Kapitel I. Integrationstheorie

1. Radonmaße

Wir wollen die Integrationstheorie auf lokal kompakten Räumen mit abzählbarer Basis der Topologie entwickeln. Wenn wir von einem Raum X sprechen, so denken wir dabei an einen *toplogischen Huasdorffraum.* Leser, welche mit den Grundbegriffen der Topologie noch nicht vertraut sind, können statt dessen unter einem Raum einen *metrischen Raum* verstehen. Wir werden jedoch nicht mit der Metrik d selbst arbeiten sondern lediglich mit den abgeleiteten Begriffen wie „offene Menge“, „Umgebung“, „kompakt“ u.s.w. Wer auch den Begriff des topologischen Raumes nicht kennt, mag zur Not für X eine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ nehmen. Allerdings sollte er X mit der „relativen Toplogie“ versehen: Eine Teilmenge U von X heißt demnach offen (genauer: „offen in X“), wenn es eine im üblichen Sinne offene Teilmenge $\tilde{U}$ des $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$U = \tilde{U} \cap \mathbb{R}^n$$

gibt. Im selben Sinne ist der Begriffe der abgeschlossenen Teilmenge und der Umgebungsbegriff zu vestehen:

1.1 Definition. *Ein Raum X heißt* ***lokal kompakt****, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.* lK

Beispielsweise ist der $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt, da die abgeschlossenen Kugeln kompakt sind. Lokal kompakt sind auch offene Teile U von $\mathbb{R}^n$ und auch abgeschlossene Teile des $\mathbb{R}^n$. Allgemeiner sind Durchschnitte $X = U \cap A$ einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge lokal kompakt. Ein Beispiel eines nicht lokal kompakten Raumes ist $\mathbb{Q}$.

Unter dem Träger einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ versteht man den Abschluß der Nichtnullstellenmenge von f:

$$\text{Träger}(f) := \overline{\left\{\, x \in X; \quad f(x) \neq 0 \,\right\}}.$$

Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ist

$$\mathcal{C}_c(X) := \left\{\, f : X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ hat kompakten Träger.} \,\right\}.$$

Dies ist offenbar ein Vektorraum, d.h.

$$f, g \in \mathcal{C}_c(X),\ C \in \mathbb{R} \Longrightarrow f + g,\ Cf \in \mathcal{C}_c(X).$$

1.2 Definition. *Der Raum X gestattet monotone Approximation der Eins, wenn es eine monoton wachsende Folge $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ von nirgends negativen stetigen Funktionen mit kompaktem Träger gibt, welche punktweise gegen* 1 *konvergiert.* aBT

Wenn ein Raum monotone Approximation der Eins gestattet, so gilt auch:

1.3 Bemerkung. *Wenn ein Raum X monotone Approximation der Eins gestattet, so existiert zu jedem Kompaktum $K \subset X$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger f auf X, welche auf K identisch Eins ist.* ksK

Man kann erreichen, dass f nirgends negativ ist, denn man kann $f(x)$ durch $\max\{f(x), 0\}$ ersetzen. Wir setzen ab jetzt immer voraus, dass X lokal kompakt ist und monotone Approximation der Eins gestattet.

1.4 Definition. *Ein Radonmaß auf X ist eine Abbildung $I : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:* RM

1. *Sie ist linear, d.h. $I(f+g) = I(f) + I(g)$ und $I(Cf) = CI(f)$ ($C \in \mathbb{R}$).*
2. *Sie ist positiv, d.h. $f \geq 0 \Longrightarrow I(f) = 0$.*

Es gilt dann allgemeiner für $f, g \in \mathcal{C}_c(X)$:

$$f \leq g \Longrightarrow I(f) \leq I(g),$$

wie man leicht sieht, indem man $g - f$ betrachtet.

Wir kennen ein Beispiel für ein Radonmaß auf dem Raum $X = \mathbb{R}$, nämlich

$$I(f) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Dies ist kein richtiges uneigentliches Integral, da f kompakten Träger hat. Allgemeiner kann man auf $\mathbb{R}^n$ das iterierte n-fache Integral betrachten, z.B. $n = 2$:

$$I(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \right] dy.$$

Man muss sich dabie überlegen, dass die Stetigkeit bei der ersten Integration nicht verloren geht.

In Anlehnung an dieses Beispiel schreiben wir auch

$$I(f) = \int_X f(x)dx$$

für ein allgemeines Radonmaß.

Die Definition 1.4 ist sehr sparsam. Erstaunlicherweise folgt bereits automatisch die Stabilität gegenüber gleichmäßiger Konvergenz in folgendem Sinne:

1.5 Hilfssatz. *Sei (f_n) ein Folge aus $\mathcal{C}_c(X)$, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Es existiere ein Kompaktum $K \subset X$, so dass alle f_n außerhalb K verschwinden. Dann ist auch f stetig mit kompaktem Träger und es gilt* Sbg

$$I(f_n) \longrightarrow I(f) \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

Die Stetigkeit von f folgt aus dem bekannten Stabilitätssatz. Der Träger von f ist abgeschlossen und in K enthalten und somit selbst kompakt. Zum Beweis der Limesformel betrachten wir nun eine nirgends negative Funktion $g \in \mathcal{C}_c(X)$, welche auf K identisch Eins ist (1.3). Es gilt offenbar

$$-||f_n - f||g(x) \leq f_n(x) - f(x) \leq ||f_n - f||g(x).$$

Hierbei bezeichne $||\cdot||$ die Maximumnorm. Aus der Linearität und Positivität von I folgt

$$-||f_n - f||I(g) \leq I(f_n) - I(f) \leq ||f_n - f||I(g).$$

Da $I(g)$ von n gar nicht abhängt, folgt die Behauptung.

2. Die Bairesche Klasse

Wir wollen das „Integral“ I auf eine größere Klasse von Funktionen ausdehnen. Dies geschieht in dem sogenannten Daniell-Lebesgue-Prozess. Dieser besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil führt zur Baireschen Klasse.

Es hat sich im Zusammenhang mit der Integrationstheorie als nützliche erwiesen, die reelle Gerade durch zwei Elemente ∞ und $-\infty$ zu erweitern:

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Dabei sind ∞ und $-\infty$ zwei Symbole, deren Bezeichnung erst durch die Rechenregeln gerechtfertigt werden, denen wir sie per definitionem unterwerfen. „Symbol“ heißt hierbei lediglich, dass es sich um Elemente handelt, die nicht schon in $\mathbb{R}$ enthalten sind. Wir definieren nun auf $\bar{\mathbb{R}}$ eine Anordung $\leq$, indem wir zu der schon vorhandenen Anordnung der reellen Zahlen noch zwei Regeln hinzufügen, nämlich

$$-\infty \leq a \quad \text{und} \quad a \leq \infty \quad \text{für alle} \quad a \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Die Menge $\mathbb{R}$ hat also ein größtes und ein kleinstes Element. Man nennt $\bar{\mathbb{R}}$ auch die abgeschlossenen Zahlgerade. Der Vorteil dieser Erweiterung zeigt sich in:

Jede nicht leere Teilmenge $M \subset \bar{\mathbb{R}}$ hat eine kleinste obere Schranke $\mathrm{Sup}(M)$ *und eine größte untere Schranke* $\mathrm{Inf}(M)$*.*

Der Beweis ist einfach und kann übergangen werden. Ist M schon in $\mathbb{R}$ enthalten und nach oben beschränkt, so ist $\sup(M)$ das gewöhnliche Supremum $\sup(M)$. Ist jedoch M nicht nach oben beschränkt, so existiert $\sup(M)$ nicht aber es ist $\mathrm{Sup}(M) = \infty$.

Bis zu einem Umfang ist es auch möglich, die algebraischen Rechenregeln auf $\bar{\mathbb{R}}$ auszudehnen. Man definiert alle Ausdrücke $a + b$ und ab mit Ausnahme von $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$. Die Definitionen sind

$$a + \infty = \infty + a = \infty \quad (a \neq -\infty)$$
$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \quad (a \neq \infty)$$
$$a \cdot \infty = \infty \cdot a \quad \text{für} \quad a > 0$$

Im folgenden verwenden wir folgende Schreibweise: Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ und f eine weitere solche Funktion. Die Formel

$$f_n \uparrow f \qquad (n \to \infty)$$

bedeute zweierlei:

a) $f_1 \le f_2 \le f_3 \ldots$,
b) $f(x) = \mathrm{Sup}\{f_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$.

2.1 Definition. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **Bairesch**, falls es eine Folge (f_n) stetiger Funktionen mit kompaktem Träger gibt, so dass $f_n \uparrow f$.* BK

Natürlich sind die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $f : X \to \mathbb{R}$ (aufgefaßt als Funtionen nach $\mathbb{R}$) selbst Bairesch, da man $f, f, f, \ldots$ betrachten kann. Ebenfalls Bairesch ist die Funktion konstant 1, denn das bedeutet gerade, dass die Eins monoton approximierbar ist. Die Funktion konstant 1 hat natürlich nur dann kompakten Träger, wenn X selbst kompakt ist, was i.a. nicht der Fall ist (z.B. $X = \mathbb{R}^n$). Es ist wichtig, dass in der Baireschen Klasse auch viele unstetige Funktionen enthalten sein können. Beispielsweise werden wir spärer noch zeigen:

Die charakterstische Funktion einer beliebigen offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ liegt in $\mathcal{B}^+(\mathbb{R}^n)$.

Einfache Eigenschaften der Baireschen Klasse sind:

2.2 Bemerkung. *Seien f, g Bairsche Funktionen und $C > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann sind auch $f + g$ und Cf Bairesch und es gilt* Bst

$$\int_X (f(x) + g(x))dx = \int_X f(x)dx + \int_X g(x)dx, \quad \int_X (Cf(x))dx = C \int_X f(x)dx.$$

Wir weisen darauf hin, dass Bairesche Funktion zwar den Wert ∞ aber nicht $-\infty$ annehmen können, $f(x) + g(x)$ is also immer defniert. Der Beweis von 2.2 ist banal, denn beispielsweise gilt trivialerweise $Cf_n \uparrow Cf$, wenn $f_n \uparrow f$, sofern C positiv ist. Wenn C negative ist, so ist dies falsch, denn aus „monoton wachsend“ wird dann „monoton fallend“. In diesem Zusammnehang ist es sehr hilfreich, sich folgendes klarzumachen: Sie χ die charakeristische Funktion des offenen Einheitsintervalls in $\mathbb{R}$. Dann ist $\chi \in \mathcal{B}^+(\mathbb{R})$ aber $-\chi \notin \mathcal{B}^+(\mathbb{R})$.

Eine wichtige Eigenschaft der Baireschen Klasse ist, dass sie stabil gegenüber monotoner Approximation ist:

2.3 Satz. *Sei (f_n) eine monoton wachsende Folge Bairescher Funktionen. Dann ist auch* Bsk

$$f(x) := \operatorname{Sup}\{f_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$$

Bairesch und es gilt

$$\int_X f(x)dx = \operatorname{Sup}\left\{\int_X f_n(x)dx;\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Beweis. Wir erinnern zunächst an eine Bezeichnung. Für zwei Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert man $f \wedge g$ durch $f \wedge g(x) = \min(f(x), g(x))$ und $f \vee g$ durch $f \vee g(x) = \max(f(x), g(x))$. Offenbar gilt

$$f, g \in \mathcal{C}_c(X) \Longrightarrow f \wedge g,\ f \vee g \in \mathcal{C}_c(X).$$

Für den Beweis von 2.3 betrachten wir nun für jedes feste k eine monotone Approximation durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger,

$$f_{nk} \uparrow f_k \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Man bilde dann die Funktionen

$$g_k := \bigwedge_{\mu+\nu \le k+1} f_{\mu\nu} \qquad (g_k(x) = \max\{f_{\mu\nu}(x);\ \mu + \nu \le k + 1\}).$$

Offenbar sind dies stetige Funktionen mit kompaktem Tra"ger, und es gilt $g_1 \le g_2 \le \ldots$. Daher existiert eine Bairesche Funktion g mit $k_k \uparrow g$. Wir behaupten $g = f$. Die Ungleichung $g \le f$ ist klar, da f alle auftretenden Funktionen dominiert. Außerdem gilt Das zu jedem (i, k) ein r mit $g_r \ge f_{ik}$ gibt, folgt $g \ge f_k$ für jedes k. Es folgt $g \ge f$. Damit ist $g = f$ gezeigt. Nach Definition des Baireschen Integrals gilt nun $I(g_r) \uparrow I(f)$. Aus der offensichtlichen Ungleichung $g_r \le f_r \le F$ folgt nun $I(f_r) \uparrow I(f)$. □

3. Das äußere Integral

Wir wissen, dass es eine Folge (f_n) stetiger Funktionen mit kompaktem Träger gibt, so dass $f_n \uparrow 1$ gilt. Es folgt $nf_n \uparrow \infty$. Es gilt also:

Die Funktion konstant unendlich ist Bairesch.

Insbesondere existiert zu jeder belibiegen Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Bairesche Funktion g mit $g \geq f$. Daher ist das sogenannte **äußere Integral**

$$\bar{I}(f) := \operatorname{Inf}\{I(g); \quad g \geq f,\ g \in \mathcal{B}^+(X)\}$$

wohldefiniert. Man darf von diesem äußeren Integral nicht zu viele gute Eigenschaften erwarten, da man nicht erwarten kann, dass es eine vernünftige Integrationstheorie gibt, welche alle Funktionen umfaßt. Dennoch kann man ein paar bescheidene Eigenschaften sammeln. Trivial ist beispielsweise:

3.1 Bemerkung. *Ist $C > 0$ eine positive reelle Zahl, so gilt $\bar{I}(Cf) = C\bar{I}(f)$.* AIl

Genauso klar ist:

3.2 Bemerkung. *Für beliebige Funktionen f, g gilt* aIm

$$g \geq f \Longrightarrow \bar{I}(g) \geq \bar{I}(f).$$

Ebenfalls trivial ist, dass für Bairesche Funktionen f schon $\bar{I}(f) = I(f)$ gilt. Nicht so ganz auf der hand liegt aber:

3.3 Hilfssatz. *Für Bairesche Funktionen f gilt* Bfm

$$I(f) = \bar{I}(f) = -\bar{I}(-f).$$

Man sollte beachten, daß hier eine Vernünftigkeitssaussage für die Funktion $-f$ gemacht wird, welche ja in der Regel nicht Bairesch ist.

Beweis von 3.3. Wir müssen nur die zweite Gleichung beweisen. Wir beweisen zunächst $-\bar{I}(f) \geq -I(f)$. Dazu wählen wir eine Folge (f_n) stetiger Funktionen mit kompaktem Träger mit $f_n \uparrow f$. Es gilt dann $-f_n \geq -f$ und folgedessen $-I(f_n) \geq \bar{I}(f)$. Da sies für alle n gilt folgt $-I(f) \geq \bar{I}(f)$.

Es bleibt nun die umgekehrte Ungleichung $\bar{I}(-f) \geq -I(f)$ zu beweisen. Sie ist gleichbededeutend mit $I(g) \geq -I(f)$ für alle Baireschen Funktionen $g \geq -f$. Die Behauptung folgt nun aus der Additivitat $I(f+g) = I(f) + I(g)$ des Baireschen Integrals. □

Der große Nachteil des äußeren Integrals ist es, dass $\bar{I}(-f) = -\bar{I}(f)$ allgemeine nicht richtig ist. Gegenbeispiele sind allerdings schwierig zu bekommen. Wir verzichten hier darauf, eines anzugeben. Um den Mißstand anugehen, defniert man erst einmal das sogenannte **Unterintegral**

$$\underline{I}(f) := -\bar{I}(-f).$$

Der Name „Ober“ und „Unter“ findet eine gewisse Rechtfertigung in

3.4 Hilfssatz. *Es gilt stets* UkO

$$\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f).$$

Beweis. Es kann sein, dass $\bar{I}(f) + \bar{I}(-f)$ nicht definiert ist, weil $\bar{I}(f) = \infty$ und $\bar{I}(-f) = -\infty$ ist oder umgekehrt. In beiden Fällen ist der Hilfssatz richtig. Daher können wir annehmen, dass die Summe definiert ist. Die Behauptung lautet dann $\bar{I}(f) + \bar{I}(-f) \geq 0$. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit $\bar{I}(g) + \bar{I}(h) \geq 0$ für alle Baireschen Funktionen $g \geq f$ und $h \geq -f$. Wegen $g + h \geq 0$ folgt die behauptete Ungleichung nunmehr aus der Additivität des Baireschen Integrals. □

Die Additivität $\bar{I}(f+g) = \bar{I}(f)+\bar{I}(g)$ kan man allgemien natürlich nicht erwarten. Eine sehr schwacher, nicht besonders schöner, aber dennoch nützlicher Abklatsch kann jedoch bewiesen werden:

3.5 Hilfssatz. *Es seien* InU

$$f, g, h : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

drei Funktionen mit der Eigenschaft

$$f(x) + g(x) = h(x)$$

für alle $x \in X$ für welche die Summe $f(x) + g(x)$ wohldefiniert ist. Wenn also $\{f(x), g(x)\} = \{\infty, -\infty\}$ gilt, wird nichts gefordert. Es ist dann gleichgültig, was $h(x)$ für einen Wert annimmt.)
Dann gilt

$$\bar{I}(f) + \bar{I}(g) \geq \bar{I}(h), \quad \underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leq \underline{I}(h)$$

falls die Summe auf der linken Seite definiert ist. Für das Unterintegral gilt eine entsprechende Ungleichung in der anderen Richtung.

(Im Spezialfall $g = -f,\ h = 0$ ist dies nichts anderes als Hilfssatz 3.4.)

Beweis von 3.5. Da die zweite Ungleichung aus der ersten folgt, beschränken wir uns auf diese. Man muß zeigen, daß für alle halbstetigen Funktionen

$$f^*, g^* \in \mathcal{B}^+ \quad \text{mit} \quad f^* \geq f,\ g^* \geq g$$

gilt

$$\bar{I}(f^*) + \bar{I}(g^*) \geq \bar{I}(h).$$

Dies ist aber trivial, denn es gilt $f^* + g^* \geq h$ (auch in den Stellen, in denen $f(x) + g(x)$ nicht definiert ist!).

4. Das Lebesguesche Integral

Der entscheidende Nachteil des äußeren Integrals besteht darin, dass $\bar{I}(-f) = -\bar{I}(f)$ nicht gilt, anders ausgedrückt, dass $\bar{I}(f)$ und $\underline{I}(f)$ im allgemeinen voneinander verschieden sind. Diese Schwierigkeit entledigt man sich durch eine Definition:

4.1 Definition. *Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt* ***integriebar im Sinne von Lebesgue****, falls Oberintegral und Unterintegral übereinstimmen und endlich sind.* DLI

Bairesche Funktionen mit endlichem Integral haben diese Eigenschaft (3.3). Daher entsteht kein Konflikt, wenn wir für Lebesgue-integrierbare Funktionen die Bezeichnung

$$\int_X f(x)dx = I(f) := \bar{I}(f) = \underline{I}(f)$$

verwenden. Da der Intergierbarkeitsbegriff, den wir hier verwenden, sagen wir folgenden immer kurz „integrierbar“ anstelle „Lebesgue-intergrierbar’.

integrierbare Funktionen können die Werte $\pm\infty$ annehmen. Wir werden sehen, dass diese Stellen keine große Rolle spielen. Man betrachtet deshalb manchmal nur solche integrierbaren Funktionen, welche nur endliche Werte annehmen und bezeichnet diese mit

$$\mathcal{L}^1(X) := \big\{\, f : X \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ Lebesgue integrierbar} \,\big\}.$$

(Der ober Index 1 findet später eine Erklärung).

4.2 Satz. *Die Menge $\mathcal{L}^1(X)$ bildet einen Vektorraum und das Integral ist ein* ***positives lineares Funktional*** *in folgendem Sinne:* LaF

$$f, g \in \mathcal{L}^1 \Longrightarrow f + g \in \mathcal{L}^1 \text{ und } Cf \in \mathcal{L}^1 \text{ für } C \in \mathbb{R}$$

und

$$\int_X (f(x) + g(x))dx = \int_X f(x)dx + \int_X g(x)dx, \quad \int_X Cf(x)dx = C\int_X f(x)dx,$$

Außerdem gilt:

$$f \geq 0 \Longrightarrow \int_X f(x)dx \geq 0.$$

Beweis. Die Formel $I(Cf) = CI(f)$ gilt für positive C sogar für das Oberintegral (3.1) und nach Defnition der Lebesgue-Integrierbarkeit für $C = -1$. Sie gilt daher allgemein. Die Additivit2at folgt unmittelbar aus 3.5 und die Positivität gilt ebenfalls für das äußere Integral (3.2). □

Die Additivität gilt sogar etwas allgemeiner:

Seien $f, g, h : X \to \bar{\mathbb{R}}$ drei Funktionen, f, g seien integrierbar und es gelte $h(x) = f(x) + g(x)$ für all diejenigen x, für welche die Summe definiert ist. Dann ist auch h integrierbar und es gilt $I(h) = I(f) + I(g)$.

Wenn wir später über Nullmengen Bescheid wissen, werden wir sehen, dass diese scheinbar allgemeinere Variante bereits aus der in 4.2 formulierten Variante folgt.

Wir geben noch eine etwas direktere Formulierung der Lebesgue-Integrierbarkeit an. Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Funktion, so dass $\bar{I}(f)$ und $\underline{I}(f)$ wenigstens einmal endlich sind. Die Lebesgue-Integrierbarkeit bedeutet, daß für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\bar{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon \quad \text{oder} \quad \bar{I}(f) + \bar{I}(-f) < \varepsilon.$$

Diese Ungleichung wiederum bedeutet, dass es Bairsche Funktionen g, h mit den Eigenschaften

$$g \ge f, \quad h \ge -f, \quad I(f+g) < \varepsilon$$

gibt. Hiervon gilt offenbar auch die Umkehrung, also:

4.3 Bemerkung. *Eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann intergierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Bairsche Funktionen g, h mit den Eigenschaften* LaB

$$g \ge f, \quad h \ge -f, \quad I(f+g) < \varepsilon$$

gibt.

Aus dieser Charakterisierung folgt:

4.4 Bemerkung. *Wenn eine Funktion f integrierbar ist, so ist auch $|f|$ integrierbar. Mit zwei integrierbaren Funktionen f, g sind auch $f \wedge g$ und $f \vee g$ integrierbar.* Lbw

Beweis. Zunächst erinnern wir daran, dass der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger bezüglich $f \wedge g$ und $f \vee g$ angeschlossen ist. Aus $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow g$ folgt $f_n \wedge g_n \uparrow f \wedge g$ und $f_n \vee g_n \uparrow f \vee g$. Daher gilt

$$f, g \in \mathcal{B}^+(X) \Longrightarrow f \wedge g,\ f \vee g \in \mathcal{B}^+(X).$$

Wir beginnen nun den Beweis von 4.4 mit $f \wedge g$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen gemäß 4.3 Bairesche Funktionen f_1, f_2, g_1, g_2 mit

$$f_1 \ge f, \quad f_2 \ge -f, \quad I(f_1 + f_2) < \varepsilon$$

und entsprechend für g. Die Funktionen $f_1 \wedge g_1$ und $f_2 \vee g_2$ sind Bairesch. Es gilt

$$f_1 \wedge g_1 \geq f \wedge g, \quad f_2 \vee g_2 \geq (-f) \vee (-g) = -(f \wedge g).$$

Wir behaupten nun

$$f_1 \wedge g_1 + f_2 \vee g_2 \leq f_1 + f_2 + g_1 + g_2.$$

Wenn wir dies gezeigt haben, sind wir wegen 4.3 fertig, denn dann gilt

$$I(f_1 \wedge g_1 + f_2 \vee g_2) \leq I(f_1 + f_2) + I(g_1 + g_2) < 2\varepsilon.$$

Die Behauptung folgt aus folgender Umgleichung für vier Zahlen a, b, c, d:

$$a + c \geq 0,\ b + d \geq 0 \Longrightarrow \min(a, b) + \max(c, d) \leq a + b + c + d.$$

Dies zeigt man leicht mit Fallunterscheidung:

a) $a \geq b$, $c \geq d$. Die linke Seite der Ungleichung ist dann $b + c$ und die behauptete Ungleichung lautet $a + d \geq 0$. Sie folgt aus $a \geq b$ und der Voraussetzung $b + d \geq 0$.
b) $a \leq b$, $c \geq d$. Die linke Seite der Ungleichung ist dann $a + c$ und die behauptete Ungleichung lautet $b + d \geq 0$. Sie gilt nach Voraussetzung.
c) $a \geq b$, $c \leq d$. Die behauptete Ungleichung lautet dan $a + c \geq 0$. Sie gilt nach Voraussetzung.
d) $a \leq b$, $c \leq d$. Die behauptete Ungleichung lautet dan $b + c \geq 0$. Sie folgt aus $b \geq a$ und der Voraussetzung $a + c \geq 0$. damit ist bewiesen, dass $f \wedge g$ intergierbar ist. Dies folgt dann auch für $f \vee g$ wegen $f \vee g = -((-f) \wedge (-g))$. Als letztes behandeln wir $|f|$. Die Funktionen f und $f \wedge 0$ sind intergrierbar. Die Formel

$$|f|\,(x) = \frac{1}{2}(f(x) - (f \wedge 0)(x))$$

gilt immer dann, wenn $f(x)$ von $-\infty$ verschieden ist. Da wir dies nicht ausschließen können, reicht die Additivität in 4.2 nicht aus, um die Intergierbarkeit von $|f|$ zu beweisen. Mann muss noch einmal 3.5 bemühen (s. auch die Anmarkung nach dem Beweis von 4.2). Nun ist 4.4 vollständig bewiesen. □

Die Charaktersierung 4.3 impliziert noch eine andere Charaktersierung der Lebesgue-Integral, die man auch zum Aufbau hätte nehmen können:

4.5 Satz. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist dann un nur dann intergrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger gibt, so dass $\bar{I}(|f - g|) < \varepsilon$ gilt.* CL

Dass diese Bedingung notwendig ist, folgt aus dem Aufbau des Lebesgue-Integrals unmittelbar. Wir zeigen, dass sie auch hinreichend ist. nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger g und eine Bairesche Funktion h mit

$$|f - g| < h, \quad I(h) \leq \varepsilon.$$

Man kann nun 4.3 mit $h+g$ anstelle von f und $h-g$ anstelle von h anwenden.

□

5. Die Grenzwertsätze

Die eigentliche Stärke des Lebesgue-Integrals sind starke Stabilitätssätze bei Grenzübergang. Es gibt hier zwei wichtige Sätze, den Satz von Beppo-Levi und den Lebesgueschen Grenzwertsatz.

5.1 Theorem (Beppo Levi). *Gegeben sei eine monoton wachsende Folge* BL

$$f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \cdots$$

von integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{L}^1(X)$. Die Folge der Integrale

$$\int_X f_n(x)dx$$

sei beschränkt. Die durch

$$f(x) = \operatorname{Sup}\{f_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$$

definierte Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist integrierbar und es gilt

$$\int_X f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx.$$

Beweis Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$h_n = f_n - f_{n-1} \geq 0 \quad (f_0 := 0).$$

Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} h_k = f_n.$$

Da jede monotone und beschränkte Folge konvergiert, existieren die Grenzwerte

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} I(h_k) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) \quad \in \mathbb{R}.$$

Wir müssen $R = \bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ zeigen. Wegen $\underline{I}(f) \le \bar{I}(f)$ genügt es $\bar{I}(f) \le R \le \underline{I}(f)$ zu zeigen:

1) Es gilt $R \le \underline{I}(f)$:

Dies folgt aus der Monotonie des äußeren Integrals, $I(f_n) \le \underline{I}(f)$.

2) Es gilt $\bar{I}(f) \le R$:

Es genügt, die Ungleichung $\bar{I}(f) \le R + \varepsilon$ für jedes positive $\varepsilon > 0$ zu beweisen. Wir wählen für jedes k eine Bairesche Funktion $\bar{h}_k$ mit den Eigenschaften

$$\bar{h}_k \ge h_k, \quad I(\bar{h}_k) \le I(h_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Wir definieren $\bar{f}$ durch

$$\bar{f}(x) = \operatorname{Sup}\{\sum_{k=1}^{n} \bar{h}_k;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Aus der Monotonie des äußeren Integrals und der Stabilität des Baireschen Integrals gegenüber monotoner Konvergenz folgt

$$\bar{I}(f) \le I(\bar{f}) = \sum_{k=1}^{\infty} I(\bar{h}_k) \le R + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = R + \varepsilon.$$

Der Satz von Beppo Levi ist damit bewiesen. □

Bemerkenswert an dem Satz von Beppo Levi ist, dass keine Annahme über die Konvergenz von (f_n) gemacht wird. Lediglich die Folge der Integrale muss konvergieren!

5.2 Theorem (Lebesguescher Grenzwertsatz). *Gegeben sei eine Folge* LGw
*(f_n) von integrierbaren Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die **punktweise** gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert.*

Es existiere eine Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

a) $|f_n| \le h$ *für* $n = 1, 2, 3, \cdots$

b) $\bar{I}(h) < \infty$.

Dann ist auch f integrierbar und es gilt

$$\int_X f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx.$$

Beweis: Aus den Ungleichungen $|f_k| \leq h$ folgt $\pm f \leq |f| \leq h$. Daher sind das äußere und innere Integral von f endlich. Wir wollen den Lebesgue'schen Grenzwertsatz auf den Satz von Beppo Levi zurückführen und bilden hierzu

$$\underline{g}_n(x) = \operatorname{Inf}\{f_k(x);\ k \geq n\},$$
$$\bar{g}_n(x) = \operatorname{Sup}\{f_k(x);\ k \geq n\}.$$

Dann gilt offenbar

$$\underline{g}_1 \leq \underline{g}_2 \leq \underline{g}_3 \leq \cdots,$$
$$\bar{g}_1 \geq \bar{g}_2 \geq \bar{g}_3 \geq \cdots.$$

Aus $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ folgert man leicht

$$\underline{g}_n \uparrow f, \quad \bar{g}_n \downarrow f.$$

Als nächstes wird gezeigt, daß die $\underline{g}_k$ und $\bar{g}_k$ integrierbare Funktionen sind. Dazu wird der Satz von Beppo Levi ausgenutzt. Bildet man nämlich

$$\underline{G}_{nj} = f_n \wedge f_{n+1} \wedge \cdots \wedge f_{n+j}$$

und

$$\bar{G}_{nj} = f_n \vee f_{n+1} \vee \cdots \vee f_{n+j},$$

so sind $\underline{G}_{nj}$ und $\bar{G}_{kj}$ integrierbar (4.4) und es gelten die Ungleichungen

$$-h \leq \underline{G}_{nj} \leq f_n \leq \bar{G}_{nj} \leq h.$$

Ferner gilt offensichtlich für festes n

$$\underline{G}_{nj} \downarrow \bar{g}_n \quad (j \longrightarrow \infty)$$

und

$$\bar{G}_{nj} \uparrow \bar{g}_n \quad (j \longrightarrow \infty).$$

Daher sind nach dem Satz von Beppo Levi $\underline{g}_n$ und $\bar{g}_n$ integrierbar.

Ferner gelten die Ungleichungen

$$-h \leq \underline{g}_n \leq f_n \leq \bar{g}_n \leq h,$$

also

$$-\bar{I}(h) = \underline{I}(-h) \leq I(\underline{g}_n) \leq I(f_n) \leq I(\bar{g}_n) \leq \bar{I}(h).$$

Da $\bar{g}_n$ und $\underline{g}_n$ monoton gegen f konvergieren, ist f integrierbar und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} I(\underline{g}_n) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(\bar{g}_n) = I(f).$$

Damit ist der Lebesguesche Grenzwertsatz bewiesen.

6. Nullmengen

6.1 Definition. NM

a) *Eine Funktion* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *heißt Nullfunktion, wenn*

$$\bar{I}(|f) = 0$$

gilt.

b) *Eine Teilmenge* $A \subset X$ *heißt Nullmenge, wenn die charakteristische Funktion* χ_A

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases}$$

eine Nullfunktion ist.

Die Ungleichung $\int_- \leq \int^-$ zeigt, daß jede Nullfunktion in der Tat integrierbar ist. Außerdem ist mit f auch h eine Nullfunktion, wenn $|h| \leq |f|$ gilt.

6.2 Satz. *Eine Funktion* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *ist dann und nur dann Nullfunktion, wenn die Menge* $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ *eine Nullmenge ist.* NuM

Beweis. Sei f eine Nullfunktion. Man wende den Satz von Beppo Levi auf die Folge

$$h_\nu(x) = \begin{cases} \nu|f(x)|, & \text{falls } f(x) \neq \pm\infty \\ \nu, & \text{falls } f(x) = \infty \end{cases}$$

an und erhält

$$\int_X h(x)dx = 0 \quad \text{wobei} \quad h(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{für } f(x) = 0. \end{cases}$$

Aus der Ungleichung

$$\chi_A \leq h \text{ mit } A = \{x \in X,\ f(x) \neq 0\}$$

folgt dann, daß A eine Nullmenge ist.

Umkehrung. Sei $A = \{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge. Der erste Teil dieses Beweises zeigt dann, daß h eine Nullfunktion ist und wegen $|f| \leq h$ ist dann auch f eine Nullfunktion. □

6.3 Bemerkung. *Wenn eine Funktion* f *integrierbar ist, dann ist die Menge der Unendlichkeitsstellen* UnN

$$\{x \in X;\ f(x) = \infty \ \textit{oder}\ = -\infty\}$$

eine Nullmenge.

Beweis. Es sei A die Menge der Unendlichkeitsstellen von f und χ_A die charakteristische Funktion. Offenbar gilt
$$\chi_A(x) = f(x) + (-f(x)),$$
wann immer diese Summe definiert ist. Nicht definiert sind die Ausdrücke $\infty + (-\infty)$.
Nach 3.5 gilt daher
$$\bar{I}(\chi_A) \le I(f) + I(-f) = 0. \qquad \square$$

6.4 Satz. *Sei f eine integrierbare Funktion und g eine Funktion, welche nur auf einer Nullmenge von f verschieden ist. Dann ist auch g integrierbar und die Integrale von f und g stimmen überein.* Nnw

6.5 Folgerung. *Man darf eine integrierbare Funktion in ihren Unendlichkeitsstellen beliebig abändern—etwa zu 0, ohne ihre Integrierbarkeit zu verlieren und den Wert des Integrals zu verändern.* aAe

Damit haben die Unendlichkeitsstellen ihre Bedeutung verloren!

Beweis von 6.4. Man kann eine Nullfunktion h definieren, so dass $g(x) = f(x) + h(x)$ immer dann gilt, wenn die Summe auf der rechten Seite definiert ist. (Problematisch sind die Fälle $\{g(x), f(x)\} = \{\infty, -\infty\}$. An diesen Stellen setzt man einfach $h(x) = -f(x)$.) Da nun f, h intergierbar sind, ist auch g integrierbar und es gilt $I(g) = I(f) + 0$. Hierbei muss man 3.5anwenden. Die Additivität in 4.2 genügt nicht, da wir in 6.4 Unendlichkeitsstellen zulassen wollen.

Die Unendlichkeitsstellen haben nun ihren Schrecken verloren. Man kann eine intergierbare Funktion f immer so modifizieren, dass sie nur enliche Werte annimmt und somit in $\mathcal{L}^1$ liegt. Man ersetzt sie beispielsweise durch $\tilde{f}(x) = f(x)$, falls $f(x)$ endlich ist und $\tilde{f}(x) = 0$ andernfalls.

6.6 Bemerkung. *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge. Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Nullmengen. Dann ist auch die Vereinigung $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ eine Nullmenge.* Np

Der erste Teil ist klar. Der zweite Teil folgt aus dem Satz von Beppo Levi angewendet auf die Folge
$$\chi_{A_1}, \quad \chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2}, \quad \chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2} \wedge \chi_{A_3}, \ldots$$
Ihr Supremum ist die charakteristische Funktion von A. Alle auftretenden Terme sind Nullfonktionen wegen
$$\chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \le \chi_{A_1} + \cdots + \chi_{A_n}.$$
Beim Satz von Beppo Levi haben wir nur Folgen von Funktionen genommen, welche endliche Werte annehmen. Dies kann man nachträglich aufheben, denn man kann nun jede der Funktionen auf einer Nullmenge abänderen und ändert wegen 6.6 dann insgesamt nur auf einer Nullmenge ab.

Nullmenge zu sein ist nur eine lokale Eigenschaft:

6.7 Bemerkung. *Für eine Teilmenge $A \subset X$ sind folgende drei Eigenschaften gleichbedeutend:* N1E

a) *A is eine Nullmenge.*
a) *Zu jedem Punkt $a \in X$ existiert eine offene Umgebung U, so dass $A \cap U$ eine Nullmenge ist.*
c) *Für jedes Kompaktum K ist $A \cap K$ eine Nullmenge.*

Beweis. „a)$\Rightarrow$ b)“ ist trivial. „b)$\Rightarrow$ c)“ folgt leicht aus der lokalen Kompaktheit von X durch ein Überdeckungsargument. Um „c)$\Rightarrow$ a)“ zu beweisen, betrachtet man eine monotone Approxiemrende der Eins $f_n \uparrow 1$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger und wendet auf $\chi_A \cdot f_n$ den Satz von Beppe Levi an.

7. Meßbarkeit

In diesem Abschnitt machen wir eine etwas stärkere Annahme an den Rum X:

7.1 Annahme. *Der Raum X sei lokal kompakt und die charakteristische Funktion jeder offene Teilmenge von X liegt in der Baireschen Klasse $\mathcal{B}^+(X)$.* AB

Ursprünglich hatten wir nur angenommen, dass die Finktion „konstant Eins“ Bairesch ist. Die verschärfte Annahme ist in allen in der Analysis auftretenden vernünftigen Situationen erfüllt. Wir werden sie später für Mannigfaltikeiten beweisen, worunter auf $\mathbb{R}^n$ fällt.

Ein Folgerung aus der Annahme ist:

7.2 Bemerkung. *Ist U eine offenen Teilmenge, deren Abschluss kompakt ist, so ist ihre charakteristische Funktion integrierbar. Die charakteristische Funktion einer beliebigen kompakten Menge ist integrierbar.* Kui

Beweis. Sei U eine offenen Teilmenge mit kompaktem Abschluss K. Wir wählen eine stetige Funktion $0 \le f \le 1$ mit kompaktem Träger, welche auf K eins ist. Dann gilt $\chi_U \le f$. Somit ist χ_U eine Bairesche Funktion mit endlichem Integral und somit integrierbar. Um den zweiten Teil zu beweisen, betrachten wir eine monotone Approximation $f_n \uparrow \chi_{X-K}$ des Komplements einer kompakten Menge K. Es gilt dann $(f_n - 1) \uparrow -\chi_K$. Wir betrachten nun ncoh eine feste stetige Funktion mit kompaktem Träger $0 \le g \le 1$, welche 1 auf K ist. Dann gilt offenbar $(-g) \vee (1 - f_n) \uparrow (-g) \wedge (-\chi_K) = -\chi_K$. Dies zeigt, dass $-\chi_K$ Bairesch ist. Nun folgt leicht, dass χ_K integrierbar ist. □

Dass eine Funktion f nicht integrierbar ist, kann zweierlei Gründe haben. Sie ist nicht beschränkt genug oder sie ist zu unstetig. Die erste Einschränkung kann man begrifflich gut erfassen, indem man die Funktion abschneidet. Man schneidet f nach oben ab, indem man eine stetige Funktion mit kompaktem Träger g nimmt und $f \wedge g$ betrachtet. Es gilt ja $f \wedge g \le g$. Entsprechend schneidet man f nach unten ab, indem man $f \vee g$ betrachtet.

7.3 Definition. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt* ***messbar****, wenn $f \wedge g \vee h$ für jedes Paar stetiger Funktionen mit kompaktem Träger meßbar ist.* DM

Jede messbare Funktion f ist punktweiser Limes einer Folge (f_n) integrierbarer Funktionen mit $|f_n|f_n \leq |f|$. Dazu betrachtet man eine monotone Appriximation der Eins $g_n \uparrow 1$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger und bildet $f_n = f \wedge (ng_n) \vee (-ng_n)$. Aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt:

7.4 Bemerkung. *Jede integrierbare Funktion ist messbar.* Iim

Mit demselben Argument zweigt man:

7.5 Bemerkung. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Es existiere eine integrierbare Funktion h mit der Eigenschaft* MIn

$$|f(x)| \leq |h(x)| \quad \textit{für alle } x.$$

Dann ist auch f integrierbar.

Die messbaren Funktionen haben alle wünschenswerten Stabilitätseigenschaften.

7.6 Satz (Stabilität der Messbarkeit). SMe

1) *Stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ sind messbar.*
2) *Summe und Produkt von messbaren Funktionen sind meßbar.*
3) *Seien f, g messbare Funktionen. Dann sind auch $f \wedge g$, $f \vee g$ und $|f|$ meßbar.*
4) *Sei f_n eine punktweise konvergente Folge meßbarer Funktionen. Dann ist auch ihr Grenzwert meßbar.*
5) *Man darf eine meßbare Funktion auf einer Nullmenge abändern, ohne ihre Meßbarkeit zu verlieren.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß das Produkt meßbarer Funktionen meßbar ist, da alle anderen Stabilitätseigenschaften leicht aus entsprechenden Eigenschaften integrierbarer Funktionen folgen. Es genügt natürlich zu zeigen, dass das Produkt zweier intergrierbarer Funktionen integrierbar ist und man kann sogar annehmen, dass die beiden intergierbaren Funktionen beschränkt sind. Nutzt man die Beziehung $2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2$ aus, so sieht man, dass es genügt zu zeigen, dass das Quadrat einer beschränkten integrierbaren Funktion f messbar ist. Wir zeigen sogar mehr und zeigen, dass f^2 integrierbar ist. Dazu benutzen wie die Charakterisierung 4.5. Wir wählen als zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger mit der Eigenschaft $|f - g| < \varepsilon$. Die Funktion f ist beschränkt durch eine positive Konstante C. Wir können sicherlich erreichen, dass $|g|$ ebenfalls durch C beschränkt ist. Es folgt dann $|f^2 - g^2| = |f - g| \cdot |f + g| \leq 2C\varepsilon$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

In 7.6 sind alle die wesentlichen Konstruktionsprinzipien für Funktionen aufgeführt. Mit diesen Konstruktionen verläßt man den Bereich der messbaren

Funktionen nie. in gewissem Sinne sind also alle in der Analysis auftretenden Funktionen messbar. Bemerkung 7.5 rückt die Eigenschaft „integrierbar" somit in ein besonders Licht.

Integrierbarkeit ist Beschränktheitsaussage und weniger eine Aussage über nicht zu starke Unstetigkeit.

Endliche Messbarkeit

7.7 Definition. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **meßbar**, wenn ihre charakteristische Funktion eine messbare Funktion ist und **endlich messbar**, wenn sie sogar integrierbar ist. Das **Volumen** $v(A)$ einer endlich messbaren Menge ist das Integral ihrer charakteristischen Funktion.* Mes

Aus unseren Untersuchungen folgt unmittelbar:

7.8 Bemerkung. Sme

1) *Nullmengen sind endlich messbar und haben das Volumen 0.*
2) *Kompakte Mengen sind endlich messbar.*
3) *Offene Mengen mit kompaktem Abschluss sind endlich messbar.*
4) *Abgeschlossene Mengen sind messbar.*
5) *Offene Mengen sind messbar.*

Wir führen noch eine Bezeichnung ein. Sei f eine Funktion, welche auf einer Teilmenge von X definiert sei. Diese Teilmenge enthalte $A \subset X$. Wir sagen dann, f sei längs A intergrierbar, wenn die Funktion

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in X - A \end{cases}$$

integrierbar ist. Suggestiv, wenn auch nicht ganz sauber ist die Bezeichnung

$$\chi_A(x) f(x) \chi_A(x) := \tilde{f}(x).$$

Wir schreiben dann auch

$$\int_A f(x)dx := \int_X \chi_A(x) f(x) dx.$$

Folgendes Kriterium für die Messbarkeit ist für weite Teile der Analysis ausreichend:

7.9 Bemerkung. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funkion auf einer offenen Teilmenge $U \subset X$. Dann ist $\chi_U f$ messbar.* Com

Folgerung. *Ist überdies der Abschluß von U kompakt und f beschränkt, so ist f integrierbar längs U.*

Beweis. Die Meßbarkeit von $\chi_U f$ braucht man nur für unter der Annahme $f \geq 0$ zu beweisen, da man f allgemein als Differenz zweier solcher Funktionen schreiben kann. Wir zeigen, dass für $f \geq 0$ die Funktion $\chi_U f$ sogar Bairesch ist. Dazu betrachten wir eine monotone Approximation der charakteristischen Funktion, $g_n \uparrow \chi_U$ durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger $g_n \geq 0$. Offenbar gilt dann $\chi_U g_n \uparrow \chi_U f$. Die Funktionen $\chi_U g_n$ sind auf ganz X stetig! Sie sind nämlich stetig auf den beiden offenen Mengen U und $V := X - \text{Träger}(g_n)$. Da $U \cup V = X$ gilt, existiert zu jedem Punkt eine Umgebung von X (entweder U oder V), in der $\chi_U g_n$ stetig ist. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft, folgt hieraus die Stetigkeit auf ganz X.

Die Folgerung ergibt sich leicht aus 7.6 und 7.5. □

8. Der Satz von Fubini

Wir betrachten zwei Räume (X, dx) mit Radonmaß (Y, dy). Wir betrachten den Produktraum $X \times Y$. Sind X, Y metrische Räume mit Metriken d_X, d_Y, so wird X, Y mit der Produktmetrik

$$d_{X\times Y}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y - 2))$$

versehen. (Besser ist es X, Y als toplogische Räume zu nehmen und $X \times Y$ mit der Produkttoplogie zu versehen.) Eine Teilmenge $M \subset X \times Y$ heißt zerfallend, wenn $M = A \times B$ mit Teilmengen $A \subset X$, $B \subset Y$ gibt. Eine Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ heiße zerfallend, wenn es Funktionen $g : X \to \mathbb{R}$ und $h : Y \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

gilt.

Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Man kann dann fie Funktion $I_Y(f) : X \to \mathbb{R}$ betarchten, welche durch

$$I_Y(f) := \int_Y f(x, y)dy$$

definiert ist. Aus dem Satz über die gleichmäßige Stetigkeit kann man leicht folgern, dass diese Funktion stetig ist. Da sie auch kompakten Träger hat, kann man

$$I_X(I_Y(f)) := \int_X \left[\int_Y f(x, y)dy\right] dx$$

definieren. Es ist klar, dass dies ein Radonmaß ist. Man nennt es das *Produktmaß* und bezeichnet es mit

$$\int_{X\times Y} f(x, y)dxdy := \int_X \left[\int_Y f(x, y)dy\right] dx.$$

Natürlich könnte man versuchen, das Produktmaß auch durch die Formel $I_Y(I_X(f))$ defnieren. Wir wollen jedoch zeigen, dass dasselbe herauskommt. Es gilt also die Formel

$$\int_X \left[\int_Y f(x,y)dy\right]\, dx = \int_Y \left[\int_X f(x,y)dx\right]\, dy.$$

Zum Beweis betrachten wir ein zerfallendes Kompaktum $K \subset X \times Y$, welches den Träger von f umfaßt. Es ist leicht zu sehen, dass ein solches existiert. Dann betrachten wir die Menge $\mathcal{W}$ aller stetigen Funktionen $h : K \to \mathbb{R}$, welche sich sich in der Form

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} h_i^{(1)}(x)h_i^{(2)}(y), \quad h_i^{(1)} \in \mathcal{C}_c(X),\ h_i^{(2)} \in \mathcal{C}(Y)$$

schreiben lassen. Die Menge $\mathcal{W}$ erfüllt offenbar die Voraussetzungen der zweiten Variante des Approximationssatzes von Stone Weierstrass. Daher existiert eine Folge $f_n \in \mathcal{W}$, welche auf K gegen f gleichmäßig konvergiert. Die Folge $\chi_K f_n$ konvergiert dann auf ganz X gegen f. Ist C eine genügend große Konstante, so dominiert. Die Funktionen f_n zerfallen. Daher gilt $I_X(I_Y(f_n)) = I_Y(I_X(f_n))$ trivialerweise. Durch Grenzübergang folgt nun leicht $I_X(I_Y(f)) = I_Y(I_X(f))$.

Der Satz von Fubini besagt, dass die Formel

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy := \int_X \left[\int_Y f(x,y)dy\right]\, dx = \int_Y \left[\int_X f(x,y)dx\right]\, dx$$

sich auf beliebige integrierbare Funktionen überträgt. Dies ist als solches nicht verwunderlich. Aber es gibt doch ein wenig Salz in der Suppe, wie folgendes Beispiel zeigt.

Sei $X = Y = \mathbb{R}$ mit dem üblichen vom Regelintegral abgeleiteten Radonmaß. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \neq 0 \\ 1 & \text{falls } y = 0 \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass f eine Nullfunktion ist. Die Funktion $f(x,y)$ ist jedoch nicht für jedes feste y intergrierbar. Für $y = 0$ ist sie konstant 1 und diese Funktion ist nicht integrierbar auf $\mathbb{R}$. Sie ist zwar Bairesch, aber das Bairseche Integral sit nicht endlich. Dennoch gilt die Fubini-Formel auch in diesem Fall, wenn man sie etwas vorsichtiger formuliert.

8.1 Satz von Fubini. *Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann ist die Menge aller $y \in Y$, für welche $f(x,y)$ als Funktion von X nicht integrierbar ist, eine Nullmenge $B \subset Y$. Definiert man für die Ausnahmemenge einfach (nur für die Zwecke dieses Satzes)* SF

$$\int_X f(x,y) := 0 \qquad (y \in B),$$

so gilt: Die so erhaltene Funktion von x ist integrierbar. Dasselbe gilt sinngemäß wenn man die Rollen von x und y vertauscht und es gilt

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy := \int_X \left[\int_Y f(x,y)dy\right]\, dx = \int_Y \left[\int_X f(x,y)dx\right]\, dy$$

9. Räume integrierbarer Funktionen

Wir bezeichen mit $\mathcal{N}$ die Menge aller Nullfunktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Dies ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(X)$. Da es auf Nullfunktionen meist nicht ankommt, ist es sinnvoll, diese aus der Betrachtung zu eliminieren und sie zu Null zumachen. Dies geschieht durch das Konstrukt des Faktorvektorraums

$$L^1(X) := \mathcal{L}^1(X)/\mathcal{N}.$$

Diesen kann man konkret wie folgt beschreiben. Man führt eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{L}^1(X)$ ein. Man nennt zwei Funktionen f, g äquivalent, wenn $f \sim g$ gilt. Die Forderungen an eine Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie und Transitivität) sind offensichtlich. Ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$, so bezeichnet man die Äquivalenzklasse mit

$$[f] := \left\{\, g;\ g \sim f \,\right\}.$$

Desinitionsgemäß ist $L^1(X)$ die Menge all dieser Äquivalenzklassen. Man überlegt sich leicht, dass die Definitionen

$$[f] + [g] := [f + g], \quad [Cf] := C[f]$$

unabhängig von der Wahl des Repräsentanten sind und macht so $L^1(X)$ zu einem Vektorraum. Die 1-Norm einer intergierbaren Funktion f ist durch

$$||f||_1 := \int_X |f(x)|\, dx$$

defniert. Diese hängt nur von der Äquivalenzklasse von f ab, man kann also $||[f]|| := ||f||$ definieren. Der Vorteil der Konstruktion von L^1 zeigt sich nun in:

Durch $||\cdot||$ wird $L^1(X)$ zu einem normierten Raum.

Dies bedeutet bekanntlich

a) $||Ca||_1 = |C| \cdot ||a||_1 \qquad (C \in \mathbb{R})$,
b) $||a + b||_1 \le ||a||_1 + ||b||_1$,
c) $||a||_1 \ge 0$ und $= 0$ nur für $a = 0$.

Der Vorteil der Konstruktion des Faktorraums L^1 ist, dass die Definitiheit in c) gilt. In $\mathcal{L}^1$ wäre diese falsch. Die große Stärke des Lebsgue-Integrals ist:

9.1 Satz. *Der Raum $L^1(X)$ zusammen mir der Eins-Norm ist ein **Banachraum.*** LB

Beweis. Die Aussage bedeutet folgendes:

Sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N exisiert mit $||f_n - f_m|| \le \varepsilon$ für $n, m \ge N$. Dann esistiert eine integrierbare Funktion f, so dass $||f - f_n||_1$ eine Nullfolge ist.

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung sieht man leicht: Es genügt zu zeigen, dass eine Teilfolge $g_n = f_{\nu_n}$ existiert, so dass $||f - g_n||_1$ gegen Null konvergiert (betrachte $f - f_n + f_n - g_n$). Man kann sich leicht überlegen, dass eine Teilfolge mit der Eigenschaft

$$||g_{n+1} - g_n|| \le 2^{-n}$$

existiert. Dazu betarchtet man eine Folge $N_1 < N_2 < \ldots$, so dass

$$||g_m - g_n|| \le 2^{-k} \quad \text{für} \quad n, m \ge N_k.$$

Die Teilfolge $g_k = f_{N_k}$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. Jetzt beachte man

$$g_n = g_1 + (g_2 - g_1) + \cdots + (g_n - g_1)$$

und defniere

$$G_n := |g_1| + |g_2 - g_1| + \cdots + |g_n - g_1|.$$

Die Folge der G_n ist monoton wachsend. Die Folge ihrer Integrale ist beschränkt (durch die geometrische Reihe). Nach dem Satz von Beppo Levi ist ihr Supremum eine intergierbare Funktion. Deren Unendlichkeitsstellen müssen eine Nullmenge bilden. Daher konvergiert G_n außerhalb einer Nullmenge. Die Folge g_n konvergiert außerhalb dieser Nullmenge nach dem Majorantenkriterium ebenfalls. Aus dem Lebesgueschen Grenzwertsatz folgt, dass die Grenzfunktion f intergierbar ist und es folgt auch $||g_n - f||_1 \to 0$.

Wir haben bei diesem Beweis mitgezeigt:

Aus der Konvergenzaussage $||f - f_n|| \to 0$ in $\mathcal{L}^1(X)$ folgt: Es gibt eine Teilfolge, welcher wenigstens außerhalb einer geeigneten Nullmenge punktweise gegen f konvergiert.

10. Die Transformationsformel