Eberhard Freitag

Vorlesungen über Analysis

Kurzfassung (Definitionen und Sätze)

(Dies ist ein Auszug aus dem gleichnamigen Vorlesungsmanuskript)

E-mail: freitag@mathi.uni-heidelberg.de
home-page: http://www.zruser.uni-heidelberg.de/ t91

Teil I

Differential- und Integralrechnung

für Funktionen einer Veränderlicher

Kapitel I. Reelle Zahlen und Folgen von reellen Zahlen

0. Mengen

1. Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

1.1 Definition. *Eine **Komposition** auf einer Menge M ist eine Vorschrift, gemäß welcher je zwei Elementen $a, b \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element*

$$c = a \perp b$$

zugeordnet wird, welches wieder in M enthalten ist: $a \perp b \in M$.

1.2 Bemerkung. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Es gibt eine und nur eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, so daß*

$$a + x = b$$

gilt.

1.3 Bemerkung. *Es gilt*

$$a \cdot 0 = 0 \text{ für alle reellen Zahlen } a.$$

1.4 Bemerkung. *Es ist* $1 \neq 0$.

1.5 Bemerkung. *Es gilt* $(-1) \cdot (-1) = 1$.

1.6 Bemerkung. *Seien a, b reelle Zahlen, $a \neq 0$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl x, so daß*

$$ax = b$$

gilt.

1.7 Bemerkung (Nullteilerfreiheit). *Es seien a, b reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

1.8 Bemerkung. *Seien a, b, c, d reelle Zahlen, b und d und damit auch bd seien von Null verschieden. Es gilt:*

a) $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

b) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

c) $$\left(\frac{d}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{d}.$$

1.9 Bemerkung. *Sei $a \neq 0$. Dann ist*

$$a^2 := a \cdot a > 0.$$

1.10 Bemerkung. *Die Zahl 1 ist positiv:* $1 > 0$.

1.11 Bemerkung. *Seien a, b, c reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$a > b \text{ und } b > c \Longrightarrow a > c.$$

1.12 Bemerkung. *Aus $a \geq b$ und $b \geq a$ folgt $a = b$.*

1.13 Bemerkung. *Sei $a \geq b$, $c \geq 0$. Dann gilt*

$$ac \geq bc.$$

1.14 Bemerkung. *Aus $a \geq b$, $b > 0$ folgt*

$$a^{-1} \leq b^{-1}.$$

1.15 Definition. *Als (Absolut-)Betrag einer reellen Zahl a definiert man*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

1.16 Definition. *Sei M eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* ***Maximum*** *von M, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) $a \in M$.

b) *für alle $x \in M$ gilt $a \geq x$.*

1.17 Bemerkung. *Das Maximum (Minimum) einer Menge von reellen Zahlen ist, sofern es überhaupt existiert, eindeutig bestimmt.*

1.18 Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl a heißt* ***obere (untere) Schranke*** *von M, falls für alle x in M die Ungleichung*

$$x \leq a \qquad (x \geq a)$$

gilt.

1.19 Bemerkung. *Sei M eine nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Die kleinste obere Schranke von M ist eindeutig bestimmt.*

1.20 Bemerkung. *Sei M eine Menge von reellen Zahlen, welche ein Maximum (Minimum) besitzt. Dann gilt*

$$\max M = \sup M \qquad (\min M = \inf M).$$

2. Natürliche Zahlen, ganze Zahlen und rationale Zahlen

2.1 Theorem (Archimedisches Prinzip). *Zu jeder reellen Zahl x existiert eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft:*

$$n > x.$$

2.2 Definition. *Eine reelle Zahl a heißt* ***ganz (ganz rational)****, wenn gilt*

$$a \in \mathbb{N} \ \textit{oder} \ a = 0 \ \textit{oder} \ -a \in \mathbb{N}.$$

2.3 Bemerkung. *Seien a, b ganze Zahlen. Dann sind auch die Zahlen*

$$a + b, \ a - b \ \textit{und} \ a \cdot b$$

ganz.

2.4 Hilfssatz. *Sei x eine reelle Zahl. Es gibt eine größte ganze Zahl n mit der Eigenschaft*

$$n \leq x.$$

2.5 Definition. *Eine reelle Zahl heißt* ***rational****, wenn sie sich in der Form*

$$x = \frac{a}{b}, \ a, b \in \mathbb{Z}; \ b \neq 0$$

schreiben läßt.

2.6 Bemerkung. *Seien x, y rationale Zahlen. Dann sind auch die Zahlen*

$$x + y, \ x - y, \ x \cdot y \ \textit{sowie} \ \frac{x}{y} \ (\textit{für} \ y \neq 0)$$

rational.

2.7 Bemerkung. *Es gibt keine rationale Zahl x mit*

$$x^2 = 2.$$

2.8 Satz. *Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann existiert eine rationale Zahl x mit der Eigenschaft*

$$a < x < b.$$

2.9 Bemerkung. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine endliche, nicht leere Menge von reellen Zahlen. Die Menge M besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

3. Konvergente Folgen

3.1 Definition. *Sei M eine Menge. Eine **Folge** von Elementen aus M ist eine Vorschrift, gemäß welcher jeder natürlichen Zahl n eindeutig ein Element $a_n \in M$ zugeordnet wird.*

3.2 Definition. *Eine Folge reeller Zahlen*

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots$$

*heißt eine **Nullfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so daß gilt:*

$$|a_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

3.3 Hilfssatz. *Sei*

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots$$

eine Nullfolge und

$$b_1,\, b_2,\, b_3, \ldots$$

eine Folge, so daß

$$|b_n| \leq |a_n| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Dann ist auch (b_n) eine Nullfolge.

3.4 Hilfssatz. *Sei $a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots$ eine Nullfolge und C eine positive reelle Zahl. Dann ist auch die Folge*

$$Ca_1,\, Ca_2,\, Ca_3, \ldots$$

eine Nullfolge.

3.5 Definition. *Eine Folge reeller Zahlen*

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots$$

*heißt **konvergent**, wenn es eine Zahl a gibt, so daß die Folge*

$$a_1 - a,\; a_2 - a,\; a_3 - a,\; \ldots$$

eine Nullfolge ist.

3.6 Satz. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

3.7 Satz. *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b und sei C eine reelle Zahl. Die Folgen*

$$(a_n + b_n),\ (Ca_n),\ (a_n b_n) \text{ und } (|a_n|)$$

konvergieren ebenfalls und zwar gegen die Grenzwerte

$$a + b,\ Ca,\ ab \text{ und } |a|.$$

Es gelten also die Formeln

a) $$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

b) $$\lim_{n\to\infty}(Ca_n) = C \lim_{n\to\infty} a_n$$

c) $$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$$

d) $$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$

3.8 Hilfssatz. *Jede konvergente Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ist beschränkt. Es gibt also eine reelle Zahl C mit*

$$|a_n| \le C \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

3.9 Satz. *Sei (a_n) eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a. Wenn alle Folgenglieder a_n und der Grenzwert a von Null verschieden sind, so konvergiert auch die Folge (a_n^{-1}) und zwar gegen a^{-1}.*

4. Konvergenzkriterien für Folgen

4.1 Definition. *Eine Folge (a_n) heißt* ***monoton wachsend (fallend)****, wenn gilt*

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \qquad (a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots)$$

also

$$a_n \le a_{n+1} \qquad (a_n \ge a_{n+1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gilt in dieser Kette nirgendwo das Gleichheitszeichen, so heißt die Folge sogar ***streng monoton****:*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \qquad (a_1 > a_2 > a_3 > \ldots)$$

4.2 Theorem. *Jede monotone und beschränkte Folge* (a_n) *konvergiert. Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} & \textit{für wachsende Folgen} \\ \inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} & \textit{für fallende Folgen.} \end{cases}$$

4.3 Hilfssatz. *Sei* (a_n) *eine Folge reeller Zahlen und* (a_{ν_n}) *eine Teilfolge. Wenn* (a_n) *konvergiert, so trifft dies auch für* (a_{ν_n}) *zu und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_{\nu_n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

4.4 Theorem (Bolzano-Weierstrass). *Jede beschränkte Folge* (a_n) *besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge* (a_{ν_n})*.*

4.5 Hilfssatz. *Jede Folge* (a_n) *besitzt eine monotone Teilfolge* (a_{ν_n})*.*

4.6 Hilfssatz. *Sei* (a_n) *eine konvergente Folge. Dann existiert zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \textit{ für } n, m \geq N.$$

4.7 Definition. *Eine Folge* (a_n) *heißt* ***Cauchyfolge****, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so daß gilt*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \textit{ für } n, m \geq N.$$

4.8 Satz. *Jede Cauchfolge* (a_n) *konvergiert.*

4.9 Hilfssatz. *Seien* (a_n) *und* (b_n) *zwei konvergente Folgen, so daß*

$$a_n \leq b_n \textit{ für alle } n$$

gilt. Dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

4.10 Folgerung. *Wenn eine konvergente Folge* (a_n) *durch eine Konstante* C *(nach oben oder nach unten) beschränkt wird, so trifft dies auch für den Grenzwert zu.*

4.11 Satz (Intervallschachtelungsprinzip).
Es sei eine Intervallschachtelung

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

gegeben. Es existiert dann ein allen Intervallen gemeinsamer Punkt x. Genauer gilt

$$x \in [a_n, b_n] \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \iff x \in [a, b]$$

mit $a := \lim a_n,\ b := \lim b_n$.

Zusatz. Der Punkt x ist offenbar genau dann eindeutig bestimmt, wenn $a = b$ gilt, wenn also $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist.

5. Unendliche Reihen

5.1 Satz. *Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist die Folge (a_n) eine Nullfolge.*

5.2 Theorem. *Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert, wenn die aus den Absolutbeträgen gebildete Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergiert.

5.3 Satz. *Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert dann und nur dann absolut, wenn es eine Zahl C gibt mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \le C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

5.4 Theorem (Majorantenkriterium). *Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut, wenn sie eine konvergente Majorante hat.*

5.5 Satz (Quotientenkriterium). *Sei*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder alle von Null verschieden sind. Eine hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz dieser Reihe ist:

Es existiert eine Zahl $q,\ 0 \le q < 1$, *mit der Eigenschaft*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \le q \text{ für alle } n.$$

5.6 Satz (Leibniz). *Gegeben sei eine monoton fallende Nullfolge*

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ (\text{insbesondere } a_n \ge 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}).$$

Die ***alternierende Reihe***

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

konvergiert.

5.7 Satz. *Sei* $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ *eine Folge reeller Zahlen, so daß für jedes reelle* x *die Folge*

$$(a_n x^n)$$

eine Nullfolge ist. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

5.8 Satz. *Die Reihe*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert für alle x.

6. Abbildungen und Abzählbarkeit

6.1 Definition. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt*

1) ***injektiv (eineindeutig)**, wenn verschiedenen Elementen von X verschiedene Elemente von Y entsprechen, also*

$$x, x' \in X,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

(oder, was dasselbe bedeutet

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x').$$

2) ***surjektiv (eine Abbildung auf)**, wenn jedes Element von Y als Bild mindestens eines Elements von X vorkommt, also*

$$y \in Y \Longrightarrow \text{es gibt (mindestens) ein } x \in X \text{ mit } y = f(x).$$

3) ***bijektiv (eineindeutig auf, umkehrbar eindeutig)**, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

6.2 Bemerkung. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Wenn f und g beide injektiv (surjektiv, bijektiv) sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv (surjektiv, bijektiv).*

6.3 Hilfssatz. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist dann und nur dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit den Eigenschaften*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \ \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_Y .$$

Es gilt dann $g = f^{-1}$.

6.4 Definition. *Zwei Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.*
In Zeichen: $X \sim Y$.

6.5 Definition. *Eine Menge X heißt **abzählbar**, wenn sie mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.*

6.6 Bemerkung. *Zwei endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente enthalten.*

6.7 Satz. *Sei X eine abzählbare Menge und Y eine beliebige unendliche Menge. Die Menge Y ist auch abzählbar, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Es existiert eine injektive Abbildung*
$$\iota : Y \longrightarrow X.$$

2. *Es existiert eine surjektive Abbildung*
$$f : X \longrightarrow Y.$$

7. Umordnungssätze für unendliche Reihen

7.1 Theorem (Kleiner Umordnungssatz).
Die Reihe
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
*konvergiere **absolut** und habe den Wert a. Dann konvergiert auch jede Umordnung*
$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \ldots$$
derselben absolut und zwar gegen denselben Wert a.

7.2 Definition. *Eine Schar $(a_s)_{s\in S}$ reeller Zahlen heißt **summierbar**, wenn es eine Anordnung*
$$\nu : \mathbb{N} \longrightarrow S$$
gibt, so daß die Reihe
$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \ldots$$
absolut konvergiert. Ist a der Wert dieser Reihe, so schreibt man auch
$$a = \sum_{s\in S} a_s.$$

7.3 Satz (Großer Umordnungssatz). *Es sei eine Zerlegung*

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots$$

einer abzählbaren Menge gegeben. Sei außerdem

$$(a_s)_{s \in S}$$

eine durch S parametrisierte ***summierbare*** *Schar reeller Zahlen. Dann gilt*

1) *Die Teilscharen*

$$(a_s)_{s \in S_n}$$

sind summierbar, die Zahlen

$$A_n = \sum_{s \in S_n} a_s \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

also wohldefiniert.

2) *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

ist absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{s \in S} a_s = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s \in S_n} a_s \right).$$

Ergänzung. *Aus der Summierbarkeit der Scharen*

$$(|a_s|_{s \in S_n}) \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

und der absoluten Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n, \;\; B_n = \sum_{s \in S_n} |a_s|$$

folgt die Summierbarkeit von $(a_s)_{s \in S}$.

7.4 Theorem. *Seien* $(a_s)_{s \in S}$, $(b_t)_{t \in T}$ *zwei summierbare Scharen reeller Zahlen. Dann ist auch die Schar*

$$(a_s \cdot b_t)_{(s,t) \in S \times T}$$

summierbar, und es gilt

$$\left(\sum_{s \in S} a_s \right) \cdot \left(\sum_{t \in T} b_t \right) = \sum_{(s,t) \in S \times T} (a_s \cdot b_t).$$

7.5 Theorem. *Die Reihe*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots .$$

konvergiert für alle x *absolut. Sie genügt der Funktionalgleichung*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

Kapitel II. Stetige Funktionen

1. Der Begriff der Stetigkeit

1.1 Definition. *Eine Funktion f einer Veränderlichen ist eine Abbildung*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

1.2 Definition. *Eine Menge D von reellen Zahlen heißt **Intervall**, falls mit je zwei Punkten*

$$a, b \in D,\ \ a < b,$$

auch jeder zwischen a und b liegende Punkt in D enthalten ist, d.h.

$$a < x < b \Longrightarrow x \in D.$$

1.3 Satz. *In obiger Liste kommen alle Intervalle im Sinne der Definition 1.2 vor*

1.4 Hilfssatz. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt aus D. Folgende beiden Aussagen sind gleichbedeutend*

1) *Sei a_1, a_2, $a_3, \dots$ eine Folge von Punkten aus D, die gegen a konvergiert. Dann gilt*
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$
2) *Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine positive Zahl $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:*
$$|f(x) - f(a)| \le \varepsilon,\ \textit{falls}\ |x - a| \le \delta\ \textit{und}\ x \in D.$$

1.5 Definition. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ definiert ist und sei $a \in D$. Dann heißt die Funktion f* ***stetig in*** *a, wenn die in Hilfssatz 1.4 formulierten Bedingungen erfüllt sind. f heißt* ***stetig*** *(schlechthin), wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig ist.*

1.6 Definition. *Sei D ein Intervall, welches nicht nur aus einem Punkt besteht und sei $a \in D$. Außerdem sei eine Funktion*

$$f : D - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{oder} \quad f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Der Grenzwert von f für x gegen a existiert, wenn sich f in a hinein stetig fortsetzen läßt. Das möge bedeuten, daß es eine stetige Funktion

$$\tilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit der Eigenschaft

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ für } x \in D, \ x \neq a.$$

1.7 Bemerkung. *Die Voraussetzungen seien wie in Definition 1.6. Die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ ist, so sie überhaupt existiert, eindeutig bestimmt.*

1.8 Bemerkung. *Die Voraussetzungen seien wie in 1.6. Die Funktion f konvergiert genau dann, wenn folgendes gilt:*

Ist $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge aus $D - \{a\}$, welche gegen a konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(f(a_n))$.

1.9 Bemerkung. *Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf dem Intervall D. Wenn f und g im Punkt $a \in D$ stetig sind, so gilt dies auch für die Funktionen*

$$f + g, \ f \cdot g, \ cf \ (c \in \mathbb{R}) \text{ und } 1/f,$$

letzteres natürlich nur, falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt.

1.10 Bemerkung. *Es seien zwei Funktionen*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf den Intervallen D, D' gegeben und es gelte $f(D) \subset D'$. Sei $a \in D$ ein Punkt und $b = f(a) \in D'$. Wenn die Funktion f in a und die Funktion g in b stetig sind, so ist die Zusammensetzung $g \circ f$ in a stetig.

2. Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen

2.1 Theorem. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall D und seien $a < b$ zwei Punkte aus D, so daß $f(a)$ und $f(b)$ von 0 verschieden sind und **verschiedene** Vorzeichen haben.*

$$(f(a) < 0,\ f(b) > 0 \text{ oder } f(a) > 0,\ f(b) < 0)$$

Dann existiert eine Nullstelle ξ von f zwischen a und b:

$$a < \xi < b,\ f(\xi) = 0.$$

2.2 Folgerung. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D ein Intervall, so ist auch der Wertevorrat $f(D)$ ein Intervall.*

2.3 Folgerung. *Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall D ist dann und nur dann eineindeutig, wenn sie streng monoton ist.*

2.4 Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion auf dem Intervall D. Wenn der Wertevorrat $f(D)$ auch ein Intervall ist, so ist f stetig.*

2.5 Theorem. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige und eineindeutige Funktion auf dem Intervall D. Die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist ebenfalls stetig.

2.6 Theorem. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ a < b,$$

eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Der Wertevorrat von f besitzt ein Maximum und ein Minimum.

3. Folgen und Reihen von Funktionen

3.1 Definition. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen*

$$f_n : D \to \mathbb{R} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

*heißt **punktweise konvergent** gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ für jedes } x \in D.$$

3.2 Definition. *Die **(Supremums-)Norm** einer beschränkten Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \neq \emptyset,$$

ist definiert durch die Formel

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in D\}.$$

3.3 Bemerkung. *Seien*

$$f, g : D \to \mathbb{R}$$

zwei beschränkte Funktionen, c eine reelle Zahl. Dann gilt

1) $\|f\| \geq 0$ *und* $\|f\| = 0$ *nur, wenn* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in D$.
2) $\|cf\| = |c|\,\|f\|$.
3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
4) $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

3.4 Definition. *Eine Folge von Funktionen*

$$f_1,\ f_2,\ f_3, \dots : D \to \mathbb{R}$$

*heißt **gleichmäßig konvergent** gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind*

1) *Die Funktionen $f - f_n$ sind beschränkt *).*

2) *Die Folge der Zahlen*

$$\|f - f_1\|,\ \|f - f_2\|,\ \|f - f_3\|,\ \dots$$

ist eine Nullfolge.

**)* Wenn man will, kann diese Bedingung abschwächen. Es genügte zu fordern, daß $f - f_n$ für alle n bis auf endlich viele Ausnahmen beschränkt ist

3.5 Theorem. *Gegeben sei eine Folge von Funktionen, die im Punkt x_0 stetig seien. Konvergiert die Folge gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, so ist auch die Grenzfunktion f stetig in x_0.*

3.6 Satz. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in D$ und*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : D \to \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, so daß

$$\lim_{x \to a} f_n(x)$$

für alle n existiert. Dann existiert auch

$$\lim_{x \to a} f(x) \ \textit{mit} \ f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

und es gilt (wegen 3.5)

$$\lim_{x \to a}(\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty}(\lim_{x \to a} f_n(x)).$$

3.7 Satz. *Sei*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von beschränkten Funktionen. Die Reihe der Funktionen

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$

konvergiert gleichmäßig, wenn die Reihe der Normen

$$\|f_1\| + \|f_2\| + \|f_3\| + \ldots$$

konvergiert.

3.8 Folgerung. *Eine Reihe von Funktionen*

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots,\ f_n : D \to \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmäßig, wenn es eine von $x \in D$ unabhängige Majorante

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

gibt. ($|f_n(x)| \leq a_n$ für alle $x \in D,\ n \in \mathbb{N}$.)

4. Potenzreihen

4.1 Theorem. *Gegeben sei eine Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit dem Konvergenzradius r. Dann konvergiert die Reihe ***absolut*** *für $|x| < r$; sie konvergiert nicht für $|x| > r$ (falls $r < \infty$).*

Ist δ eine beliebige Zahl zwischen 0 und r (also $0 \leq \delta < r$), so konvergiert die Reihe in dem Intervall $[-\delta, \delta]$ ***gleichmäßig****.*

4.2 Folgerung. *Eine Potenzreihe stellt im Inneren ihres Konvergenzintervalls eine stetige Funktion dar.*

4.3 Hilfssatz. *Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hat dann und nur dann einen positiven (d.h. von Null verschiedenen) Konvergenzradius, wenn die Folge

$$\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$$

beschränkt ist.

4.4 Satz. *Der Konvergenzradius r der Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ergibt sich zu

$$r = \frac{1}{\operatorname{Lim\,sup}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

5. Winkelfunktionen

5.1 Satz. *Die Reihe*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für beliebige komplexe z. Es gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

5.2 Definition.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &:= \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \textbf{\textit{(Cosinus),}} \\ \sin x &:= \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \textbf{\textit{(Sinus),}} \end{aligned}}$$

Kapitel III. Differential- und Integralrechnung

1. Integralrechnung (Regelfunktionen)

1.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*heißt **Treppenfunktion**, wenn es „Stützstellen“*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

gibt, so daß f in den offenen Intervallen

$$(a_\nu, a_{\nu+1}) \text{ für } 0 \le \nu < n$$

konstant ist.

1.2 Bemerkung. *Wenn*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion ist, so sind auch

$$cf \text{ für jedes } c \in \mathbb{R} \text{ und } |f|$$

Treppenfunktionen.

1.3 Bemerkung. *Seien*

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Dann sind die Funktionen

$$f + g \text{ und } f \cdot g$$

auch Treppenfunktionen.

1.4 Definition. *Eine Funktion*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*heißt **Regelfunktion**, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

*gibt, die **gleichmäßig** gegen f konvergiert.*

1.5 Hilfssatz. *Sei*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig konvergente Folge von Treppenfunktionen. Dann konvergiert auch die Zahlfolge

$$\left(\int_a^b f_n(x)\, dx \right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

1.6 Hilfssatz. *Seien*

$$(f_n), (g_n) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei gleichmäßig konvergente Folgen von Treppenfunktionen, die gegen die gemeinsame Grenzfunktion

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} g_n$$

konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n(x)\, dx.$$

1.7 Definition. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Regelfunktion. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx,$$

wobei (f_n) irgendeine Folge von Treppenfunktionen ist, die gegen f gleichmäßig konvergiert.

1.8 Bemerkung. *Eine Regelfunktion ist stets beschränkt.*

1.9 Bemerkung. *Seien*

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Regelfunktionen und $c \in \mathbb{R}$. *Dann sind auch*

$$f + g, \;\; f \cdot g, \;\; cf \;\; \textit{und} \; |f|$$

Regelfunktionen und es gilt

$$\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$

$$\int_a^b (cf)(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

1.10 Hilfssatz. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Regelfunktion und sei

$$f(x) \geq 0 \; \textit{für alle} \; x \in [a, b].$$

Dann ist auch

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

Folgerung. *Sind* f *und* g *Regelfunktionen auf* $[a, b]$ *und gilt*

$$f(x) \leq g(x) \; \textit{für alle} \; x \in [a, b]$$

so folgt

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

1.11 Hilfssatz. *Seien $a < b < c$ und sei*

$$f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann gilt:

f ist genau dann eine Regelfunktion, wenn die Einschränkungen von f auf $[a, b]$ und $[b, c]$ Regelfunktionen sind. In diesem Fall ist

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

1.12 Theorem. *Sei f_1, f_2, $f_3, \dots$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist auch f eine Regelfunktion und es gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

1.13 Theorem. *Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.*

1.14 Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit.
Sei $D = [a, b],\ a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf D. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für } |x - y| < \delta,\ x, y \in D.$$

1.15 Theorem. *Jede stetige Funktion*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ a < b,$$

ist eine Regelfunktion.

1.16 Kriterium. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (a < b)$$

eine Regelfunktion und sei $x_0 \in [a, b]$ ein beliebiger Punkt. Dann existieren die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad (\textit{falls } x_0 \neq b) \text{ und } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad (\textit{falls } x_0 \neq a).$$

1.17 Hilfssatz. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Regelfunktion. Die Funktion

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \; F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ist stetig.

1.18 Definition. *Sei D ein nach oben unbeschränktes Intervall (also eine rechte Halbgerade) und*

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Funktion. Sei b eine Zahl. Wir sagen, der **Grenzwert von** $F(x)$ **für** $x \to \infty$ **existiert und ist gleich** b*

$$\bigl(\lim_{x \to \infty} F(x) = b\bigr),$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (hinreichend große) Zahl C gibt, so daß gilt

$$|F(x) - b| < \varepsilon \text{ für } x > C.$$

1.19 Definition. *Sei*

$$f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die folgenden Bedingungen genügt:

a) *Die Einschränkung von f auf jedes abgeschlossene Teilintervall von $[a, b)$ ist eine Regelfunktion.*

b) *Der Grenzwert*

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a, b))$$

existiert.

*Dann definiert man das **uneigentliche Integral***

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a, b)).$$

1.20 Definition. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem (nicht notwendig abgeschlossenen) Intervall heißt absolut integrierbar, falls ihre Einschränkung auf jedes abgeschlossen Teilintervall eine Regelfunktion ist und falls $|f|$ uneigentlich integrierbar ist.*

1.21 Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem nicht notwendig abgeschlossenen Intervall, deren Einschränkung auf jedes abgeschlossene Intervall eine Regelfunktion ist. Genau dann ist f absolut integrierbar, wenn es eine gemeinsame obere Schranke für die Integrale*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx,\ \ a < b,\ \ a, b \in D,$$

gibt.

1.22 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ \ D = (a, b),\ \ a < b,$$

eine Funktion, deren Einschränkung auf ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall von D Regelfunktion sei. Weiterhin existiere eine uneigentlich integrierbare Funktion

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$|f(x)| \le g(x) \text{ für alle } x \in D.$$

Dann ist auch f uneigentlich integrierbar.

1.23 Integralvergleichskriterium.
Sei $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ eine unendliche Reihe von Zahlen. Es existiere eine Funktion

$$f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(x) \ge 0 \text{ für alle } x$$

auf einer rechten Halbgeraden, so daß das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

existiert. Wenn

$$|a_n| \le f(x) \text{ für } n \le x < n + 1$$

mit Ausnahme von höchstens endlich vielen natürlichen Zahlen n gilt, so konvergiert die gegebene Reihe absolut.

Umgekehrt konvergiert die Reihe $\sum a_n$ ***nicht*** *absolut, wenn eine Funktion*

$$f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) \geq 0 \text{ für alle } x$$

existiert, so daß gilt

a) $$|a_n| \geq f(x) \text{ für } n \leq x < n+1$$

(endlich viele Ausnahmen sind zugelassen).

b) $f(x)$ *ist eine Regelfunktion in* $[a, t]$ *(*$t > a$ *beliebig), aber*

$$\int_a^t f(x)\,dx$$

ist nicht beschränkt für $t \to \infty$*, d.h. das uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

existiert nicht.

2. Grundlegende Rechenregeln der Differentialrechnung

2.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall,}$$

heißt in einem Punkt $x_0 \in D$ ***ableitbar (differenzierbar)****, wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man nennt diesen Grenzwert dann die ***Ableitung von*** f ***an der Stelle*** x_0.

Ist f *in jedem Punkt von* D *ableitbar, so heißt* f ***ableitbar (differenzierbar) schlechthin****. Die Ableitung* f' *kann dann wieder als Funktion*

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

betrachtet werden.

Schreibweise.

$$\frac{df}{dx} = f'.$$

2.2 Hilfssatz. *Die Funktion f sei differenzierbar in x_0. Dann ist f auch stetig in x_0.*

2.3 Bemerkung. *Seien f, g zwei Funktionen, die in einem Punkt x_0 des Definitionsbereiches ableitbar seien. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g,\ cf \qquad (c \in \mathbb{R})$$

ableitbar in x_0 und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

2.4 Satz. *Seien f, g zwei Funktionen, die in einem Punkt $x_0 \in D$ ableitbar seien. Dann sind auch die Funktionen*

$$f \cdot g,\ \frac{f}{g} \text{ (unter der Voraussetzung } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D\text{)}$$

ableitbar in x_0 und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$$

und gegebenenfalls

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

2.5 Satz (Kettenregel).
Seien

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen auf den Intervallen D und D'. Es gelte $f(D) \subset D'$, so daß man die Funktionen zusammensetzen kann

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Die Funktion f sei in einem Punkt $x_0 \in D$ und die Funktion g in $f(x_0)$ ableitbar. Dann ist auch $g \circ f$ im Punkt x_0 ableitbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

2.6 Satz für umkehrbare Funktionen.
Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ (D \text{ ein Intervall})$$

eine streng monotone Funktion, deren Ableitung existiert und überall von Null verschieden ist. Dann ist auch die Umkehrfunktion g ableitbar und es gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

für alle x aus dem Wertevorrat von f (= Definitionsbereich von g.)

2.7 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ein Intervall}$$

eine Funktion, welche in dem Punkt $a \in D$ ableitbar ist. Der Punkt a sei ***kein Randpunkt*** *von D. Wenn a ein lokaler Extrempunkt von f ist, so gilt*

$$f'(a) = 0.$$

3. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

3.1 Theorem (Satz von Rolle).
Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ a < b,$$

eine stetige Funktion, die im Inneren (a, b) ableitbar ist. Dann existiert ein Punkt

$$\xi \text{ mit } a < \xi < b,$$

so daß die Ableitung von f an der Stelle ξ mit der Steigung der Sekanten durch

$$A = (a, f(a)) \text{ und } B = (b, f(b))$$

übereinstimmt, d.h.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3.2 Bemerkung. *Sei f eine differenzierbare Funktion, definiert auf einem Intervall D und sei*

$$f'(x) = 0 \text{ für alle} x \in D.$$

Dann ist die Funktion f konstant.

3.3 Folgerung. *Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen auf einem Intervall. Wenn die Ableitungen von f und g übereinstimmen, so unterscheidet sich f von g höchstens um eine additive Konstante*

$$f = g + const.$$

3.4 Verallgemeinerter Satz von Rolle.
Seien f und g zwei stetige Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, die im Inneren (a, b) differenzierbar sind. Es existiert dann eine Zwischenstelle

$$\xi \text{ mit } a < \xi < b,$$

an der gilt

$$f'(\xi) = g'(\xi)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dabei ist $g(a) \neq g(b)$ vorauszusetzen.

3.5 Theorem (Regel von Bernoulli-de L'Hospital).
Es seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall D und $a \in D$ ein Punkt von D. Die Funktionen f und g seien zumindest in allen Punkten $x \in D,\ x \neq a$ differenzierbar. Außerdem sei

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Die Ableitung g' habe keine Nullstelle für $x \neq a$. Der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

möge existieren. Dann existiert auch der Grenzwert von

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{für } x \longrightarrow a$$

und es gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

4.1 Hilfssatz (Mittelwertsatz der Integralrechnung).
Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a,b]$ $(a < b)$. Es gibt eine Zwischenstelle

$$\xi \text{ mit } a \leq \xi \leq b,$$

so daß gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

4.2 Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).
Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{(D ein Intervall)}$$

eine stetige Funktion und $a \in D$ ein beliebiger Punkt. Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in D)$$

ist eine Stammfunktion von f.

4.3 Folgerung. *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall D mit stetiger Ableitung f'. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \qquad (a, b \in D).$$

5. Verträglichkeit der Differentiation mit Grenzprozessen

5.1 Theorem. *Gegeben sei eine Folge* (f_n) *von differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall* D. *Wir machen folgende Voraussetzungen:*

a) *Die Folge* $f_n(a)$ *konvergiert in wenigstens einem Punkt* $a \in D$.
b) *Die Funktionen* f'_n *sind stetig.*
c) *Die Folge* f'_n *konvergiert gleichmäßig.*

Dann konvergiert auch die Folge (f_n) *gegen eine differenzierbare Funktion* f *und es gilt*

$$f' = \lim_{n\to\infty} f'_n.$$

5.2 Folgerung. *Eine Potenzreihe*

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

stellt im Innern des Konvergenzintervalls $(-r, r)$ *(wir setzen* $r > 0$ *voraus) eine differenzierbare Funktion dar und es gilt*

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots .$$

d.h. wie bei Polynomen ist ***gliedweise Differentiation*** *erlaubt.*

6. Die Taylorsche Formel

6.1 Bemerkung. *Sei*

$$f : (a - r, a + r) \longrightarrow \mathbb{R}, \ r > 0,$$

eine Funktion, welche sich in eine konvergente Potenzreihe entwickeln läßt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \text{ für } |x - a| < r.$$

Dann gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots .$$

Folgerung (Identitätssatz für Potenzreihen).
Wenn die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

in einer r-Umgebung $(a-r, a+r)$ $(r>0)$ von a konvergieren und dort dieselbe Funktion darstellen, so gilt

$$a_n = b_n \text{ für alle } n.$$

6.2 Theorem (Taylorsche Formel mit Integralrestglied).
Gegeben sie eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall,}$$

und ein Punkt $a \in D$. Die Funktion f sei $(n+1)$-mal stetig ableitbar. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + R_n(x),$$

wobei R_n die folgende Darstellung besitzt:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Dabei ist auch $x < a$ zugelassen.

Kapitel IV. Einige spezielle Funktionen

1. Fouriersche Reihen

1.1 Bemerkung. *Es gilt*

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx} \rangle = \begin{cases} 0 & \textit{für } n \neq m, \\ 2\pi & \textit{für } n = m. \end{cases}$$

1.2 Hilfssatz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und über jedes abgeschlossene Intervall integrierbar. Dann ist*

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\, dx \ \textit{für jedes } a \in \mathbb{R}.$$

1.3 Satz. *Die Fourierreihe von f konvergiert genau dann an der Stelle x_0 gegen $f(x_0)$, wenn die Folge von Integralen*

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)}{2} - f(x_0) \right) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\, dt$$

eine Nullfolge ist.

1.4 Hilfssatz. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \ a < b,$$

eine Regelfunktion. Die beiden Folgen

$$\int\limits_a^b f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\, dx \quad \textit{und} \quad \int\limits_a^b f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, dx$$

konvergieren gegen Null für $n \to \infty$.

1.5 Zusatz zu 1.4. *Auch die Folge der Integrale*

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1,2,3,\dots$$

konvergiert gegen Null.

1.6 Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine über jedes kompakte Intervall integrierbare Funktion (d.h. Regelfunktion) mit der Periode 2π. Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend:*

a) $$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x_0} \text{ mit } c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\,dt.$$

b) *Die Folge der Dirichlet-Integrale* ($n \in \mathbb{N}$)

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)}{2} - f(x_0) \right) \frac{\sin[(2n+1)t]}{t}\,dt$$

ist eine Nullfolge.

1.7 Theorem. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch mit Periode 2π und über jedes kompakte Teilintervall von $\mathbb{R}$ integrierbar. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt.*

Annahme. *Die auf $(0, \pi/2]$ definierte Funktion*

$$F(t) := \frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{t}$$

sei Einschränkung einer Regelfunktion auf $[0, \pi/2]$.

Behauptung. *Dann gilt*

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x_0} \quad \text{mit} \quad c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}\,dx.$$

1.8 Theorem. *Für stückweise glatte Funktionen f konvergiert die Fourierreihe in jedem Punkt. Die Fourierreihe stellt die Funktion in allen Punkten dar, in denen die Funktion stetig ist. In den Sprungstellen (=Unstetigkeitsstellen) stellt sie das arithmetische Mittel aus den einseitigen Grenzwerten dar.*

1.9 Hilfssatz. *Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei n-mal stetig differenzierbar, c_ν sei der ν-te Fourierkoeffizient von f. Dann existiert ein C mit*

$$|c_\nu| \le \frac{C}{\nu^n} \quad \textit{für} \quad \nu \ne 0.$$

1.10 Satz. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit Periode 2π, so gilt mit c_n wie in 1.7*

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

2. Der Abelsche Grenzwertsatz

2.1 Satz. *Sei*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r. Unter der Annahme, daß die Reihe auch für $x = r$ konvergiert gilt dann

$$P(r) = \lim_{x \to r} P(x).$$

3. Integration rationaler Funktionen

3.1 Satz. *Jede rationale Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{R} \textit{ ein Intervall,}$$

läßt sich als endliche Summe einfacher rationaler Funktionen

$$f_\nu : D \longrightarrow \mathbb{C},\ \nu = 1, \dots, n,$$

schreiben:

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Anhang zu 3. Partialbruchzerlegung

3.2 Satz. *Seien P, Q Polynome, $Q \not\equiv 0$. Wir bezeichnen mit*

$$a_1, \dots, a_m$$

die m verschiedenen Nullstellen von Q und mit

$$k_1, \dots, k_m$$

deren Vielfachheiten ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = \operatorname{Grad} Q$).

Dann gilt die folgende Behauptung: Es existieren

1) *ein Polynom A,*

2) *komplexe Zahlen $c_{\nu\mu},\ 0 \le \mu \le k_\nu,\ 1 \le \nu \le m$ mit der Eigenschaft*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \frac{c_{\nu\mu}}{(x - a_\nu)^\mu} \qquad (\, Q(x) \neq 0\,).$$

4. Die Stirlingsche Formel und das Wallissche Produkt

4.1 Theorem (Stirlingsche Formel). *Es gilt*

$$1 \le \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} \textit{ für } n = 1, 2, \dots .$$

5. Die Gammafunktion

5.1 Bemerkung. *Für $x > 0$ gilt*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \textit{(Funktionalgleichung der } \Gamma\textit{-Funktion)}$$

Für natürliche n gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

5.2 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \textit{ ein Intervall,}$$

*heißt **konvex**, falls für je zwei Punkte $a, b \in D$ und alle $t \in [0,1]$ gilt:*

$$f\left(ta + (1-t)b\right) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

5.3 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \textit{ein Intervall,}$$

*heißt **logarithmisch konvex**, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:*

a) *$f(x) > 0$ für alle $x \in D$;*

b) *die Funktion*

$$\log \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \log\left(f(x)\right),$$

ist konvex.

5.4 Satz. *Die Γ-Funktion ist logarithmisch konvex.*

5.5 Satz. *Sei*

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) *$f(1) = 1$,*

b) *$f(x+1) = xf(x)$ für $x > 0$,*

c) *f ist logarithmisch konvex.*

Dann gilt $f(x) = \Gamma(x)$.

5.6 Satz. *Für alle $x > 0$ gilt*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

6. Analytische Funktionen und das Rechnen mit Potenzreihen

6.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \text{ein Intervall},$$

heißt ***analytisch****, wenn es zu jedem $a \in D$ eine Potenzreihe*

$$P_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

gibt, welche in einer ε-Umgebung $U = (a-\varepsilon, a+\varepsilon),\ \varepsilon > 0$, um a konvergiert und die Funktion f darstellt,

$$f(x) = P_a(x) \text{ für alle } x \in U \cap D.$$

6.2 Satz. *Eine Potenzreihe*

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

mit von Null verschiedenem Konvergenzradius r stellt in $(a-r, a+r)$ eine analytische Funktion dar.

6.3 Satz. *Die Summe $f+g$ und das Produkt $f \cdot g$ analytischer Funktionen f und g sind wieder analytisch.*

6.4 Satz. *Seien*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ g : D' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D, D' \text{Intervalle},$$

zusammensetzbare Funktionen, $f(D) \subset D'$. Wenn f und g analytisch sind, so ist es auch ihre Zusammensetzung.

6.5 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \text{ein Intervall},$$

eine analytische Funktion ohne Nullstelle. Dann ist auch

$$\frac{1}{f} : D \longrightarrow \mathbb{R},\ \frac{1}{f}\,(x) = \frac{1}{f(x)}$$

eine analytische Funktion.

6.6 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall,}$$

eine analytische Funktion, deren Ableitung keine Nullstelle besitzt:

$$f'(x) \neq 0 \text{ für } x \in D.$$

Dann besitzt f eine analytische Umkehrfunktion.

6.7 Satz. *Seien*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall,}$$

analytische Funktionen. Es existiere ein Teilintervall $D_0 \subset D$, welches mehr als nur einen Punkt enthält. Dann gilt

$$f|D_0 = g|D_0 \Longrightarrow f = g,$$

oder in Worten: Stimmen f und g auf dem Teilintervall D_0 überein, so tun sie dies sogar auf ganz D.

Teil II

Differential- und Integralrechnung

für Funktionen mehrerer Veränderlicher

V. Funktionen auf metrischen Räumen

1. Metrische Räume

1.1 Definition. *Eine **Metrik** d auf einer Menge X ist eine Abbildung*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

*(die sogenannte **Distanzfunktion**) mit den Eigenschaften*

a) $d(x,y) \geq 0$ *für alle* $x,y \in X$ *und* $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

b) $d(x,y) = d(y,x)$ *(Symmetrie)*

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *für alle* $x,y,z \in X$ *(Dreiecksungleichung).*

1.2 Definition. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt aus X, sowie $r > 0$ eine positive Zahl. Die Punktmenge*

$$U_r(x_0) = \{x \in X;\ d(x,x_0) < r\}$$

heißt offene Kugel um x_0 vom Radius r.

1.3 Bemerkung. *Sei $U_r(x_0)$ eine Kugel in einem metrischen Raum (X,d) und sei*

$$x_1 \in U_r(X_0)$$

ein beliebiger Punkt aus dieser Kugel. Es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(x_1) \subset U_r(x_0).$$

1.4 Bemerkung. *Gegeben seien n Kugeln*

$$U_{r_1}(x_1), \ldots,\ U_{r_n}(x_n)$$

in einem metrischen Raum und ein beliebiger weiterer Punkt x. Es gibt dann eine Zahl $r > 0$, so daß gilt:

$$U_{r_1}(x_1) \cup \ldots \cup U_{r_n}(x_n) \subset U_r(x).$$

1.5 Bemerkung. *Seien x, x' zwei verschiedene Punkte eines metrischen Raumes. Es existiert dann eine positive Zahl $\varepsilon > 0$ mit*

$$U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(x') = \emptyset \qquad \textit{(Punktetrennungseigenschaft).}$$

1.6 Definition. *Sei $x \in X$ ein Punkt eines metrischen Raumes (X, d). Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$U_\varepsilon(x) \subset M.$$

1.7 Definition. *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes (X, d) heißt **offen**, wenn sie Umgebung eines jeden in ihr enthaltenen Punktes ist.*

1.8 Definition. *Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d). Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** von A, wenn es in jeder Umgebung von x sowohl Punkte gibt, die in A liegen, als auch solche, die nicht in A liegen.*

1.9 Definition. *Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt **abgeschlossen**, wenn jeder Randpunkt von A in A enthalten ist.*

1.10 Hilfssatz. *Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement*

$$X - A := \{x \in X;\ x \notin A\}$$

offen ist.

2. Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

2.1 Definition. *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus einem metrischen Raum (X,d) konvergiert gegen $x \in X$, wenn die Zahlfolge $d(x_n,x)$ eine Nullfolge ist. Die Folge (x_n) heißt konvergent, wenn es ein $x \in X$ gibt, do daß (x_n) gegen x konvergiert.*

2.2 Definition. *Zwei Metriken d, d' auf einer Menge X heißen **(streng) äquivalent**, wenn es Konstanten C, C' gibt mit*

$$d(x,y) \le C'd'(x,y) \quad \textit{sowie} \quad d'(x,y) \le Cd(x,y).$$

2.3 Definition. *Seien (X,d) und (Y,d') zwei metrische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Diese heißt **stetig** in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn folgendes gilt: Ist V eine Umgebung von $y_0 = f(x_0)$ in Y, so ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 in X.*

2.4 Bemerkung. *Die Abbildung f ist genau dann stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \text{ für alle } x \in X \text{ mit } d(x,x_0) < \delta.$$

2.5 Bemerkung. *Eine Abbildung $f: X \to Y$ zweier metrischer Räume ist dann und nur dann stetig (d.h. stetig in jedem Punkt von X), wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge V aus Y offen in X ist.*

2.6 Hilfssatz. *Seien X, Y, Z metrische Räume und*

$$f: X \longrightarrow Y, \;\; g: Y \longrightarrow Z$$

Abbildungen sowie x ein Punkt aus X mit der Eigenschaft

a) *f ist stetig in x,*
b) *g ist stetig in $f(x)$.*

Dann ist

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \qquad (g \circ f(x) := g(f(x)))$$

stetig in x.

2.7 Satz. *Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung metrischer Räume, und $x \in X$ ein Punkt. Die Abbildung f ist dann und nur dann stetig in x, wenn gilt:*

Ist $x_n \in X$ eine Folge, die gegen x konvergiert, so konvergiert die Bildfolge $f(x_n)$ gegen $f(x)$, also

$$x_n \longrightarrow x \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x).$$

2.8 Definition. *Ein Punkt x eines metrischen Raumes X heißt* ***isoliert****, wenn es eine Zahl $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $U_\varepsilon(x)$ nur aus dem Punkt x allein besteht.*

2.9 Definition. *Seien X und Y metrische Räume und sei $a \in X$ ein nicht isolierter Punkt. Weiter sei eine Abbildung*

$$f : X - \{a\} \longrightarrow Y \quad \textit{oder} \quad f : X \longrightarrow Y$$

gegeben. Dann sagt man: Die Funktion f besitzt den Grenzwert b für x gegen a, in Zeichen

$$f(x) \longrightarrow b \text{ für } x \longrightarrow a \quad \textit{oder} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b,$$

wenn die Abbildung

$$\tilde{f} : X \longrightarrow Y,\ \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq a \\ b & \text{für } x = a. \end{cases}$$

in $x = a$ stetig ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $\delta > 0$ mit

$$d(x, a) < \delta,\ x \neq a \Longrightarrow d'(f(x), b) < \varepsilon.$$

2.10 Hilfssatz. *Seien d und d' zwei äquivalente Metriken auf X. Dann ist jede Umgebung U eines Punktes a bezüglich d auch Umgebung bezüglich d' und umgekehrt. Insbesondere führen d und d' zu denselben offenen Mengen.*

3. Induzierte Metrik und Produktmetrik

3.1 Definition. *Sei $A \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d). Die **induzierte Metrik** $d' = d|A$ ist definiert durch*

$$d' : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d'(x, y) := d(x, y) \text{ für alle } x, y \in A.$$

3.2 Bemerkung. *Sei $A \subset X$ eine Teilmenge des metrischen Raumes (X, d). Die kanonische Injektion*

$$\iota : A \longrightarrow X, \ \iota(a) = a \text{ für } a \in A,$$

ist stetig (dabei sei A mit der induzierten Metrik versehen).

Bemerkung. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung metrischer Räume und B eine Teilmenge von Y (versehen mit der induzierten Metrik), die das Bild von f enthält, also*

$$f(X) \subset B.$$

Man kann dann die Abbildung

$$f_0 : X \longrightarrow B; \ f_0(x) = f(x) \text{ für } x \in X$$

betrachten. Diese ist genau dann in einem Punkt $x \in X$ stetig, wenn f stetig in X ist.

3.3 Hilfssatz. *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $a \in A$. Eine Teilmenge $N \subset A$ ist genau dann Umgebung von a (bezüglich der induzierten Metrik $d|A$), wenn es eine Umgebung $M \subset X$ von a (bezüglich d) gibt, so daß gilt:*

$$M \cap A = N$$

3.4 Hilfssatz. *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes X und V eine Teilmenge von A. Dann gilt: V ist genau dann offen (bezüglich $d|A$), wenn es eine offene Teilmenge $U \subset X$ (bezüglich d) gibt mit*

$$U \cap A = V.$$

3.5 Hilfssatz. *Sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes X und V eine Teilmenge von A. Dann gilt: V ist genau dann abgeschlossen (bezüglich $d|A$), wenn es eine abgeschlossene Teilmenge $U \subset X$ (bezüglich d) gibt mit $U \cap A = V$.*

3.6 Hilfssatz. *Sei $A \subset X$ ein* ***offener*** *Teil des metrischen Raumes (X, d). Eine Teilmenge $V \subset A$ ist genau dann offen in A (bezüglich $d|A$), wenn sie offen in X (bezüglich d) ist.*

3.7 Hilfssatz. *Sei $A \subset X$ ein* ***abgeschlossener*** *Teil des metrischen Raumes (X, d). Eine Teilmenge $V \subset A$ ist genau dann abgeschlossen in A (oder: bezüglich $d|A$), wenn sie abgeschlossen in X (oder: bezüglich d) ist.*

3.8 Definition. *Es seinen zwei metrische Räume (X, d') und (Y, d'') gegeben. Auf dem kartesischen Produkt*

$$X \times Y := \{(x, y) \quad x \in X, \; y \in Y\}$$

ist die sogenannte ***Produktmetrik*** *$d := d' \times d''$ definiert durch*

$$d\left((x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})\right) = \max\left(d'(x, \tilde{x}), d''(y, \tilde{y})\right).$$

3.9 Bemerkung. *Seien X, Y metrische Räume. Eine Folge*

$$(x_n, y_n) \in X \times Y \qquad n = 1, 2, \ldots$$

konvergiert genau dann (bezüglich der Produktmetrik), wenn (x_n) und (y_n) in X bzw. Y konvergiert und gegebenenfalls gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n).$$

3.10 Satz. *Es seien X, Y und Z metrische Räume und*

$$f : X \longrightarrow Y \times Z$$

eine Abbildung. Zerlegt man diese in ihre „zwei Komponenten“

$$f_1 : X \longrightarrow Y \quad \text{und} \quad f_2 : Y \longrightarrow Z, \quad f(x) = \left(f_1(x), f_2(x)\right),$$

so erhält man: Die Abbildung f ist genau dann stetig in einem Punkt $x \in X$, wenn f_1 und f_2 in x stetig sind.

3.11 Bemerkung. *Seien X, Y metrische Räume. Die beiden Projektionen*

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \pi_2 : X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

sind stetig.

4. Kompaktheit

4.1 Definition. *Ein metrischer Raum X heißt **kompakt**, wenn es zu **jeder** offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt. Es mögen also endlich viele Indizes*

$$i_1, \dots, i_n \in I \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

existieren, so daß gilt:

$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

4.2 Definition. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt **kompakt**, wenn A zusammen mit der induzierten Metrik ein kompakter metrischer Raum im Sinne von 4.1 ist.*

4.3 Bemerkung. *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn es zu jeder Schar $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset X$ mit der Eigenschaft*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

bereits endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n$ gibt, so daß gilt

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

4.4 Satz. *Sei A eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X. Dann ist A beschränkt und abgeschlossen in X.*

4.5 Hilfssatz. *Sei X ein kompakter Raum. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ ebenfalls kompakt.*

4.6 Satz (Allgemeines Intervallschachtelungsprinzip).
Sei X ein metrischer Raum und

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

eine absteigende Kette von nichtleeren kompakten Teilmengen. Dann ist der Durchschnitt all dieser Kompakta ebenfalls nicht leer

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \left\{\, a \in X; \quad a \in A_i \text{ für alle } i \,\right\} \neq \emptyset.$$

4.7 Satz. *Seien X, Y zwei kompakte metrische Räume. Dann ist auch $X \times Y$ (versehen mit der Produktmetrik) kompakt.*

4.8 Theorem (Heine-Borelscher Überdeckungssatz).
Ein abgeschlossenes Intervall $D = [a, b]$, $a < b$, (versehen mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$) ist ein kompakter metrischer Raum.

4.9 Theorem. *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist dann und nur dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

4.10 Satz. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Kompaktum. Dann besitzt A Maximum und Minimum.*

4.11 Lemma. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung metrischer Räume und sei $A \subset X$ ein Kompaktum. Dann ist auch $f(A) \subset Y$ kompakt.*

4.12 Theorem. *Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung eines nichtleeren kompakten Raumes X in $\mathbb{R}$. Dann besitzt f ein Maximum (und ein Minimum), d.h. es gibt $x_0 \in X$ mit*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x)) \quad \text{für alle } x \in X$$

4.13 Folgerung. *Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer nicht leeren beschränkten und abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ hat ein Maximum.*

4.14 Definition. *Eine Abbildung*

$$f : (X, d) \longrightarrow (X', d')$$

metrischer Räume heißt ***gleichmäßig stetig*** *(vgl. III.1.14), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow d'\left(f(x), f(y)\right) < \varepsilon \text{ für alle } x, y \in X.$$

4.15 Satz. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung metrischer Räume. Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.*

4.16 Bemerkung. *Sei*

$$f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (a < b, \ c < d)$$

eine stetige Funktion von zwei Variablen. Dann ist

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)\, dt$$

stetig auf $[c, d]$.

5. Gleichmäßige Konvergenz und normierte Räume

5.1 Definition. *Sei X eine nichtleere Menge. Eine Folge von Funktionen aus $B(X)$*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt ***gleichmäßig konvergent*** *(vgl. II.3.4) gegen $f \in B(X)$, wenn sie in der Metrik*

$$d(f,g) = \|f - g\|$$

gegen f konvergiert, wenn also gilt

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Das bedeutet: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in X,\ n \geq N.$$

5.2 Satz. *Es sei $X \neq \emptyset$ ein metrischer Raum und*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von stetigen beschränkten Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist auch f stetig (vgl. II.3.5).

5.3 Bemerkung. *Es seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem metrischen Raum X. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g \quad \text{und} \quad f \cdot g$$

stetig.

5.4 Definition. *Eine* ***Norm*** *$\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung*

$$V \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \|f\|,$$

mit den Eigenschaften

1) $\|f\| \geq 0$ *und* $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.
2) $\|cf\| = |c|\,\|f\|$ *für* $f \in V;\ c \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$.
3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *für alle* $f, g \in V$.

5.5 Bemerkung. *Ist* $(V, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum, so ist*

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

eine Metrik auf V.

5.6 Definition. *Ein* ***Skalarprodukt*** *auf einem (reellen oder komplexen) Vektorraum* V *ist eine Abbildung*

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}\ (\mathbb{C}), \quad (f, g) \longmapsto \langle f, g\rangle,$$

mit den Eigenschaften

1) $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$ *für* $f_1, f_2, g \in V$
   $\langle af, g\rangle = a\langle f, g\rangle$ *für* $a \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$; $f, g \in V$.
2) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ *(insbesondere ist* $\langle f, f\rangle$ *reell).*
3) $\langle f, f\rangle \geq 0$ *für alle* $f \in V$, *wobei das Gleichheitszeichen nur für* $f = 0$ *gilt.*

5.7 Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).
Sei $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum* V. *Dann gilt*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \text{ für alle } f, g \in V.$$

Dabei sei $\|f\| := {}_+\sqrt{\langle f, f\rangle}$.

5.8 Folgerung. *Sei* $\langle\cdot, \cdot\rangle$ *ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum* V. *Dann wird durch*

$$\|f\| := {}_+\sqrt{\langle f, f\rangle}$$

eine Norm auf V *erklärt. Insbesondere wird* V *ein metrischer Raum durch*

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

6. Der Approximationssatz von Stone Weierstrass

6.1 Theorem (Approximationssatz von Stone-Weierstrass, erste Variante). *Es sei X ein kompakter metrischer Raum, der mindestens zwei Punkte enthält. Weiterhin sei W eine Menge von stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit den Eigenschaften*

1) $f, g \in W \Longrightarrow f + g \in W$ *und* $cf \in W$ *für* $c \in \mathbb{R}$.
2) $f \in W \Longrightarrow |f| \in W$.
3) *(Punktetrennungseigenschaft)*
   Seien a, b zwei verschiedene Punkte von X. Dann existiert ein $f \in W$ mit $f(a) = 0$ aber $f(b) \neq 0$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt: Ist $f \in C(X)$ eine beliebige stetige Funktion auf X und $\varepsilon > 0$, so existiert eine Funktion

$$h \in W \text{ mit } \|f - h\| \leq \varepsilon.$$

Zusatz: Insbesondere existiert dann eine Folge (h_n) von Funktionen aus W, die gleichmäßig gegen f konvergiert. (Man setze $\varepsilon := \frac{1}{n}$ und bezeichne die zugehörige Funktion mit h_n.)

6.2 Theorem (Approximationssatz von Stone-Weierstrass, zweite Variante). *Es sei $X \neq \emptyset$ ein kompakter metrischer Raum und $W \subset C(X, \mathbb{R})$ eine Menge von stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit den Eigenschaften*

1) $f, g \in W \Longrightarrow f + g \in W$ *und* $cf \in W$ *für* $c \in \mathbb{R}$.
2) $f, g \in W \Longrightarrow f \cdot g \in W$ *und die konstanten Funtionen liegen in* W.
3) W *besitzt die Punktetrennungseigenschaft (vgl. 6.1)*

Unter diesen Voraussetzungen gilt: Ist $f \in C(X)$ eine beliebige stetige Funktion auf X und $\varepsilon > 0$, so existiert eine Funktion

$$h \in W \text{ mit } \|f - h\| \leq \varepsilon.$$

6.3 Hilfssatz. *Auf dem Intervall $[-1, 1]$ existiert eine Folge von Polynomen*

$$p_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die gleichmäßig gegen die Funktion $|x|$ konvergiert.

6.4 Folgerung (Weierstrassscher Approximationssatz).
Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (a < b)$$

stetig. Es existiert eine Folge von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

7. Konvergenzkriterien

7.1 Satz. *Jede Folge (x_n) in einem **kompakten** metrischen Raum X besitzt eine konvergente Teilfolge.*

7.2 Definition. *Man nennt eine Folge (x_n) aus einem metrischen Raum X eine **Cauchyfolge,** (vgl. I.4.7), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ existiert, so daß gilt:*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N.$$

7.3 Definition. *Ein metrischer Raum X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchfolge aus X konvergiert.*

7.4 Bemerkung. *Seien d, d' zwei äquivalente Metriken auf X und (x_n) eine Folge aus X. Diese ist genau dann eine Cauchyfolge bezüglich d, wenn sie eine solche bezüglich d' ist.*

7.5 Satz. *Der $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.*

7.6 Banachscher Fixpunktsatz.
*Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine **kontrahierende** Selbstabbildung. Dann existiert genau ein Fixpunkt $a \in X$, d.h. ein Punkt $a \in X$ mit*

$$f(a) = a.$$

7.7 Definition. *Ein **Banachraum** ist ein normierter Vektorraum, welcher vollständig bezüglich der assoziierten Metrik $d(f, g) = \|f - g\|$ ist.*

*Ein **Hilbertraum** ist ein Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt, so daß der assoziierte normierte Raum $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ ein Banachraum ist.*

VI. Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit

1.1 Bemerkung. *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Bereich, so ist*

$$D_j := \{\, x_j \in \mathbb{R}; \quad (a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n) \in D \,\}$$

ein offener Teil der reellen Geraden $\mathbb{R}$.

1.2 Definition. *Die Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n \text{offen},$$

*heißt in dem Punkt $a = (a_1, \dots, a_n)$ nach der j-ten Variablen x_j **partiell ableitbar**, wenn die Funktion*

$$f_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_j(x_j) = f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

im Punkt a_j differenzierbar ist.
Schreibweise: $\partial_j f(a_1, \dots, a_n) = f_j'(a_j)$.

1.3 Satz. *Die Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n \text{offen},$$

sei partiell ableitbar. Ist $a \in D$ ein Punkt, so daß eine Umgebung $U(a)$ existiert, in der alle partiellen Ableitungen von f beschränkt sind,

$$|\partial_j f(x)| \le C \text{ für alle } x \in U(a),\ j = 1, \dots, n,$$

so ist f stetig in a.

1.4 Satz. *Die Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ \ D \subset \mathbb{R}^n \textit{offen},$$

sei zweimal stetig partiell ableitbar. Dann gilt

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f.$$

(In Worten: Partielle Ableitungen darf man vertauschen.)

1.5 Satz. *Die Abbildung*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n \textit{offen},$$

sei für den festen Punkt $a \in D$ stetig partiell ableitbar. Definiert man dann $r(x)$ durch die Gleichung

$$f(x) = f(a) + J(f;a)(x-a) + r(x),$$

so gilt

$$\frac{r(x)}{\|x-a\|} \longrightarrow 0 \textit{ für } x \longrightarrow a.$$

1.6 Definition. *Eine Abbildung*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m\ \ D \subset \mathbb{R}^n \textit{offen},$$

heißt in einem Punkt $a \in D$ ***total differenzierbar****, wenn es eine Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gibt, so daß gilt:

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + r(x)$$

mit

$$\frac{r(x)}{\|x-a\|} \longrightarrow 0 \textit{ für } x \longrightarrow a.$$

1.7 Lemma. *Die Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei total differenzierbar in $a \in D$ (Bezeichnungen wie in 1.6). Dann ist sie auch partiell differenzierbar in a, und es gilt*

$$J(f;a) = A.$$

1.8 Theorem. *Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Abbildungen*

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n \textit{ offen,} \\ g : D' &\longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad D' \subset \mathbb{R}^m \textit{ offen,} \end{aligned}$$

die sich zu einer Abbildung

$$h : D \longrightarrow \mathbb{R}^p;\ h(x) = g\left(f(x)\right).$$

zusammensetzen lassen. Dann ist auch h stetig (partiell) ableitbar und es gilt für jedes $a \in D$

$$J(g \circ f; a) = J(g; f(a)) \cdot J(f; a) \qquad \textit{(Matrizenprodukt).}$$

1.9 Hilfssatz. *Sei A eine feste Matrix. Es existiert eine Konstante C mit*

$$\|Ax\| \leq C \, \|x\|$$

für alle Vektoren x (mit gleicher Komponentenanzahl wie die Anzahl der Spalten von A).

2. Der Satz für implizite Funktionen

2.1 Theorem (Satz für umkehrbare Funktionen, erster Teil).
Es sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n \textit{ offen,}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarer Jacobi-Matrix $J(f; a)$ für jedes $a \in D$. Dann hat die Abbildung f die folgenden beiden Eigenschaften

a) *f ist offen (also: $D_0 \subset D$ offen $\Longrightarrow$ $f(D_0) \subset \mathbb{R}^n$ offen).*

b) *f ist lokal umkehrbar, d.h. zu jedem $a \in D$ existiert eine offene Umgebung D_0, $a \in D_0 \subset D$, so daß die Einschränkung $f|D_0$ umkehrbar ist.*

2.2 Hilfssatz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei*

$$h : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Gegeben seien zwei Punkte $a, b \in D$, so daß auch noch ihre Verbindungsstrecke

$$a + t(b - a),\ 0 \le t \le 1,$$

ganz in D enthalten ist. Dann existiert auf dieser Verbindungsstrecke ein Punkt ξ, so daß gilt

$$h(a) - h(b) = \sum_{\nu=1}^{n} \partial_\nu h(\xi)(a_\nu - b_\nu).$$

Speziell gilt dann

$$|h(a) - h(b)| \le C \cdot \|a - b\| \ \text{ mit } C \ge \sum_{\nu=1}^{n} |\partial_\nu h(\xi)|.$$

2.3 Theorem (Satz für umkehrbare Funktionen, zweiter Teil). *Es mögen die Voraussetzungen von 2.1 gelten; es sei also*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarer Jacobi-Matrix $J(f; a)$ für jedes $a \in D$. Zusätzlich sei f umkehrbar, d.h. es möge eine Abbildung

$$g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } f(x) = y \Longleftrightarrow x = g(y)$$

existieren. Dann ist auch g stetig partiell ableitbar und es gilt

$$J(g; b) = J(f; a)^{-1} \text{ für } b = f(a) \quad (\Longleftrightarrow a = g(b)).$$

2.4 Theorem (Satz für implizite Funktionen). *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ D \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{offen,}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Außerdem sei ein Punkt

$$(a, b), \quad a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$$

mit folgenden Eigenschaften gegeben:

a) $f(a, b) = 0$.

b) *Die Funktionalmatrix* $J(f_a; b)$ *der Abbildung*

$$f_a : D_a \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ D_a := \{y \in \mathbb{R}^m; \quad (a, y) \in D\};\ f_a(y) := f(a, y)$$

ist umkehrbar.

Dann gibt es offene Umgebungen

$$a \in A \subset \mathbb{R}^n,\ b \in B \subset \mathbb{R}^m,$$

so daß für jedes $x \in A$ *eine und nur eine Lösung* $y \in B$ *der Gleichung*

$$f(x, y) = 0$$

existiert.

Zusatz. *Die Abbildung*

$$h : A \longrightarrow B,\ y = h(x),$$

ist stetig differenzierbar und es gilt

$$J(h; a) = -J(f_a; b)^{-1} J(f_b; a).$$

Dabei ist f_b *analog zu* f_a *definiert* ($f_b(x) := f(x, b)$)*.*

3. Extremwerte differenzierbarer Funktionen

3.1 Bemerkung. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n \mathit{offen},$$

eine differenzierbare Funktion. Wenn die partiellen Ableitungen von f verschwinden, so ist f lokal konstant (und natürlich umgekehrt).

3.2 Definition. *Ein metrischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn jede lokal konstante Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ sogar konstant ist.*

3.3 Definition. *Ein metrischer Raum X heißt **bogenweise zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ eine stetige Abbildung φ gibt, mit*

$$\varphi : [0, 1] \longrightarrow X;\ \varphi(0) = a,\ \varphi(1) = b.$$

3.4 Bemerkung. *Jeder bogenweise zusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

3.5 Definition. *Ein **Gebiet** im $\mathbb{R}^n$ ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$.*

3.6 Bemerkung. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren partielle Ableitungen verschwinden. Dann ist f konstant.*

3.7 Bemerkung. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n \mathit{offen},$$

eine differenzierbare Funktion und sei $a \in D$ ein lokales Extremum von f. Dann gilt

$$\partial_\nu f(a) = 0 \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

3.8 Definition. *Eine reelle symmetrische Matrix*

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}, \quad h_{ij} = h_{ji} \text{ für} 1 \leq i, j \leq n,$$

heißt ***positiv definit****, wenn der Ausdruck*

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{ij} x_i x_j$$

für jeden von 0 verschiedenen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ *positiv ist.*

3.9 Satz. *Die Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \; D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

sei zweimal stetig differenzierbar. Sei $a \in D$ *ein Punkt mit den Eigenschaften*

a) $\partial_j f(a) = 0$ *für* $j = 1, \dots, n$,

b) $\mathcal{H}(f, a) = \left(\partial^2_{ij} f(a)\right)_{ij}$ *ist negativ definit.*

Dann besitzt f *in* a *ein lokales Maximum.*

3.10 Satz. *Gegeben seien*

a) *eine offene Teilmenge* $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$,

b) *eine stetig differenzierbare Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$,

c) *eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \; g = (g_1, \dots, g_m).$$

Voraussetzung*. Die Jacobi-Matrix* $J(g; x)$ *habe für jeden Punkt* $x \in D$ *den (maximal möglichen) Rang* m*. Wir setzen*

$$M := \{x \in D; \; g(x) = 0\}. \qquad \text{(Nebenbedingungsmenge)}$$

Annahme*.* $a \in M$ *sei ein relatives Extremum der Einschränkung* $f|M$ *von* f *auf* M*.*

Behauptung*. Es existieren reelle Zahlen* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *(die* ***Lagrangeschen Multiplikatoren****), so daß gilt:*

$$\partial_i f(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \text{ für } i = 1, \dots, n+m.$$

4. Die Taylorsche Formel und analytische Funktionen

4.1 Hilfssatz. *Unter obigen Voraussetzungen gilt*

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\nu|=k} \frac{k!}{\nu!}(\partial^\nu f)(x) \cdot \alpha^\nu .$$

Hierbei ist über die endlich vielen Multiindizes $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\nu| = k$ zu summieren.

4.2 Satz (Taylorformel). *Die Funktion*

$$f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n \ \textit{offen und konvex},$$

sei $n+1$-mal stetig differenzierbar und es sei $a \in D$. Dann gilt für alle $x \in D$:

$$f(x) = \sum_{|\nu|\le n} \frac{(\partial^\nu f)(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + R_n(x)$$

$$\textit{mit} \quad R_n(x) = (n+1) \sum_{|\nu|=n+1} \frac{1}{\nu!} \int_0^t (t-u)^n [(\partial^\nu f)(a+u\alpha)](a+u\alpha)^\nu \, du.$$

4.3 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^n \ \textit{offen},$$

*heißt **analytisch**, wenn sie unendlich oft stetig partiell ableitbar ist und wenn zu jedem Punkt $a \in D$ eine Umgebung U existiert, innerhalb derer die Taylorreihe absolut konvergiert und die Funktion f darstellt:*

$$f(x) = \sum_{\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)} a_\nu (x-a)^\nu, \quad a_\nu = \frac{(\partial^\nu f)(a)}{\nu!}.$$

Allgemeiner heißt eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}^m$ analytisch, wenn alle Komponenten von f analytisch sind.

Kapitel VII. Integrationstheorie

1. Das Integral für stetige Funktionen mit kompakten Trägern

1.1 Hilfssatz. *Die Funktion*

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad a_\nu \le x_\nu \le b_\nu\} \quad (a_\nu \le b_\nu)$$

sei stetig. Dann ist auch die Funktion

$$F : Q' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q' = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}; \quad a_\nu \le x_\nu \le b_\nu\}$$

$$F(x_2, \dots, x_n) = \int\limits_{a_1}^{b1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1$$

stetig.

1.2 Definition. *Das Integral einer stetigen Funktion*

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q = \{x; \quad a_\nu \le x_\nu \le b_\nu\} \quad (a_\nu \le b_\nu),$$

auf einem kompakten Quader Q wird induktiv definiert durch

$$\int\limits_Q f(x)\, dx_1, \dots,\, dx_n = \int\limits_{Q'} \left[\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 \right] dx_2 \dots\, dx_n.$$

$$(Q' = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}; \quad a_\nu \le x_\nu \le b_\nu\} \quad \textit{für} \quad 2 \le \nu \le n)$$

$$\int\limits_{[a,b]} f(x)\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx \quad (a < b) \quad \textit{im Falle} \quad n = 1.$$

1.3 Satz. *Gegeben sei eine stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$, Q ein kompakter Quader in $\mathbb{R}^n$ und σ eine Permutation der Variablen. Dann gilt*

$$\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{a_{\sigma_n}}^{b_{\sigma_n}} \dots \int_{a_{\sigma_1}}^{b_{\sigma_1}} f(x)\, dx_{\sigma_1} \dots dx_{\sigma_n}.$$

1.4 Hilfssatz. *Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und*

$$f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es gilt

$$\left| \int_Q f(x)\, dx_1 \dots dx_n \right| \le \|f\|(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n),$$

wobei $\|f\|$ die Maximumsnorm bezeichne.

1.5 Folgerung. *Die Folge von stetigen Funktionen*

$$f_k : Q \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

konvergiere gleichmäßig gegen f. Dann gilt

$$\int_Q f(x)\, dx_1 \dots dx_n = \lim_{k \to \infty} \int_Q f_k(x)\, dx_1 \dots dx_n.$$

1.6 Bemerkung. *Eine stetige Funktion*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

gehört dann und nur dann zur Klasse $C_c(\mathbb{R}^n)$, wenn eine Zahl $R > 0$ existiert, so daß

$$f(x) = 0 \quad \textit{für} \quad \|x\| > R$$

gilt.

2. Die Ausdehnung des Integrals auf halbstetige Funktionen

2.1 Satz (Dini). *Es sei X ein kompakter metrischer Raum und*

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, 3 \dots,$$

eine Folge von stetigen Funktionen, die monoton gegen Null fällt, d.h.

$$\begin{array}{ll} a) & f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots, \\ b) & \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad (\text{für jedes } x \in X). \end{array}$$

Die Folge (f_n) konvergiert dann gleichmäßig gegen 0.

2.2 Definition. *Eine Funktion*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

gehört der Klasse B^+ an (Bairesche Klasse), wenn es eine Folge von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger

$$f_\nu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \cdots \\ \text{b)} & f(x) = \operatorname{Sup}_\nu f_\nu(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

gibt.

2.3 Bemerkung. *Es seien $f \in B^+$ und $(f_\nu), (g_\nu)$ zwei Folgen von Funktionen aus C_c (stetige Funktionen mit kompaktem Träger) mit der Eigenschaft*

$$f_\nu \uparrow f, \quad g_\nu \uparrow f.$$

Dann gilt

$$\operatorname{Sup}_\nu \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\,dx \right) = \operatorname{Sup}_\nu \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\nu(x)\,dx \right).$$

2.4 Definition. *Es sei $f \in B^+$. Das Integral von f wird durch die Formel*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \mathrm{Sup}_\nu \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\,dx \right)$$

definiert, wobei $f_\nu \in C_c(\mathbb{R}^n)$ irgend eine Folge von Funktionen (stetig mit kompaktem Träger) ist, die f monoton wachsend approximiert, d.h. $f_\nu \uparrow f$.

2.5 Hilfssatz. *Seien $f \le g$ zwei Funktionen aus B^+, dann gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

2.6 Bemerkung. *Seien $f \in B^+$, C eine reelle Zahl und $a \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $f(a) > C$. Dann gilt*

$$f(x) > C \quad \textit{in einer vollen Umgebung von } a.$$

2.7 Hilfssatz. *Sei*

$$f_1 \le f_2 \le f_3 \le \cdots$$

eine monotone Folge aus B^+. Dann gilt

a) $$f = \mathrm{Sup}\, f_\nu \in B^+,$$

b) $$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \mathrm{Sup} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\,dx.$$

2.8 Hilfssatz. *Seien $f, g \in B^+$ und a, b nicht negative Zahlen, $a \ge 0$, $b \ge 0$. Dann gilt $af + bg \in B^+$ und*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (af(x) + bg(x))\,dx = a \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + b \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

3. Der Daniell-Lebesgue-Prozess, 2. Teil

3.1 Definition. *Das äußere Integral (oder Oberintegral) einer Funktion*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

wird durch die Formel

$$\overline{\int} f(x)\,dx = \mathrm{Inf}_g \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \right\}$$

definiert, wobei $g : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *alle Funktionen der Klasse* B^+ *mit der Eigenschaft*

$$g(x) \geq f(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

durchläuft.

3.2 Hilfssatz. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \infty \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

gehört der Klasse B^+ *an.*

3.3 Hilfssatz. *Es seien zwei Funktionen*

$$f, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \textit{ mit } f \leq h$$

gegeben. Dann gilt für das äußere Integral

$$\overline{\int} f(x)\,dx \leq \overline{\int} h(x)\,dx.$$

3.4 Hilfssatz. *Für jede Funktion* $f \in B^+$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx = -\overline{\int} (-f(x))\,dx.$$

3.5 Bezeichnung (Inneres Integral oder Unterintegral).

$$\underline{\int} f(x)\,dx := -\overline{\int}(-f(x))\,dx.$$

3.6 Hilfssatz. *Für jede Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *gilt*

$$\underline{\int} f(x)\,dx \leq \overline{\int} f(x)\,dx.$$

3.7 Definition. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *heißt integrierbar**), *wenn*

$$\overline{\int} f(x)\,dx = \underline{\int} f(x)\,dx$$

gilt und wenn dieser Wert endlich ist (also $\neq \infty, -\infty$*).*

3.8 Bemerkung. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *zwei Funktionen* g, h *der Baireschen Klasse mit folgenden beiden Eigenschaften gibt:*

a) $g(x) \geq f(x), \quad h(x) \geq -f(x),$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (g+h)\,dx < \varepsilon.$

3.9 Satz. *Sei* f *eine integrierbare Funktion. Dann sind auch die Funktionen* f^+, *und* f^- *integrierbar.*

---

*) im Sinne von Lebesgue

4. Die integrierbaren Funktionen

4.1 Satz. *Die integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{L}^1$ bilden einen Vektorraum und das Integral ist ein lineares Funktional, d. h. also:*

$$f, g \in \mathcal{L}^1 \Longrightarrow f + g \in \mathcal{L}^1 \text{ und } cf \in \mathcal{L}^1 \text{ für } c \in \mathbb{R},$$

außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) + g(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} cf(x)\, dx = c \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

4.2 Hilfssatz. *Es seien*

$$f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

drei Funktionen mit der Eigenschaft

$$f(x) + g(x) = h(x),$$

falls die Summe $f(x) + g(x)$ wohldefiniert ist. (Wenn also $f(x) = \infty$, $g(x) = -\infty$ oder $f(x) = -\infty$, $g(x) = \infty$ gilt, so wird nichts gefordert, denn dann ist die Summe $f(x) + g(x)$ nicht definiert. Es ist dann gleichgültig, was $h(x)$ für einen Wert annimmt.)

Dann gilt

$$\bar{\int} f(x)\, dx + \bar{\int} g(x)\, dx \geq \bar{\int} h(x)\, dx,$$

falls die Summe auf der linken Seite definiert ist. Für das Unterintegral gilt eine entsprechende Ungleichung in der anderen Richtung.

4.3 Satz. *Ist $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion, so ist auch ihr Betrag $|f|$ integrierbar. Ist $g : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ eine weitere integrierbare Funktion, so sind auch die Maxima und Minima $f \vee g$ und $f \wedge g$ integrierbar.*

4.4 Theorem (Beppo Levi). *Gegeben sei eine monoton wachsende Folge*

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$$

von integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. *Die Folge der Integrale*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\,dx$$

sei beschränkt. Die durch

$$f(x) = \sup_{\nu\in\mathbb{N}} f_\nu(x)$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *ist integrierbar und es gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_\nu(x)\,dx.$$

4.5 Theorem (Lebesgue'scher Grenzwertsatz). *Gegeben sei eine Folge*

$$f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

von integrierbaren Funktionen, die ***punktweise*** *gegen eine Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvergiert.*

Es existiere eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

a) $|f_k| \leq h \quad \textit{für } k = 1, 2, 3, \cdots$

b) $\overline{\int} h(x)\,dx < \infty.$

Dann ist auch f *integrierbar und es gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx.$$

5. Integrierbarkeitskriterien

5.1 Satz. *Die charakteristische Funktion*

$$\chi_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ gehört der Klasse B^+ an.

5.2 Satz. *Jede stetige und beschränkte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem offenen und beschränkten Teil $D \subset \mathbb{R}^n$ ist integrierbar.*

5.3 Folgerung.
a) *Jede beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist endlich meßbar.*
b) *Jede kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist endlich meßbar.*

5.4 Satz. *Eine Funktion*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c$ mit

$$\bar{\int} |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon$$

gibt.

6. Nullmengen

6.1 Definition.
a) *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt Nullfunktion, wenn*

$$\bar{\int} |f(x)| \, dx = 0$$

gilt.

b) *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge, wenn die charakteristische Funktion χ_A*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

eine Nullfunktion ist.

6.2 Satz. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *ist dann und nur dann Nullfunktion, wenn die Menge* $\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \neq 0\}$ *eine Nullmenge ist.*

6.3 Bemerkung. *Wenn eine Funktion* f *integrierbar ist, dann ist die Menge der Punkte*

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = \infty \ \textit{oder}\ = -\infty\}$$

eine Nullmenge.

6.4 Satz. *Sei* f *eine integrierbare Funktion und* g *eine Funktion, welche nur auf einer Nullmenge von* f *verschieden ist. Dann ist auch* g *integrierbar und die Integrale von* f *und* g *stimmen überein.*

6.5 Folgerung. *Man darf eine integrierbare Funktion in ihren Unendlichkeitsstellen beliebig abändern—etwa zu 0, ohne ihre Integrierbarkeit zu verlieren und den Wert des Integrals zu verändern.*

6.6 Satz. a) *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.*
b) *Jeder Punkt ist eine Nullmenge.*
c) *Sind* $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *Nullmengen, so ist auch* $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ *eine Nullmenge.*

7. Ausblicke auf die allgemeine Integrationstheorie

8. Der Satz von Fubini

8.1 Theorem (Fubini). *Gegeben sei eine integrierbare Funktion*

$$f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y).$$

Dann sind die beiden Funktionen

$$x \mapsto \overline{\int} f(x, y)\, dy, \quad y \mapsto \overline{\int} f(x, y)\, dx$$

ebenfalls integrierbar (im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$) und es gilt die Formel

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)\,dz &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\int} f(x,y)\,dy\;\;dx\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \overline{\int} f(x,y)\,dx\;\;dy.\end{aligned}$$

Dieselbe Formel bleibt richtig, wenn man das äußere Integral durch das innere ersetzt.

8.2 Satz. *Sei*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \geq 0,$$

eine integrierbare Funktion, die keine negativen Werte annimmt.

Sei

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\quad 0 \leq y \leq f(x)\}\,.$$

Dann ist M endlich meßbar und es gilt

$$\operatorname{vol}(M) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

9. Die Transformationsformel

9.1 Theorem. *Es sei $u : A \to B$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ist $f : B \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so gilt*

$$\int\limits_B f(y)\,dy = \int\limits_A f(u(x))\,|j(u,x)|\,dx.$$

10. Meßbarkeit

10.1 Definition. *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt meßbar, falls die Funktionen $f_k,\ k = 1, 2, \ldots$, alle integrierbar sind.*

10.2 Bemerkung. *Jede integrierbare Funktion ist meßbar.*

10.3 Bemerkung. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion. Es existiere eine integrierbare Funktion h mit der Eigenschaft*

$$|f(x)| \leq |h(x)| \quad \text{für alle } x.$$

Dann ist auch f integrierbar.

10.4 Satz.
1) *Summe und Produkt von meßbaren Funktionen sind meßbar, konstante Funktionen sind meßbar.*
2) *Seien f, g meßbare Funktionen. Dann sind auch $f \wedge g,\ f \vee g$, insbesondere $|f|$ meßbar.*
3) *Sei f_n eine punktweise konvergente Folge meßbarer Funktionen. Dann ist auch ihr Grenzwert meßbar.*
4) *Man darf eine meßbare Funktion auf einer Nullmenge abändern, ohne ihre Meßbarkeit zu verlieren.*

10.5 Ergänzung zum Satz von Fubini. *Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, so daß*

$$\bar{\int} \bar{\int} |f(x, y)|\, dy\ dx$$

endlich ist. Dann ist f integrierbar und es gilt folgedessen der Satz von Fubini 8.1.

10.6 Satz. *Die Räume $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ sind für $p > 0$* ***Banachräume****. Der Unterraum der Funktionen $[f],\ f \in C_c(X)$, ist dicht in $L^p(X)$.*

10.7 Satz. *Der Raum $L^2(X)$ ist ein* ***Hilbertraum*** *(wenn er mit obigem Skalarprodukt versehen wird).*

Teil III

Analysis auf Mannigfaltigkeiten

VIII. Flächenintegrale

1. Bogenlänge

1.1 Definition. *Die Kurve α heißt glatt, falls ihre Ableitung $\dot{\alpha}$ existiert und stetig ist.*

1.2 Definition. *Sei*

$$\alpha : I \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$$

eine glatte Kurve und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Wir definieren

$$l_f(\alpha) = \int\limits_a^b f(\alpha(t))\, \|\dot{\alpha}(t)\|\, dt,$$

falls das Integral absolut konvergiert.

1.3 Bemerkung. *Seien a, b zwei Punkte im $\mathbb{R}^n$. Die Länge der Verbindungsstrecke*

$$\alpha(t) = a + t(b - a), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

ist gerade der Euklidische Abstand

$$l(\alpha) = \|b - a\|.$$

1.4 Bemerkung. *Sei*

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine glatte Kurve mit Anfang $a = \alpha(0)$ *und Ende* $b = \alpha(1)$. *Dann gilt*

$$l(\alpha) \geq \|b - a\|.$$

1.5 Folgerung. *Ist*

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m = 1$$

eine Partition des Einheitsintervalls, so gilt

$$l(\alpha) \geq \sum_{\nu=1}^{m} \|\alpha(a_\nu) - \alpha(a_{\nu-1})\|.$$

1.6 Bemerkung. *Sei*

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine glatte Kurve. Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert eine Partition*

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1$$

mit der Eigenschaft

$$l(\alpha) \leq \varepsilon + \sum_{\nu=1}^{m} \|\alpha(a_\nu) - \alpha(a_{\nu-1})\|$$

1.7 Definition. *Zwei Kurven*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

heißen ***schwach äquivalent****, falls es einen Diffeomorphismus*

$$\tau : I \longrightarrow J$$

mit der Eigenschaft

$$\alpha(t) = \beta(\tau(t)) \quad \textit{für } t \in I$$

gibt.

1.8 Zusatz. *Die beiden Kurven heißen* ***äquivalent****, wenn man zusätzlich*

$$\tau'(t) > 0 \quad \textit{für alle } t$$

erreichen kann.

1.9 Bemerkung. *Seien*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei schwach äquivalente Kurven. Dann stimmen die Bogenlängen überein.

1.10 Definition. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt* ***zusammenhängende eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit****, falls es eine topologische Abbildung*

$$\alpha : (0,1) \xrightarrow{\sim} X$$

gibt, welche regulär ist.

1.11 Satz. *Zwei reguläre Parametrisierungen*

$$\alpha, \beta : (0,1) \longrightarrow X$$

ein und derselben eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit sind schwach äquivalent, die Abbildung

$$\tau = \beta^{-1} \circ \alpha : (0,1) \longrightarrow (0,1)$$

ist also ein Diffeomorphismus.

1.12 Folgerung. *Die Länge*

$$l(X) = l(\alpha)$$

einer eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

1.13 Hilfssatz. *Sei*

$$\alpha : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine reguläre Kurve und $a \in (0,1)$ ein fest gewählter Punkt. Es existiert eine offene Umgebung U des Punktes $(a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

von U auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(t, 0, \dots, 0) = \alpha(t) \ \textit{für} \ (t, 0, \dots, 0) \in U.$$

Zusatz. *Wenn α überdies eine topologische Abbildung von $(0,1)$ auf sein Bild $X = \alpha((0,1))$ definiert, so kann man U so wählen, daß gilt:*

$$\varphi^{-1}(V \cap X) = \left\{\, x \in V, \quad x_2 = \cdots = x_n = 0 \,\right\}$$

1.14 Bemerkung. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $\alpha : (0,1) \to X$ eine bijektive und reguläre Abbildung. Folgende beiden Aussagen sind äquivalent:*

1) *α ist topologisch.*
2) *X ist lokal abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$.*

1.15 Hilfssatz. *Seien X, Y metrische Räume und $U \subset X$, $V \subset Y$ Teilmengen mit kompakten Abschlüssen $\bar{U}$, $\bar{V}$. Die Menge U sei offen in X. Gegeben sei eine stetige und bijektive Abbildung $\alpha : U \to V$, welche sich zu einer stetigen Abbildung $\bar{\alpha} : \bar{U} \to \bar{V}$ fortsetzen läßt. Es gelte $\bar{\alpha}(\bar{U} - U) \subset \bar{V} - V$. Dann ist α topologisch.*

1.16 Hilfssatz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn das Integral*

$$\int_0^1 f(\alpha(t))\, \|\dot{\alpha}(t)\|\; dt$$

für eine reguläre Parametrisierung $\alpha : (0,1) \longrightarrow X$ existiert (im Sinne der absoluten Konvergenz), so existiert es auch für jede andere reguläre Parametrisierung und der Wert hängt von der Wahl der Parametrisierung nicht ab.

2. Oberflächenintegrale

2.1 Definition. *Eine Abbildung*

$$\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad V \subset \mathbb{R}^d \text{ offen},$$

heißt ***regulär****, falls sie stetig differenzierbar ist und falls der Rang der Jacobimatrix $J(\alpha; a)$ in jedem Punkt $a \in V$ den Rang d hat.*

2.2 Hilfssatz. *Sei*

$$\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad V \subset \mathbb{R}^d \text{ offen},$$

eine reguläre Abbildung und $a \in V$ ein Punkt. Es existiert eine offene Umgebung $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ von $(a,0)$ und ein Diffeomorphismus

$$\varphi : \tilde{V} \xrightarrow{\sim} \tilde{U}, \quad \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

so daß

$$\varphi(x,0) = \alpha(x) \quad \textit{für } (x,0) \in \tilde{V}$$

gilt.

Zusatz. *Wenn α eine topologische Abbildung auf sein Bild X definiert, kann man zusätzlich erreichen:*

$$\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap X) = \left\{ x \in \tilde{V}; \quad x_{d+1} = \dots = x_n = 0 \right\}.$$

2.3 Definition. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt d-dimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit, falls es einen offenen Teil $V \subset \mathbb{R}^d$, d geeignet, und eine topologische und reguläre Abbildung*

$$\alpha : V \longrightarrow X$$

gibt.

2.4 Hilfssatz. *Seien*

$$\begin{aligned} &\alpha : V \longrightarrow X, \quad V \subset \mathbb{R}^d \textit{ offen,} \\ &\beta : V' \longrightarrow X, \quad V' \subset \mathbb{R}^{d'} \textit{ offen,} \end{aligned}$$

zwei reguläre Parametrisierungen ein und derselben Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die Abbildungen $\beta^{-1} \circ \alpha$ und $\alpha^{-1} \circ \beta$ stetig differenzierbar.

2.5 Folgerung. *Wenn X nicht leer ist, gilt $d = d'$.*

2.6 Hilfssatz. *Sei $A = A^{(n,d)}$ Matrix vom Rang d. Dann ist die Matrix*

$$S = A'A$$

positiv definit. Insbesondere ist ihre Determinante positiv.

2.7 Hilfssatz. *Seien*

$$\alpha : V_\alpha \longrightarrow X, \quad \beta : V_\beta \longrightarrow X$$

zwei reguläre Parametrisierungen einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit X und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_{V_\alpha} f(\alpha(x)) \sqrt{\det g_\alpha(x)}\, dx = \int_{V_\beta} f(\beta(x)) \sqrt{\det g_\beta(x)}\, dx,$$

sofern eins der beiden Integrale existiert.

2.8 Definition. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt eingebettete (differenzierbare) d-dimensionale Mannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung $a \in U \subset X$ gibt, so daß $U \cap X$ eine d-dimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit ist.*

2.9 Satz. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus*

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

auf einen anderen offenen Teil $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß das Bild $\varphi(X \cap U)$ in V gleich dem Durchschnitt von V mit einem d-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

3. Zerlegung der Eins

3.1 Problem. *Existiert eine lineare Abbildung*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$I|C_c(U_i) = I_i \quad \text{für } i \in I$$

und ist diese eindeutig bestimmt?

3.2 Definition. *Eine* ***Zerlegung der Eins*** *auf dem Kompaktum $K \subset X$ in Bezug auf die Überdeckung*

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m, \quad U_i \subset X \text{ offen},$$

ist ein m-Tupel von Funktionen $f_i \in C_c(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $0 \leq f_i \leq 1 \quad (1 \leq i \leq m)$,
2) *Träger*$(f_i) \subset U_i$,
3) $f_1(x) + \cdots + f_m(x) = 1 \quad$ *für alle* $x \in K$.

3.3 Definition. *Der Raum X gestattet Zerlegung der Eins, falls zu jedem Kompaktum $K \subset X$ und zu jeder offenen Überdeckung*

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m$$

eine Zerlegung der Eins existiert.

3.4 Hilfssatz. *Sei X ein Raum, welcher Zerlegung der Eins gestattet. Außerdem sei eine offene Überdeckung*

$$X = \bigcup_{i \in A} U_i$$

und für jedes $i \in A$ eine lineare Abbildung

$$I_i : C_c(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Für je zwei Indizes i, j gelte

$$I_i(f) = I_j(f), \quad \textit{falls } f \in C_c(U_i \cap U_j).$$

Dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$I(f) = I_i(f), \quad \textit{falls } f \in C_c(U_i).$$

3.5 Definition. *Ein Raum X heißt topologische Mannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung $U(a)$ gibt, welche zu einem offenen Teil eines $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.*

3.6 Hilfssatz. *Es existiert eine stetige monoton fallende Funktion*

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

1) $$h(t) = 0 \quad \textit{für } t \geq 3/2,$$
2) $$h(t) = 1 \quad \textit{für } t \leq 1/2.$$

3.7 Hilfssatz. *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Der Träger von f sei in der Nichtnullstellenmenge von g enthalten. Dann ist die Funktion*

$$h(x) = \begin{cases} f(x)/g(x), & \text{falls } g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

stetig auf ganz X.

3.8 Satz. *Topologische Mannigfaltigkeiten gestatten Zerlegung der Eins.*

3.9 Satz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit folgender Eigenschaft. Sei $f \in C_c(X)$ und φ eine Karte mit Träger$(f) \subset U_\varphi$. Dann gilt

$$I(f) = \int\limits_{V_\varphi} f(\varphi(x)) \sqrt{\det g_\varphi(x)}\, dx.$$

4. Radonmaße

4.1 Definition. *Ein Radonmaß auf X ist eine lineare Abbildung*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$I(f) \geq 0, \quad \text{falls } f \geq 0.$$

4.2 Bemerkung. *Jeder lokal kompakte Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist abzählbar im Unendlichen.*

4.3 Bemerkung.
1) *Der $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt und hat abzählbare Basis der Topologie.*
2) *Ist X ein lokal kompakter und im Unendlichen abzählbarer Raum, so hat auch jeder offene und jeder abgeschlossene Teilraum diese Eigenschaft.*

4.4 Generelle Voraussetzung. *Der Raum X ist lokal kompakt und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.*

4.5 Definition. *Eine Funktion*

$$f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

gehört der Baireschen Klasse an, falls es eine wachsende Folge

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots$$

von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und mit der Eigenschaft

$$f(x) = \sup f_k(x)$$

gibt.

4.6 Bemerkung. *Sei $f \in B$ aus der Baireschen Klasse. Die Definition*

$$I(f) = \mathrm{Sup}(I(f_k))$$

ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge f_k

$$f_k \uparrow f, \quad f_k \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

4.7 Bemerkung. *Zu jedem Kompaktum $K \subset X$ existiert eine Funktion $f \in C_c(X)$ mit der Eigenschaft*

1) $$0 \leq f \leq 1,$$
2) $$f(x) = 1 \quad \textit{für } x \in K.$$

4.8 Hilfssatz. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine nirgends negative stetige Funktion auf einem offenen Teil $U \subset X$. Dann ist die durch 0 auf ganz X fortgesetzte Funktion $\widetilde{f}$ in der Baireschen Klasse. Insbesondere liegt die charakteristische Funktion χ_U einer beliebigen offenen Teilmenge in der Baireschen Klasse.*

4.9 Definition. *Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt in bezug auf das Radonmaß I* ***zulässig****, falls sie sich in der Form*

$$f = g - h$$

mit zwei Baireschen Funktionen ohne Unendlichkeitsstellen und mit endlichen $I(g), I(h)$ schreiben läßt.

4.10 Bemerkung. *Die Definition*

$$I(f) = I(g) - I(h)$$

ist von der Wahl der Zerlegung unabhängig.

4.11 Satz. *Die Menge der zulässigen Funktionen ist ein Vektorraum von Funktionen, welche die Klasse der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger umfaßt. Die Zuordnung*

$$f \longmapsto I(f)$$

ist linear auf dem Vektorraum der zulässigen Funktionen und es gilt

$$f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0.$$

4.12 Hilfssatz. *Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist die Funktion*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in U, \\ 0 & \text{für } x \notin U \end{cases}$$

zulässig.

4.13 Definition. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt Nullmenge (in Bezug auf das vorgelegte Radonmaß I), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nirgends negative Bairesche Funktion f mit der Eigenschaft*

a) $\qquad f(x) \geq 1 \quad \text{für } x \in A,$

b) $\qquad I(f) < \varepsilon$

gibt.

4.14 Hilfssatz. *Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte zulässige Funktion. Sei $U_0 \subset U$ eine offene Teilmenge, so daß das Komplement $U - U_0$ eine Nullmenge ist. Dann ist auch die Einschränkung f_0 von f auf U_0 zulässig und es gilt*

$$\int\limits_U f(x)\, d\mu = \int\limits_{U_0} f_0(x)\, d\mu.$$

4.15 Hilfssatz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit und $d\mu$ das durch 3.9 definierte Radonmaß. Jede eingebettete Mannigfaltigkeit $Y \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $< d$, welche in X enthalten ist, ist eine Nullmenge.*

5. Abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten

5.1 Definition. *Eine Karte φ auf einem (metrischen) Raum X ist eine topologische Abbildung*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi$$

eines offenen Teils $U_\varphi \subset X$ auf einen offenen Teil $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$.

5.2 Definition. *Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf einer topologischen Mannigfaltigkeit X ist eine Menge von Karten, so daß jeder Punkt aus X in mindestens einer Karte enthalten ist*

$$X = \bigcup U_\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{A}.$$

5.3 Definition. *Zwei Karten φ, ψ auf X heißen* ***differenzierbar verträglich****, falls die Kartentransformationsabbildung*

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

5.4 Definition. *Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf einer topologischen Mannigfaltigkeit X heißt differenzierbar, falls je zwei Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ differenzierbar verträglich sind.*

5.5 Definition. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein Paar $(X, \mathcal{A})$, bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit und einem differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}$.*

5.6 Definition. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Karte*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi \quad (U_\varphi \subset X, \quad V_\varphi \subset \mathbb{R}^d \text{ offen})$$

heißt regulär, falls die Umkehrung

$$\alpha = \varphi^{-1} : V_\varphi \xrightarrow{\sim} U_\psi$$

eine reguläre Parametrisierung von U_ψ ist.

5.7 Bemerkung. *Die Menge der regulären Karten einer eingebetteten differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$ bildet einen differenzierbaren Atlas.*

5.8 Definition. *Eine* ***Volumenform*** ω *auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* $(X, \mathcal{A})$ *ist eine Vorschrift, gemäß welcher jeder Karte* $\varphi \in \mathcal{A}$ *eine Funktion*

$$\omega_\varphi : V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R} \quad (V_\varphi \subset \mathbb{R}^n)$$

zugeordnet wird, so daß im Durchschnitt für je zwei Karten φ, ψ *folgende Umsetzungsformel gültig ist:*

Sei

$$a \in U_\varphi \cap U_\psi; \quad x = \varphi(a),\ y = \psi(a).$$

Dann gilt

$$\omega_\varphi(x) = \omega_\psi(y) \left|\det J(\psi^{-1} \circ \varphi; x)\right|.$$

5.9 Definition. *Sei* ω *eine Volumenform und* $a \in X$ *ein fester Punkt. Wir sagen*

1) ω *verschwindet in* a,
2) ω *ist nicht negativ in* a,
3) ω *ist positiv in* a,

falls eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ *mit* $a \in U_\varphi$ *existiert, so daß entsprechend*

$$\omega_\varphi(a) = 0, \quad \omega_\varphi(a) \geq 0, \quad \omega_\varphi(a) > 0$$

gilt.

5.10 Bemerkung. *Die in 5.9 formulierten Bedingungen 1) – 3) hängen von der Wahl der Karte* φ *nicht ab.*

5.11 Bemerkung. *Es gibt eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung von dem Vektorraum aller Volumenformen mit kompaktem Träger in den Körper der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto \mathcal{I}(\omega)$$

mit folgender Eigenschaft

Ist der Träger von ω *im Definitionsbereich* U_φ *der Karte* $\varphi \in \mathcal{A}$ *enthalten, so gilt*

$$\mathcal{I}(\omega) = \int_{V_\varphi} \omega_\varphi(x)\, dx.$$

5.12 Bemerkung. *Sei ω eine positive Volumenform auf X. Dann existiert zu jeder anderen Volumenform ω' eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$\omega' = f\omega.$$

5.13 Annahme. *Auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist eine positive Volumenform ω ausgezeichnet.*

5.14 Bemerkung. *Sei ω eine positive Volumenform. Dann wird durch*

$$I(f) := \mathcal{I}(f\omega)$$

ein Radonsches Maß auf X definiert.

5.15 Definition. *Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche abzählbar im Unendlichen ist und sei ω eine ausgezeichnete positive Volumenform auf X. Das Volumen von X in bezug auf ω ist das Integral der Funktion „identisch 1" bezüglich des in 5.14 definierten Radonmaßes.*

5.16 Definition. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit ausgezeichneter positiver Volumenform ω_0 und*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) = \mathcal{I}(f\omega_0),$$

das assoziierte Radonsche Maß. Eine Volumenform $\omega = f\omega_0$ heißt zulässig, falls die Funktion f zulässig in Bezug auf das Radonsche Maß I ist. Für zulässige Volumenformen ist

$$\mathcal{I}(\omega) = I(f)$$

definiert.

5.17 Bemerkung. *Der Begriff der zulässigen Volumenform ω hängt nicht von der Wahl von einer positiven Volumenform ω_0 ab.*

1. Zusatz. *Der Wert von $\mathcal{I}(\omega)$ hängt nicht von der Wahl der positiven Volumenform ω_0 ab.*

2. Zusatz. *Der Begriff der Nullmenge hängt nicht von der Wahl von ω_0 ab.*

Kapitel IX. Integration von Vektorfeldern

1. Kurvenintegral längs Vektorfeldern

1.1 Definition. *Ein Vektorfeld auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung*

$$A : D \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

1.2 Definition. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und*

$$\alpha : I \longrightarrow D \quad (I \text{ Intervall})$$

eine in D verlaufende glatte Kurve. Außerdem sei

$$A : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld. Das Integral von A längs α ist durch

$$\int\limits_\alpha A := \int\limits_I \langle A(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \, dt$$

definiert, sofern es absolut konvergiert.

1.3 Bemerkung. *Die beiden Kurven*

$$\alpha, \beta : I \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$$

seien äquivalent (VIII.1.8). Dann gilt für jedes stetige Vektorfeld A auf D

$$\int\limits_\alpha A = \int\limits_\beta A.$$

Vorsicht. *Die Bemerkung gilt nicht bei schwacher Äquivalenz! Wenn die Kurven α und β nur schwach äquivalent aber nicht äquivalent sind, so ändert das Integral sein Vorzeichen!*

1.4 Bemerkung. *Sei X eine zusammenhängende eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit. Die Menge $\mathcal{P}$ aller regulären Parametrisierungen zerfällt in genau zwei Äquivalenzklassen orientierungsgleicher Parametrisierungen*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \quad \textit{(disjunkte Vereinigung).}$$

1.5 Definition. *Eine Orientierung $\mathcal{O}$ einer zusammenhängenden eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Auszeichnung einer der beiden Klassen orientierungsgleicher Parametrisierungen (also $\mathcal{O} = \mathcal{P}_1$ oder $\mathcal{O} = \mathcal{P}_2$).*

1.6 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{O})$ eine zusammenhängende parametrisierbare eindimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und sei*

$$A : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld. Das Integral

$$\int_X A := \int_\alpha A, \quad \alpha \in \mathcal{O},$$

ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung α aus der gegebenen Orientierung $\mathcal{O}$.

1.7 Bemerkung. *Sei $A = (A_1, A_2)$ ein ebener Vektor (d. h. Element des $\mathbb{R}^2$). Der Vektor*

$$A^\perp = (-A_2, A_1)$$

steht auf A senkrecht und hat dieselbe Länge (Euklidische Norm).

2. Tangenten und Normalen

2.1 Bemerkung. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension $d \leq n$. Sei $a \in X$ ein fester Punkt und*

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & V & \longrightarrow & U \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 & \longmapsto & a \end{array} \qquad (V \subset \mathbb{R}^d \textit{ offen})$$

eine reguläre Parametrisierung einer offenen Umgebung U von a. Die „Jacobiabbildung“

$$J(\alpha; 0) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist eine injektive lineare Abbildung. Ihr Bild

$$T_a X := J(\alpha; 0)(\mathbb{R}^d)$$

ist ein d-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Dieser Unterraum hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung α ab.

2.2 Definition. *Man nennt den Untervektorraum $T_a X$ den **Tangentialraum** von X im Punkte a.*

2.3 Definition. *Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und seien*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad \psi : U_\psi \longrightarrow U_\psi$$

*zwei Karten aus dem Atlas $\mathcal{A}$. Man nennt φ und ψ **orientierungsverträglich**, falls die Funktionaldeterminante der Kartentransformationsabbildung*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : V'_\varphi \longrightarrow V'_\psi \quad \bigl(V'_\varphi = \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)\bigr)$$

in allen Punkten positiv ist

$$\det J(\psi \circ \varphi^{-1}; x) > 0 \quad \textit{für alle } x \in V'_\varphi.$$

2.4 Definition. *Ein (differenzierbarer) Atlas heißt orientiert, falls je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ orientierungsverträglich sind.*

Zusatz. *Eine **orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit** $(X, \mathcal{A})$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Atlas orientiert ist.*

2.5 Satz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Hyperfläche und $\mathcal{O}$ ein orientierter Atlas von (differenzierbaren) Karten auf X. Es existiert zu jedem Punkt $a \in X$ ein und nur ein Normalenvektor $\mathfrak{n}(a) \in 0_a(X)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

1) $\|\mathfrak{n}(a)\| = 1$.
2) *Ist $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi, \quad a \mapsto 0$ eine Karte aus $\mathcal{O}$ um a, so gilt*

$$\det(E_1, \cdots, E_{n-1}, \mathfrak{n}(a)) > 0, \quad \textit{mit } E_j = J(\varphi^{-1}; 0) e_j, \quad (1 \le j \le n-1).$$

2.6 Bemerkung. *Jede Volumenform auf $(X, \mathcal{A})$ läßt sich zu einer Volumenform auf $(X, \mathcal{A}_{\max})$ ausdehnen. Die ausgedehnte Form ist genau dann positiv, wenn die ursprüngliche es war. Die zugeordneten Radonmaße für die gegebene Form und ihre Ausdehnung sind dieselben.*

2.7 Definition. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{A})$ heißt orientierbar, falls es einen Teilatlas $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}_{\max}$ gibt (also eine Teilmenge von Karten, deren Definitionsbereiche ganz X überdecken), so daß $(X, \mathcal{O})$ eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.*

2.8 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wenn $(X, \mathcal{A})$ überhaupt orientierbar ist, existieren genau zwei Klassen von im wesentlich gleichen Orientierungen.*

3. Randmannigfaltigkeiten

3.1 Definition. *Sei (X, A) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt **glatt** in einem Punkt $a \in Y$, falls eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi$$

existiert, so daß $\varphi(U_\alpha \cap Y) \subset \mathbb{R}^n$ glatt in $\varphi(a)$ ist.

3.2 Bemerkung. *Die in 3.1 formulierte Bedingung hängt nicht von der Wahl der Karte φ ab.*

3.3 Bemerkung. *Sei $Y \subset (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $a \in Y$ ein Punkt. Genau dann ist Y glatt im Punkte a, wenn es eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi,$$

im maximalen Atlas gibt, so daß folgende Bedingung erfüllt ist:
Es existiert ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(U_\varphi \cap X) = V \cap V_\varphi.$$

Mit anderen Worten:
Y ist (in der Nähe von a) nach Wahl einer geeigneten Karte im maximalen Atlas platt gebügelt.

3.4 Satz. *Sei $Y \subset (X, \mathcal{A})$ ein glatter Teil einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Menge aller Einschränkungen φ' von Karten $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$*

$$\begin{gathered}\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi,\\ \varphi(U_\varphi \cap Y) = \{x \in V_\varphi; \quad x_{d+1} = \cdots = x_n = 0\},\end{gathered}$$

ist ein differenzierbarer Atlas $\mathcal{A}' := \mathcal{A}|Y$ auf Y.

3.5 Satz. *Seien $X = (X, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subset X$ ein offener Teil von X und $a \in \partial U$ ein Randpunkt. Man nennt a einen glatten Randpunkt von U, falls es eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}_{max}$*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi$$

mit folgenden Eigenschaften gibt

1) $$\varphi(U_\varphi \cap \partial U) = \{x \in V_\varphi; \quad x_n = 0\},$$

2) $$\varphi(U_\varphi \cap U) = \{x \in V_\varphi; \quad x_n > 0\}.$$

3.6 Satz. *Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subset X$ ein offener Teil. Die Menge $\mathcal{B}^+$ aller Einschränkungen von φ' von Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften 1) und 2) definieren einen* ***orientierten*** *Atlas auf der Menge S aller glatten Randpunkte. Insbesondere trägt S eine Struktur als orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

3.7 Hilfssatz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Teil und sei $S \subset \partial U$ die Menge der glatten Randpunkte von U. Die in 3.6 definierte Orientierung ist so beschaffen, daß für jeden Punkt $a \in S$ der normierte Vektor $\mathfrak{n}(a) \in \mathcal{O}_a(S)$ aus U herausweist.*

4. Der Gaußsche Integralsatz

4.1 Definition. *Sei $A = A^{(n,n-1)}$ eine Matrix mit n Zeilen und $n-1$ Spalten. Sei A_i $(1 \leq i \leq n)$ die Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile entsteht. Wir bezeichnen mit $\nu(A)$ den Spaltenvektor mit den Einträgen*

$$\nu(A)_i := (-1)^{n+1} \det(A_i).$$

4.2 Bemerkung. *Sei $A = A^{(n,n-1)}$ eine Matrix mit n Zeilen und $n-1$ Spalten. Für jeden Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\det((A,x)) = \langle \nu(A), x\rangle.$$

Insbesondere steht $\nu(A)$ auf den Spalten von A senkrecht.

4.3 Bemerkung. *Die Euklidische Länge von $\nu(A)$ ist*

$$||\nu(A)|| = \sqrt{\det(A'A)}.$$

4.4 Definition. *Sei $A = A^{(n,n-1)}$ eine Matrix mit n Zeilen und $n-1$ Spalten. Ihr Rang sei $n-1$. Man definiert*

$$\boldsymbol{n}(A) := \frac{\nu(A)}{||\nu(A)||}.$$

4.5 Bemerkung. *Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte Hyperfläche, $a \in X$ ein Punkt und φ eine Karte des orientierten Atlas, deren Definitionsbereich den Punkt a enthält. Dann kann der normierte Normalenvektor durch das verallgemeinerte Kreuzprodukt wie folgt berechnet werden:*

$$\boldsymbol{n}(a) = \boldsymbol{n}(J(\alpha; x)) \quad (\alpha = \varphi^{-1},\ x = \varphi(a)).$$

4.6 Definition.

$$\int\limits_X \langle A(x),\, d\boldsymbol{n}(x)\rangle = \int\limits_X \langle A(x), \boldsymbol{n}(x)\rangle\omega.$$

4.7 Bemerkung. *Sei X eine parametrisierbare Hyperfläche und $\alpha : U \to X$ eine (orientierungstreue) reguläre Parametrisierung von X, so gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_U \langle A(x), d\boldsymbol{n}(x)\rangle &= \int\limits_X \langle A(x), \boldsymbol{n}(x)\rangle \sqrt{\det(J(\alpha;x)'J(\alpha;x)}dx \\ &= \int\limits_U \det\bigl(J(\alpha;x), A(x)\bigr)dx,\end{aligned}$$

wobei wir in diesem Zusammenhang den Vektor $A(x)$ als Spaltenvektor schreiben.

4.8 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte nicht leere Teilmenge mit (überall) glattem Rand. Sei weiterhin $A : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $\widetilde{U}$, welche das Kompaktum $U \cup \partial U$ umfaßt. Dann gilt die Integralformel*

$$\int\limits_{\partial U} \langle A(x), d\,\boldsymbol{n}(x) \rangle = \int\limits_{U} \mathrm{div} A(x) dx,$$

wobei

$$\mathrm{div} A(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i}$$

die sogenannte ***Divergenz*** *des Feldes bezeichne.*

Kapitel X. Alternierende Differentialformen

1. Die Graßmannalgebra

1.1 Definition. *Eine graduierte Algebra V_* ist eine durch $\mathbb{Z}$ parametrisierte Schar von Vektorräumen*

$$(V_p)_{p\in\mathbb{Z}}$$

zusammen mit einer durch $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ parametrisierten Schar von bilinearen Abbildungen

$$V_p \times V_q \longrightarrow V_{p+q}.$$

1.2 Definition. *Eine graduierte Algebra heißt* ***assoziativ****, falls*

$$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$$

für $a\in V_p,\ b\in V_q,\ c\in V_r$ (p,q,r beliebig aus $\mathbb{Z}$) gilt.

1.3 Definition. *Eine graduierte Algebra heißt* ***schiefkommutativ****, falls*

$$a\wedge b = (-1)^{pq} b\wedge a$$

für $a\in V_p,\ b\in V_q$ gilt.

1.4 Definition. *Eine graduierte Algebra besitzt ein* ***Einselement****, falls ein Element*

$$1\in V_0 \text{ mit } 1\wedge a = a\wedge 1 \text{ für alle } a\in V_p \quad (p \text{ beliebig})$$

existiert.

1.5 Definition. *Sei V_* eine assoziative graduierte Algebra mit Einselement 1. Die Algebra wird von V_1 erzeugt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1) $V_p = 0, \quad p < 0.$
2) $V_0 = \mathbb{R} \cdot 1.$
3) *Im Falle $p > 0$ wird V_p als Vektorraum von den speziellen Elementen*
   $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p, \quad a_j \in V_1 \quad (1 \le j \le p)$
   erzeugt.

(Wegen der Assoziativität ist $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$ wohldefiniert).

1.6 Bemerkung. *Sei V_* eine assoziative und schiefkommutative Algebra mit Einselement, welche von V_1 erzeugt wird. Sei $e_1, \cdots, e_n$ ein Erzeugendensystem von V_1 (z. B. eine Basis). Dann gilt*

1) *$V_p = 0$ für $p > n$.*
2) *Im Falle $p > 0$ wird V_p von den Elementen*

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n,$$

erzeugt.

1.7 Definition. *Eine graduierte Algebra V_* heißt eine **Graßmannalgebra**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind*

1) *V_* ist assoziativ, schiefkommutativ und besitzt ein Einselement 1.*
2) *$n = \dim V_p < \infty$.*
3) *$\dim V_p = \binom{n}{p}$.*

(Es gilt also insbesondere $V_p = 0$ für $p < 0$ und $p > n$).

1.8 Satz. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Es existiert eine Graßmannalgebra V_* mit der Eigenschaft*

$$V_1 = V.$$

1.9 Definition. *Ein Homomorphismus*

$$\varphi_* : V_* \longrightarrow W_*$$

von graduierten Algebren mit Einselement ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$\varphi_p : V_p \longrightarrow W_p, \quad p \in \mathbb{Z},$$

mit den Eigenschaften

1) *$\varphi_0(1) = 1$,*
2) *$\varphi_p(a) \wedge \varphi_q(b) = \varphi_{p+q}(a \wedge b)$ für $a \in V_p,\ b \in V_q$.*

1.10 Satz. *Sei*

$$l : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen. Seien V_*, W_* *Graßmannalgebren über* V, W*. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus*

$$l_* : V_* \longrightarrow W_*$$

von Graßmannalgebren mit der Eigenschaft

$$l = l_1.$$

1.11 Satz. *Es gilt*

$$l^{[n]}(a) = \det(l) \cdot a \quad \text{für } a \in V^{[n]}.$$

2. Alternierende Differentialformen, lokale Theorie

2.1 Definition. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *ein offener Teil. Eine* ***alternierende Differentialform*** *vom Grade* p *ist eine Abbildung*

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^p \mathbb{R}^n.$$

3. Die äußere Ableitung

3.1 Bezeichnung. *Mit*

$$M^p(U), \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

wird die Menge aller alternierenden Differentialformen vom Grade p *bezeichnet und mit*

$$A^p(U)$$

die Teilmenge aller differenzierbaren Formen.

3.2 Definition. *Das* ***totale Differential*** *einer C^∞ Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist*

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n.$$

3.3 Definition. *Man definiert die Abbildung*

$$d : A^p(U) \longrightarrow A^{p+1}(U)$$

durch

$$d\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} f_{i_1\cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) =$$
$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} \big(df_{i_1\cdots i_p}\big) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

3.4 Hilfssatz. *Es gilt*

$$d \circ d = 0$$

(genauer müßte man

$$d_{p-1} \circ d_p = 0$$

schreiben).

4. Transformation (Rücktransport) von Differentialformen

4.1 Satz. *Sei*

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen }, V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen},$$

eine differenzierbare Abbildung. Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung, welche jeder p-Form ω auf V eine p-Form $\varphi^*\omega$ auf U zuordnet, so daß folgende Rechenregeln erfüllt sind

1) *Sei f eine 0-Form, also eine Funktion, dann ist*

$$\varphi^* f = f \circ \varphi.$$

2) *Sei ω eine p-Form und ω' eine q-Form auf V. Dann gilt*

$$\varphi'(\omega \wedge \omega') = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\omega').$$

3) *Sei ω differenzierbar. Dann ist auch $\varphi^*\omega$ differenzierbar und es gilt*

$$d(\varphi^*) = \varphi^*(\,d\omega).$$

Wir erhalten also insbesondere Abbildungen

$$A^p(V) \longrightarrow A^p(U).$$

4.2 Satz. *Der Rücktransport ist „funktoriell“, d. h. sind*

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \quad (U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m,\ W \subset \mathbb{R}^p \text{ offene Teile})$$

differenzierbare Abbildungen, so gilt

$$\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^*$$

(genauer

$$\varphi^*\left(\psi^*(\omega)\right) = (\psi \circ \varphi)^*(\omega)$$

für eine p-Form ω auf W).

4.3 Satz. *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega = f\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ eine alternierende Differentialform vom Grade n. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere offene Menge und $\varphi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung, so gilt*

$$\varphi^*(f\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = g\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

mit

$$g(x) = f(\varphi(x)) \cdot \det J(\varphi; x).$$

4.4 Definition. *Eine n-Form $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ auf einem offenen Teil des $\mathbb{R}^n$ heißt integrierbar, falls f (im Lebesgueschen Sinne) integrierbar ist und man definiert*

$$\int\limits_U \omega := \int\limits_U f(x)\,dx.$$

4.5 Bemerkung. *Seien*

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad U, V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

ein orientierungstreuer Diffeomorphismus und ω eine integrierbare n-Form auf V. Dann ist auch $\varphi^*\omega$ integrierbar und es gilt

$$\int\limits_U \varphi^*\omega = \int\limits_V \omega.$$

5. Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

5.1 Definition. *Eine alternierende Differentialform vom Grad p (p-Form)*

$$\omega = (\omega_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{A}}$$

auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{A})$ ist eine Vorschrift, welche jeder Karte $\varphi : U_\varphi \to V\varphi$ ($U_\varphi \subset X$ offen, $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ offen) eine p-Form ω_φ auf V_φ zuordnet, so daß für je zwei Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ die Umsetzungsformel

$$\gamma^*\big(\omega_\psi \,|\, \psi(U_\psi \cap U_\varphi)\big) = \omega_\varphi \,|\, \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \qquad (\gamma = \psi \circ \varphi^{-1})$$

gültig ist.

5.2 Bemerkung. *Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*
1) *Seien ω, ω' zwei alternierende Differentialformen desselben Grades p. Dann werden durch*

$$(\omega + \omega')_\varphi := \omega_\varphi + \omega'_\varphi, \quad (C\omega)_\varphi := C(\omega_\varphi) \quad (C \in \mathbb{R})$$

ebenfalls p-Formen $\omega + \omega'$, $C\omega$ auf X definiert.
2) *Seien ω eine p-Form und ω' eine q-Form Dann wird durch*

$$(\omega \wedge \omega')_\varphi := \omega_\varphi \wedge \omega'_\varphi$$

eine $(p + q)$-Form $\omega \wedge \omega'$ auf X definiert.
3) *Sei ω eine differenzierbare p-Form. Dann wird durch*

$$(d\omega)_\varphi := d(\omega_\varphi)$$

eine (ebenfalls differenzierbare) $p + 1$-Form $d\omega$ auf X definiert.

5.3 Bemerkung. *Sei ω eine alternierende Differentialform auf $X = (X, \mathcal{A})$ und $U \subset X$ ein offener Teil von X. Wie versehen U mit der eingeschränkten differenzierbaren Struktur $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|U$. Ist φ eine Karte aus $\mathcal{A}$ so bezeichen wir die auf U eingeschränkte Karte mit φ_0. (Der Definitionsbereich von φ_0 ist $U \cap U_\varphi$, der Wertevorrat $\varphi(U \cap U_\varphi)$. Durch die Vorschrift*

$$(\omega|U)_{\varphi_0} := (\omega_\varphi)|\varphi(U \cap U_\varphi)$$

wird eine Differentialform $\omega|U$ auf $(U, \mathcal{A}_0)$ definiert.

5.4 Bemerkung. *Sei* $(X, \mathcal{A})$ *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und* $\mathcal{A}_{\max}$ *der zugehörige maximale Atlas. Zu jeder p-Form* ω *auf* $(X, \mathcal{A})$ *existiert eine eindeutig bestimmte Ausdehnung* $\widetilde{\omega}$ *auf* $(X, \mathcal{A}_{\max})$*, d.h.* $\widetilde{\omega}$ *ist eine p-Form auf* $(X, \mathcal{A}_{\max})$ *mit der Eigenschaft*

$$\widetilde{\omega}_\varphi = \omega_\varphi \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{A}.$$

Insbesondere sind die natürlichen Restriktionen

$$M^p(X, \mathcal{A}) \longrightarrow M^p(X, \mathcal{A}_{\max}), \quad A^p(X, \mathcal{A}) \longrightarrow A^p(X, \mathcal{A}_{\max}),$$

bijektiv.

5.5 Bemerkung. *Sei* $(X, \mathcal{A})$ *eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Topformen (alternierende Differentialformen vom Grad n) und Volumenformen sind dasselbe. Insbesondere ist der Begriff der zulässigen Topform* ω *sinnvoll, für solche ist das Integral*

$$\int_X \omega$$

definiert.

5.6 Bemerkung. *Sei* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine Funktion auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* $(X, \mathcal{A})$*. Ordnet man jeder Karte* $\varphi \in \mathcal{A}$ *die Funktion*

$$f_\varphi = f \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu, so erhält man eine 0*-Form* $(f_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$*. Diese Zuordnung definiert eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller Funktionen und der Menge der* 0*-Formen.*

6. Differenzierbare Abbildungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

6.1 Definition. *Eine stetige Abbildung* $f : X \to Y$ *zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ *heißt differenzierbar, falls die Abbildung*

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \varphi\big(f^{-1}(V_\psi) \cap U_\psi\big) \longrightarrow V_\varphi.$$

für je zwei Karten $\varphi \in \mathcal{A}$, $\psi \in \mathcal{B}$ *im üblichen Sinne der reelen Analysis (unendlich oft stetig) differenzierbar ist.*

6.2 Bemerkung. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ ist differenzierbar, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ Karten $\varphi \in \mathcal{A}$, $\psi \in \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft*

$$a \in U_\varphi, \quad f(a) \in U_\psi,$$

gibt, sodaß $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ differenzierbar ist.

6.3 Bemerkung. *Eine Abbildung*

$$f : U \longrightarrow V, \quad U \subset \mathbb{R}^n,\, V \subset \mathbb{R}^m \text{ beide offen,}$$

ist genau dann differenzierbar im Sinne der reellen Analysis, falls sie eine differenzierbare Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(U, \{\mathrm{id}_U\})$, $(V, \{\mathrm{id}_V\})$ (tautologische Atlanten) ist.

6.4 Bemerkung. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X = (X, \mathcal{A})$ ist genau dann eine differenzierbare Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{A})$ und $(\mathbb{R}, \{id_\mathbb{R}\})$, falls die zugeordnete 0-Form $f_\varphi = f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist.*

6.5 Bemerkung. *Die identische Selbstabbildung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist differenzierbar. Die Zusammensetzung $g \circ f$ zweier differenzierbarer Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten X, Y, Z ist differenzierbar.*

6.6 Definition. *Ein **Diffeomorphismus** $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine bijektive Abbildung, sodaß sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar sind.*

6.7 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Abbildung. Die identische Selbstabbildung von X definiert einen Diffeomorphismus*

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (X, \mathcal{A}_{\max})$$

.

6.8 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Abbildung und $\varphi : U \to V$ eine Abbildung eines offenen Teils $U \subset X$ in einen offenen Teil $V \subset \mathbb{R}^n$. Folgende beiden Aussagen sind äquivalent*

1) φ ist in $\mathcal{A}_{\max}$ enthalten.

2) φ ist definiert einen Diffeomorphismus differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

$$\varphi : (U, \mathcal{A}|U) \longrightarrow (V, \{\mathrm{id}_V\}).$$

6.9 Satz. *Es gibt eine Vorschrift, welche jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ Abbildungen*

$$f^* : M^p(Y) \longrightarrow M^p(X) \quad (p \in \mathbb{Z})$$

zuordnet, welche folgende Eigenschaften besitzt und durch diese eindeutig festgelegt ist:

1) *Sei $f : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, welche wir als differenzierbare Mannigfaltigkeiten (tautologische Struktur) auffassen. In diesem Falle stimmt der Rücktransport mit dem bereits definierten überein.*

2) *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Dann gilt*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \qquad \textit{(Natürlichkeit des Zurückziehens)} \qquad .$$

3) *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subset X$ eine offener Teil von X versehen mit der eingeschränkten differenzierbaren Struktur. Bezeichnet man mit $i : U \to X$ die natürliche Inklusion (diese ist differenzierbar), so gilt*

$$i^*(\omega) = \omega|U \quad \textit{für } \omega \in M^p(X).$$

Dabei sei $\omega|U$ die eingeschränkte Differentialform im Sinne von 5.3.

4) *Sei $\omega = (\omega_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$ eine Differentialform auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X = (X, \mathcal{A})$ und $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$ eine Karte aus $\mathcal{A}$. Wir fassen φ als Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(U, \mathcal{A}|U)$, $(V_\varphi, \{id_V\})$ auf. Es gilt*

$$\omega_\varphi = (\varphi^{-1})^*(\omega|U_\varphi).$$

6.10 Satz. *Sei $f : X \to Y$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus orientierter differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ω eine zulässige Topform auf Y. Dann ist auch $f^*(\omega)$ zulässig und es gilt*

$$\int_X f^*(\omega) = \int_Y \omega.$$

7. Der Satz von Stokes

7.1 Theorem (Satz von Stokes). *Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $U \subset X$ ein offener nicht leerer Teil mit glattem Rand ∂U. Der Rand ist selbst eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (s. IX.3.6). Wir nehmen an, daß der Abschluß von U (insbesondere auch ∂U) kompakt ist. Sei $\omega \in A^{n-1}(X)$ eine differenzierbare $(n-1)$-Form auf X. Dann gilt*

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

7.2 Theorem (Satz von Stokes, vearallgmeinerte Variante).
Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $U \subset X$ ein offener nicht leerer Teil. Sei Y der glatte Teil des Randes. Schließlich sei ω eine differenzierbare $(n-1)$-Form auf X.

Annahme. Die Menge

$$(U \cup Y) \cap \mathit{Träger}(\omega)$$

ist kompakt.

Dann gilt der Satz von Stokes

$$\int_U \partial d\omega = \int_Y \omega.$$