &\to A^{p+1,q}(D) \\
\bar{\partial} : A^{p,q}(D) &\to A^{p,q+1}(D)
\end{aligned}$$

durch die Formeln

$$\partial(f dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}) = \partial(f) \wedge dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

und

$$\bar\partial(f dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\bar z_{j_q}) = \bar\partial(f)\wedge dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\bar z_{j_q}$$
$$(1\le i_1<\ldots<i_p\le n,\quad 1\le j_1<\ldots<j_q\le n).$$

Dann gelten die Rechenregeln

$$\partial\circ\partial=0,\quad \bar\partial\circ\bar\partial=0,$$
$$\partial\circ\bar\partial=-\bar\partial\circ\partial.$$

Nun formulieren wir die beiden wichtigsten Sätze über alternierende Differentialformen im „lokalen Fall“, wobei wir jeweils voraussetzen, dass $D\subset\mathbb{R}^n$ ein *konvexes Gebiet* sei (d.h D sei offen und mit je zwei Punkten sei auch die Verbindungsstrecke in D enthalten) oder ein Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$. Vorher jedoch bringen wir noch eine Definition.

Definition. *Eine Differentialform ω heißt* ***geschlossen****, wenn gilt*

$$d\omega=0.$$

Man sagt manchmal auch d-geschlossen und definiert sinngemäß ∂-geschlossen ($\partial\omega=0$) und $\bar\partial$ geschlossen ($\bar\partial\omega=0$).

Lemma von Poincaré.
Auf konvexem D existiert zu jeder geschlossenen p-Form ω eine $(p-1)$-Form ω' mit

$$\omega=d\omega'.$$

Im Falle $p=n=1$ folgt dies aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Lemma von Dolbeault.
Auf einem Poyzylinder (das ist ein kartesiches Produkt von Kreisscheiben) existiert zu jeder (p,q)-Form ω, welche $\bar\partial$-geschlossen ist (d.h. $\bar\partial\omega=0$), eine $(p,q-1)$-Form ω' mit

$$\omega=\bar\partial\omega'.$$

(Das entsprechende Lemma für den ∂-Komplex gilt natürlich auch.)

VI. Holomorphe Differentialformen.

Eine Differentialform ω auf einem offenen Teil des $\mathbb{C}^n$ heißt *holomorph*, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) ω ist vom Typ $(p, 0)$, d.h. von der Gestalt

$$\omega = \sum f_{i_1,\ldots i_p} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}.$$

b) Die Komponenten $f_{i_1,\ldots i_p}$ sind holomorph.
Offensichtlich ist eine p-Formen ω vom Typ $(p, 0)$ ($q = 0$ ist hierbei wichtig!) genau dann holomorph, wenn

$$\bar{\partial}\omega = 0.$$

Die *äußere Ableitung* einer holomorphen p-Formen ist wieder holomorph und zwar gilt

$$d\omega = \partial\omega = \sum df_{i_1,\ldots i_p} \wedge dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}.$$

Die äußere Ableitung einer holomorphen Funktion ist

$$df = \partial f = \sum \frac{\partial f z_\nu}{\partial z_\nu} dz_\nu.$$

Bezeichnet man mit $\Omega^p(D)$ die Menge aller holomorphen p-Formenen auf D, so definiert die äußere Ableitung eine Abbildung

$$\partial = d : \Omega^p(D) \to \Omega^{p+1}(D).$$

Es gilt natürlich $d^2 = 0$.

Analytisches Lemma von Poincaré. *Ist $D \subset \mathbb{C}^n$ ein konvexes Gebiet, so ist jede geschlossene holomorphe p-Formen ω $(d\omega = 0)$ von der Gestalt*

$$\omega = d\omega', \quad \omega' \in \Omega^{p-1}(D).$$

Im Falle $n = p = 1$ ist dies der bekannte funktionentheoretische Satz, dass jede holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe eine Stammfunktion besitzt.

Wir beweisen das holomorphe *Lemma von Poincaré* für beliebiges n im Falle $p = 1$ und einen Polyzylinder D

Seien $f_1, \ldots f_n$ holomorphe Funktionen auf dem Polyzylinder D. Es gelte

$$\frac{\partial f z_i}{\partial z_k} = \frac{\partial f z_k}{\partial z_i} \text{ für } 1 \le i, k \le n \quad (\text{äquivalent: } d\Big(\sum f_\nu dz_\nu\Big) = 0).$$

Dann existiert eine holomorphe Funktion f auf $\mathbb{C}^n$ mit

$$\frac{\partial f z_\nu}{\partial z_i} = f_i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Beweis durch Induktion nach n.

Den Fall $n = 1$ (Induktionsbeginn) haben wir bereits erläutert. Sei also $n > 1$. Man findet zunächst durch gliedweise Integration der Potenzreihenentwicklung von f_1 eine alternierende Funktion f mit

$$\frac{\partial f(z_\nu)}{\partial z_1} = f_1.$$

Da man f_i durch $f_i - f_1 \frac{\partial f(z_\nu)}{\partial z_i}$ ersetzen kann, ohne die Voraussetzungen zu verletzen, dürfen wir

$$f_1 = 0$$

annehmen. Dann folgt aber

$$\frac{\partial f(z_\nu)}{\partial z_1} = 0 \text{ für alle } k.$$

Die Funktionen f_k hängen also gar nicht von z_1 ab. Damit folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. $\square$

VII. Komplexe.

Ein Komplex ist eine durch $\mathbb{Z}$ parametrisierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n+1} \longrightarrow \cdots,$$

so dass die Zusammensetzung zweier aufeinanderfolgender Pfeile Null ist.

Wir verwenden die Bezeichnung

$$\mathbb{C}(D)$$

für die Menge der lokal konstanten komplexwertigen Funktionen auf D.

Der de-Rham-Komplex.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}(D) \longrightarrow C^\infty(D) = A^0(D) \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^n(D) \longrightarrow 0.$$

(Damit dies ein Komplex ist, denke man die Sequenz rechts und links mit Nullen aufgefüllt.) Das Lemma von Poincaré besagt, dass dieser Komplex exakt ist, wenn D konvex ist,

Der holomorphe Poincaré-Komplex.

Sei nun $D \subset \mathbb{C}^n$ offen. Wir erinnern daran, dass $\Omega^p(D)$ den Raum der holomorphen p-Formen bezeichnet.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}(D) \longrightarrow \mathcal{O}(D) = \Omega^0(D) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n(D) \longrightarrow 0.$$

Das holomorphe Lemma von Poincar'e besagt, dass dieser Komplex exakt ist, wenn D ein Polyzylinder ist.

Der Dolbeault-Komplex

Für jedes p hat man einen Komplex:

$$0 \longrightarrow \Omega^p(D) \longrightarrow A^{p0}(D) \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{pn}(D) \longrightarrow 0.$$

Das Lemma von Dolbeault besagt, dass dieser Komplex exakt ist, wenn D ein Polyzylinder ist.

VIII Garbentheoretische Formulierung

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{C}_D$ die Garbe der lokal konstanten und mit $\mathcal{C}^\infty_D$ doe Garbe der differenzierbaren Funktionen auf D. Entsprechend werden die Garben A^p_D und, sofern $D \subset \mathbb{C}^n$ die Garben Ω^p_D und A^{pq}_D eingeführt. Die Garbensequenzen

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_D \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_D = A^0_D \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^n_D \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_D \longrightarrow \mathcal{O}_D = \Omega^0_D \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n_D \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \Omega^p_D \longrightarrow A^{p0}_D \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^{pn}_D \longrightarrow 0$$

sind exakt. (Beachte, dass Exaktheit von Garbensequenzen lokaler Natur ist. Man braucht sie nur auf einer Basis der Topologie nachzuprüfen.)

Die Garben A^p und A^{pq} sind Moduln über $\mathcal{C}^\infty_D$ und daher azyklisch. Die erste bzw. die dritte Sequenz sind daher azyklische Auflösungen von $\mathbb{C}_D$ bzw. Ω^p_D. Man kann sie also benutzen, um die Kohomologie der beiden letzten Garben zu berechnen. Für beliebiges offene $D \subset \mathbb{C}^n$ gilt also

$$\boxed{H^p(D, \mathbb{C}_D) \cong \frac{A^p(D) \to A^{p+1}(D)}{A^{p-1}(D) \to A^p(D)}}$$

Es gibt noch einen weiteren Satz. Es gilt

$$H^p(D, \mathbb{C}_D) \cong H^p(D, \mathbb{C})$$

wobei rechts die singuläre Kohomologie steht, wie sie die Topologen betrachten. Die Formel

$$\boxed{H^p(D, \mathbb{C}) \cong \frac{A^p(D) \to A^{p+1}(D)}{A^{p-1}(D) \to A^p(D)} \quad (p > 0)}$$

nennt man auch den Satz von de-Rham. Aus ihm folgte $H^p(D, \mathbb{C}) = 0$ für $p > 0$, was die Topologen viel leichter beweisen können.

Entsprechend gilt

$$\boxed{H^q(D,\Omega_D^p) \cong \frac{A^{pq}(D) \to A^{p,q+1}(D)}{A^{p,q-1}(D) \to A^{pq}(D)} \quad (q>0)}$$

Für Polyzylinder D folgt $H^q(D,\Omega_D^p) = 0$ für $q > 0$. Speziell im Falle $p = 0$ folgt eine extremer Spezialfall von Cartan's Theorem B für Polyzylinder D

$$\boxed{H^q(D,\mathcal{O}_D) = 0 \quad (q>0)}$$