Teil III

Analysis auf Mannigfaltigkeiten

VIII. Flächenintegrale

1. Bogenlänge

Unter einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$,

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dabei darf I offen, abgeschlossen aber auch halboffen sein, soll aber nicht nur aus einem Punkt bestehen oder leer sein. Das Innere I^0 von I ist jedenfalls ein offenes Intervall

$$I^0 = (a, b), \quad -\infty \le a < b \le \infty.$$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, in welcher die Kurve verläuft, $\alpha(I) \subset D$. Abweichend von der strengen mengentheoretischen Konvention schreiben wir dann gelegentlich

$$\alpha : I \longrightarrow D.$$

1.1 Definition. *Die Kurve α heißt glatt, falls ihre Ableitung $\dot\alpha$ existiert und stetig ist.*

Im folgenden betrachten wir das Standardskalarprodukt

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

des $\mathbb{R}^n$ und bezeichnen mit

$$\|x\| = +\sqrt{< x, x >}$$

die Euklidische Norm.

1.2 Definition. *Sei*

$$\alpha : I \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$$

eine glatte Kurve und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Wir definieren

$$l_f(\alpha) = \int_a^b f(\alpha(t))\,\|\dot{\alpha}(t)\|\,dt,$$

falls das Integral absolut konvergiert.

Die Existenz des Integrals ist immer gesichert, wenn I ein endliches abgeschlossenes Intervall ist. (Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, abgeschlossene Intervalle zuzulassen, während man im Hinblick auf die Differentialrechnung mehrerer Variablen eher geneigt sein könnte, nur offene Intervalle zuzulassen.)
Im Falle $f \equiv 1$ schreiben wir einfach $l(\alpha)$ anstelle von $l_f(\alpha)$ und nennen $l(\alpha)$ die *Bogenlänge* der Kurve α. Der Bogenlänge wird ergänzend der Wert ∞ zugeordnet, falls das Integral nicht konvergiert.
Wir erinnern kurz an die Definition der absoluten Konvergenz des Integrals im Sinne des Regelintegrals (das genügt hier). Eine stetige Funktion

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist genau dann absolut integrierbar (vgl. III.1.21), falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für jedes kompakte Teilintervall

$$[c, d] \subset I$$

gilt:

$$\int_c^d |F(t)|\,dt \leq C.$$

Ist

$$[a_n, b_n] \subset I, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Folge von Teilintervallen mit der Eigenschaft

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

so gilt gegebenenfalls

$$\int_a^b F(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} F(t)\,dt.$$

Diese einfachen Grundtatsachen über absolut konvergente Integrale folgen leicht aus den Rechenregeln für das Regelintegral und sind natürlich auch in der Theorie des Lebesgue-Integrals enthalten. Dieses wird jedoch für diese Zwecke nicht benötigt.

Die nächsten drei Bemerkungen zeigen, daß die gegebene Definition der Bogenlänge anschaulich korrekt ist.

1.3 Bemerkung. *Seien a, b zwei Punkte im $\mathbb{R}^n$. Die Länge der Verbindungsstrecke*

$$\alpha(t) = a + t(b - a), \quad 0 \le t \le 1,$$

ist gerade der Euklidische Abstand

$$l(\alpha) = \|b - a\|.$$

Der Beweis ist trivial. □

Die Verbindungsstrecke ist tatsächlich die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Es gilt nämlich:

1.4 Bemerkung. *Sei*

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine glatte Kurve mit Anfang $a = \alpha(0)$ und Ende $b = \alpha(1)$. Dann gilt

$$l(\alpha) \ge \|b - a\|.$$

1.5 Folgerung. *Ist*

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m = 1$$

eine Partition des Einheitsintervalls, so gilt

$$l(\alpha) \ge \sum_{\nu=1}^{m} \|\alpha(a_\nu) - \alpha(a_{\nu-1})\|.$$

Beweis. Sei

$$F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein n-Tupel stetiger Funktionen. Wir definieren das Integral von F komponentenweise

$$\int_0^1 F(t)\, dt = \left(\int_0^1 F_1(t)\, dt, \ldots, \int_0^1 F_n(t)\, dt \right).$$

Aus der Dreiecksungleichung für endliche Summen folgert man durch Approximation mit Treppenfunktionen die Ungleichung

$$\left\| \int_0^1 F(t)\,dt \right\| \leq \int_0^1 \|F(t)\|\,dt.$$

Wendet man diese Ungleichung auf $F(t) = \dot{\alpha}(t)$ an, so folgt mittels des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$l(\alpha) \geq \left\| \int_0^1 \dot{\alpha}(t)\,dt \right\| = \|\alpha(1) - \alpha(0)\| = \|b - a\|. \qquad \square$$

1.6 Bemerkung. *Sei*

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine glatte Kurve. Zu jedem $\varepsilon > 0$ *existiert eine Partition*

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = 1$$

mit der Eigenschaft

$$l(\alpha) \leq \varepsilon + \sum_{\nu=1}^{m} \|\alpha(a_\nu) - \alpha(a_{\nu-1})\|$$

Man kann die Bemerkungen 1.5 und 1.6 auch so zusammenfassen: Die Bogenlänge einer glatten Kurve ist gleich dem Supremum

$$l(\alpha) = \sup \sum_{\nu=1}^{n} \|\alpha(a_\nu) - \alpha(a_{\nu-1})\|,$$

wobei das Supremum über alle Partitionen zu erstrecken ist.

Beweis von 1.6. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$\big|\, \|\dot{\alpha}(t)\| - \|\dot{\alpha}(t')\| \,\big| < \varepsilon \quad \text{für } |t - t'| < \delta.$$

Wir teilen das Intervall $[0,1]$ in endlich viele äquidistante Teilintervalle der Länge $\leq \delta$ ein.

$$0 < {}^1\!/_m < {}^2\!/_m < \ldots < {}^m\!/_m = 1, \quad {}^1\!/_m < \delta.$$

Wir vergleichen die Bogenlänge des ν-ten Teilstücks

$$\int_{(\nu-1)/m}^{\nu/m} \|\dot\alpha(t)\|\,dt$$

mit der Länge der Strecke

$$\|\alpha({}^{\nu}/_{m}) - \alpha({}^{(\nu-1)}/_{m})\|.$$

Zunächst gilt

$$\left| \int_{(\nu-1)/m}^{\nu/m} \|\dot\alpha(t)\|\,dt - \int_{(\nu-1)/m}^{\nu/m} \|\dot\alpha({}^{\nu}/_{m})\|\,dt \right| \le {}^{1}/_{m}\,\varepsilon.$$

Andererseits folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (angewendet auf die Komponenten von α)

$$\big|\, \|\alpha({}^{\nu}/_{n}) - \alpha({}^{\nu-1}/_{n})\| - \|\dot\alpha({}^{\nu}/_{n})\| \cdot {}^{1}/_{n} \,\big| \le {}^{\varepsilon}/_{n}.$$

Summiert man über ν, so folgt, daß sich die Bogenlänge der Kurve α von der des Streckenzugs um weniger als 2ε unterscheidet. □

Von grundlegender Bedeutung ist die Invarianz des Kurvenintegrals gegenüber Parametertransformation.

1.7 Definition. *Zwei Kurven*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

heißen ***schwach äquivalent****, falls es einen Diffeomorphismus*

$$\tau : I \longrightarrow J$$

mit der Eigenschaft

$$\alpha(t) = \beta(\tau(t)) \quad \textit{für } t \in I$$

gibt.

Zur Erinnerung: Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive Abbildung, welche in beiden Richtungen stetig differenzierbar ist.

1.8 Zusatz. *Die beiden Kurven heißen* ***äquivalent****, wenn man zusätzlich*

$$\tau'(t) > 0 \quad \textit{für alle } t$$

erreichen kann.

Bei der Äquivalenz wird also im Gegensatz zu der schwachen Äquivalenz zusätzlich gefordert, daß die beiden Kurven in der gleichen Richtung durchlaufen werden.

Die Umkehrabbildung τ^{-1} hat dieselben Eigenschaften wie τ. Man schließt, daß beide Äquivalenzbegriffe den üblichen drei Postulaten einer Äquivalenzrelation (Reflexivität, Symmetrie und Transitivität) genügen.

1.9 Bemerkung. *Seien*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

zwei schwach äquivalente Kurven. Dann stimmen die Bogenlängen überein.

Beweis. Man braucht die Behauptung nur für geschlossene Intervalle zu beweisen.

$$I = [a, b], \quad J = [c, d].$$

Die Behauptung folgt aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_c^d \|\dot\beta(s)\| \, ds &= \int_a^b \|\dot\beta(\tau(t))\| \, |\dot\tau(t)| \, dt \\ &= \int_a^b \|\dot\alpha(t)\| \, dt. \end{aligned}$$

Eine Kurve

$$\alpha : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt *regulär*, falls sie stetig differenzierbar ist und falls die Ableitung $\dot\alpha(t)$ in keinem Punkt verschwindet.

1.10 Definition. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt* ***zusammenhängende eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit****, falls es eine topologische Abbildung*

$$\alpha : (0, 1) \xrightarrow{\sim} X$$

gibt, welche regulär ist.

Man nennt die Abbildung α dann auch eine reguläre Parametrisierung von X. Im höherdimensionalen wird es sinnvoll sein, auch den Begriff der nicht notwendig zusammenhängenden Mannigfaltigkeit zu definieren. Im eindimensionalen Fall braucht man dies nicht. Für den Rest dieses Abschnittes verstehen wir unter einer eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit immer eine zusammenhängende eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit im Sinne von Definition 1.10.

Von fundamentaler Bedeutung ist:

1.11 Satz. *Zwei reguläre Parametrisierungen*

$$\alpha, \beta : (0, 1) \longrightarrow X$$

ein und derselben eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit sind schwach äquivalent, die Abbildung

$$\tau = \beta^{-1} \circ \alpha : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$$

ist also ein Diffeomorphismus.

1.12 Folgerung. *Die Länge*

$$l(X) = l(\alpha)$$

einer eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Beweis von Satz 1.11. Es genügt offenbar folgendes zu zeigen:

1.13 Hilfssatz. *Sei*

$$\alpha : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine reguläre Kurve und $a \in (0,1)$ *ein fest gewählter Punkt. Es existiert eine offene Umgebung* U *des Punktes* $(a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ *und ein Diffeomorphismus*

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

von U *auf eine offene Teilmenge* $V \subset \mathbb{R}^n$ *mit der Eigenschaft*

$$\varphi(t, 0, \dots, 0) = \alpha(t) \text{ für } (t, 0, \dots, 0) \in U.$$

Zusatz. *Wenn* α *überdies eine topologische Abbildung von* $(0,1)$ *auf sein Bild* $X = \alpha((0,1))$ *definiert, so kann man* U *so wählen, daß gilt:*

$$\varphi^{-1}(V \cap X) = \left\{ x \in V, \quad x_2 = \dots = x_n = 0 \right\}$$

Man versteht φ und φ^{-1} als „lokale Koordinatentransformation“. Der Zusatz sagt aus, daß $X \cap U$ nach einer lokalen Koordinatentransformation als Geradenstückchen in einer einen offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ erscheint.

Beweis von 1.13. Nach dem Satz für umkehrbare Funktionen genügt es, eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (a, 0, \dots, 0) \in U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

so zu konstruieren, daß die Jacobimatrix von φ in $(a, 0, \dots, 0)$ invertierbar ist. Wir machen den Ansatz

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1) + A(x_2, \dots, x_n)$$

mit einer linearen Abbildung A,

$$A : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\varphi(t, 0, \dots, 0) = \alpha(t).$$

Die Jacobimatrix von φ in $(a, 0, 0, \dots, 0)$ ist gleich

$$\begin{pmatrix} \dot\alpha_1(a) & \\ \vdots & A \\ \dot\alpha_n(a) & \end{pmatrix},$$

wobei jetzt $A = A^{(n,n-1)}$ die der linearen Abbildung entsprechende Matrix bezeichne. Nach dem Basisergänzungssatz aus der linearen Algebra kann diese so gewählt werden, daß die Jacobimatrix $J(\varphi;(a,0,\dots,0))$ invertierbar ist, da nach Voraussetzung der Vektor $\dot\varphi(a)$ von 0 verschieden ist.

Zum Beweis des Zusatzes nutzt man aus, daß die Menge aller $\alpha(t)$ mit $(t,0,\dots,0) \in U$ eine offene Teilmenge von X ist, wenn man annimmt, daß α eine topologische Abbildung von $(0,1)$ auf X vermittelt. Nach Definition der offenen Mengen in X ist diese der Durchschnitt einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ mit X (s. V.3.4). Man ersetze nun V durch $V \cap W$ und U durch das Urbild von $V \cap W$ bezüglich φ. □

Bekanntlich ist eine bijektive und stetige Abbildung metrischer Räume nicht immer topologisch, d.h. die Umkehrabbildung muß nicht stetig ist. Ein bekanntes Gegenbeispiel ist die Abbildung

$$[0,2\pi) \longrightarrow \{(x,y);\ x^2+y^2=1\}, \quad t \longmapsto (\cos t, \sin t).$$

Diese ist stetig und bijektiv, sie kann aber nicht topologisch sein, da die rechte Seite, nicht jedoch die linke Seite kompakt ist.

Insofern kann man nicht erwarten, daß eine bijektive und reguläre Abbildung $\alpha : (0,1) \to X$, $X \subset \mathbb{R}^n$, topologisch ist, wie es in der Definition 1.10 gefordert wird.

Eine Sonderrolle spielt übrigens die Analysis I. Bekanntlich ist die Umkehrabbildung einer stetigen und bijektiven zwischen Intervallen I, J der reellemn Geraden automatisch stetig!

Ein einfaches Kriterium für die Stetigkeit einer Umkehrabbildung ist:

1.14 Bemerkung. *Eine stetige und bijektive Abbildung $f : X \to Y$ metrischer Räume ist sicherlich dann topologisch, wenn X kompakt ist.*

Beweis. Eine Abbildung metrischer Räume ist genau dann stetig, wenn das Urbild beliebiger abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. Angewendet auf die Umkherabbildung bedeutet dies: Das Bild $f(A)$ einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$ ist kompakt. Als abgeschlossenen Teilmenge eines kompakten Raums ist A selbst kompakt. Das Bild von $f(A)$ eines Kompaktums A ist stets kompakt. Kompakte teile sind abgeschlossen.

Nützlich ist gelegentlich eine Verallgemeinerung von 1.14:

1.15 Hilfssatz. *Seien X, Y metrische Räume und $U \subset X$, $V \subset Y$ Teilmengen mit kompakten Abschlüssen $\bar U$, $\bar V$. Die Menge U sei offen in X. Gegeben sei eine stetige und bijektive Abbildung $\alpha : U \to V$, welche sich zu einer stetigen Abbildung $\bar\alpha : \bar U \to \bar V$ fortsetzen läßt. Es gelte $\bar\alpha(\bar U - U) \subset \bar V - V$. Dann ist α topologisch.*

Beweis. Die Umkehrabbildung von α ist genau dann stetig, wenn das Urbild einer beliebigen abgschlossenen Menge $A \subset U$ abgeschlossen ist, wenn also $\alpha(A)$ in U abgeschlossen ist. Die Menge $A \cup \partial(U)$ ($\partial(U) = \bar{U} - U$) ist abgeschlossen in $\bar{U}$ und damit kompakt. Daher ist $\bar{\alpha}(A \cup \partial(U))$ kompakt, da das Bild eines Kompaktums unter einer stetigen Abbildung stets kompakt ist. Es folgt, daß

$$V \cap \bar{\alpha}(A \cup \partial(U)) \quad (= \alpha(A))$$

in V abgschlossen ist.

Ein einfaches Beispiel ist die Kurve $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Aus Hilfssatz 1.15 folgt, daß durch α das offene Intervall $(0, 1)$ *topologisch* auf die Einheitskreislinie ohne den Punkt $(1, 0)$ abgebildet wird. Die Umkehrabbildung von α kann natürlich nicht in den Punkt $(1, 0)$ stetig fortgesetzt werden. Aber 1.15 läßt sich anwenden!

Eine leichte Verallgemeinerung der Invarianz der Bogenlänge besagt:

1.16 Hilfssatz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn das Integral*

$$\int_0^1 f(\alpha(t)) \, \|\dot{\alpha}(t)\| \; dt$$

für eine reguläre Parametrisierung $\alpha : (0, 1) \longrightarrow X$ existiert (im Sinne der absoluten Konvergenz), so existiert es auch für jede andere reguläre Parametrisierung und der Wert hängt von der Wahl der Parametrisierung nicht ab.

Dieser Hilfssatz rechtfertigt die Bezeichnung

$$l_f(X) = \int_0^1 f(\alpha(t)) \, \|\dot{\alpha}(t)\| \; dt.$$

Im Falle $f \equiv 1$ erhält man die Bogenlänge

$$l(X) = l_1(X).$$

Der Nachteil des Konzepts der parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten ist der, daß einfache Linien wie die Kreislinie

$$S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 = 1\right\}$$

nicht regulär parametrisierbar sind. Erst wenn man aus S^1 einen Punkt herausnimmt, etwa $(1, 0)$, erhält man eine parametrisierbare eindimensionale Mannigfaltigkeit

$$\alpha : (0, 1) \longrightarrow X = S^1 - \{(1, 0)\},$$
$$\alpha(t) = (\cos 2\pi i t, \sin 2\pi i t).$$

Deren Bogenlänge ist

$$l(X) = 2\pi.$$

Man möchte natürlich diese Bogenlänge auch der vollen Kreislinie zukommen lassen. Im vorliegenden eindimensionalen Fall könnte man an eine Begriffsbildung der folgenden Art denken:

Man betrachtet Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine endliche Teilmenge $S \subset X$, so daß

$$X - S = X_1 \cup \ldots \cup X_m$$

sich als disjunkte Vereinigung von endlich vielen eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten schreiben läßt.

Man definiert dann

$$l(X) = l(X_1) + \cdots + l(X_m).$$

Dieses Konzept ließe sich durchaus streng durchführen, hat aber den Nachteil, daß es sich nur schlecht auf höherdimensionale Mannigfaltigkeiten verallgemeinern läßt.

Aus diesem Grund verfolgen wir diesen Gedankengang zunächst nicht weiter und wenden uns zunächst einmal höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten zu.

2. Oberflächenintegrale

Wir wollen den Inhalt einer Fläche, allgemein einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit definieren und beschränken uns zunächst auf den Fall parametrisierbarer Mannigfaltigkeiten.

2.1 Definition. *Eine Abbildung*

$$\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad V \subset \mathbb{R}^d \text{ offen},$$

heißt ***regulär****, falls sie stetig differenzierbar ist und falls der Rang der Jacobimatrix $J(\alpha; a)$ in jedem Punkt $a \in V$ den Rang d hat.*

Dies bedeutet, daß die d Spalten dieser Matrix linear unabhängig sind. Es gilt insbesondere $d \leq n$. Da sich linear unabhängige Vektoren stets zu einer invertierbaren Matrix ergänzen lassen, kann man die Regularität von α auch so definieren:

Die Matrix $J(\alpha; a)$ läßt sich zu einer invertierbaren $n \times n$-Matrix ergänzen,

$$(J(\alpha; a), A), \quad A = A^{(n,n-d)}.$$

Ähnlich wie beim Beweis von 1.13 betrachten wir die Abbildung

$$\varphi(x, y) = \alpha(x) + A(y) \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ y \in \mathbb{R}^{n-d})$$

und zeigen damit:

2.2 Hilfssatz. *Sei*

$$\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad V \subset \mathbb{R}^d \textit{ offen},$$

eine reguläre Abbildung und $a \in V$ ein Punkt. Es existiert eine offene Umgebung $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ von $(a, 0)$ und ein Diffeomorphismus

$$\varphi : \tilde{V} \xrightarrow{\sim} \tilde{U}, \quad \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \textit{ offen},$$

so daß

$$\varphi(x, 0) = \alpha(x) \quad \textit{für } (x, 0) \in \tilde{V}$$

gilt.

Zusatz. *Wenn α eine topologische Abbildung auf sein Bild X definiert, kann man zusätzlich erreichen:*

$$\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap X) = \left\{ x \in \tilde{V}; \quad x_{d+1} = \cdots = x_n = 0 \right\}.$$

2.3 Definition. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt d-dimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit, falls es einen offenen Teil $V \subset \mathbb{R}^d$, d geeignet, und eine topologische und reguläre Abbildung*

$$\alpha : V \longrightarrow X$$

gibt.

Wir nennen wieder α eine reguläre Parametrisierung von X.

Aus Hilfssatz 2.2 folgert man in Analogie zu 1.11

2.4 Hilfssatz. *Seien*

$$\alpha : V \longrightarrow X, \quad V \subset \mathbb{R}^d \textit{ offen},$$
$$\beta : V' \longrightarrow X, \quad V' \subset \mathbb{R}^{d'} \textit{ offen},$$

zwei reguläre Parametrisierungen ein und derselben Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind die Abbildungen $\beta^{-1} \circ \alpha$ und $\alpha^{-1} \circ \beta$ stetig differenzierbar.

2.5 Folgerung. *Wenn X nicht leer ist, gilt $d = d'$.*

Man nennt d die Dimension von X. Diese ist also unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

Da reguläre Parametrisierungen topologisch sind, ist die Mannigfaltigkeit genau dann zusammenhängend, wenn das Parametergebiet V zusammenhängend ist. Im Falle $d = 1$ sind die offenen Teile des $\mathbb{R}^d$ genau die offenen Intervalle. Jedes offene Intervall ist diffeomorph zum offenen Einheitsintervall. Wir erhalten also: *Die eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten im Sinne von 1.10 sind genau die parametrisierbaren Mannigfaltigkeiten der Dimension $d = 1$ im Sinne von 2.3, welche topologisch zusammenhängend sind.*

Beispiel: Sei

$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1};\quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}.$$

Diese Menge ist nicht regulär parametrisierbar, wohl aber, wenn man sie eines Punktes beraubt

$$X = S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}.$$

Eine reguläre Parametrisierung erhält man beispielsweise durch die stereographische Projektion ausgehend von $(0, 0, \cdots, 0, 1)$.

Wir wollen den Flächeninhalt einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit X definieren und betrachten dazu eine Parametrisierung

$$\alpha : V \xrightarrow{\sim} X, \quad V \subset \mathbb{R}^d \text{ offen.}$$

Wir wollen uns vom Fall $n = 1$ leiten lassen. Dort haben wir das Skalarprodukt von $\dot\alpha(t)$ mit sich selbst betrachtet und daraus die Wurzel gezogen.

Anstelle des Skalarprodukts betrachten wir die $d \times d$-Matrix

$$g(x) := J(\alpha; x)' J(\alpha; x).$$

Dabei bezeichne $J(\alpha; x)'$ die transponierte (gestürzte) Matrix $J(\alpha; x)$. Die Matrix $g(x)$ ist für jedes $x \in V$ *positiv definit.* Da diese Tatsache sehr wichtig ist, wollen wir sie genauer formulieren und beweisen.

2.6 Hilfssatz. *Sei $A = A^{(n,d)}$ Matrix vom Rang d. Dann ist die Matrix*

$$S = A'A$$

positiv definit. Insbesondere ist ihre Determinante positiv.

Beweis. Sei x ein d-dimensionaler Spaltenvektor. Dann gilt

$$\begin{aligned} S[x] &= x'Sx \quad \Big(= \sum s_{ij}x_ix_j\Big) \\ &= \langle Ax, Ax\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann nur dann gleich 0 sein, falls $Ax = 0$. Da A den Maximalrang hat, folgt hieraus $x = 0$. □

Zurück zu unserer Situation: Die Matrix $g(x) = J(\alpha; x)'J(\alpha; x)$ ist positiv definit. Wir können daher die positive Wurzel aus ihrer Determinante betrachten und diese integrieren

$$\int\limits_V \sqrt{\det g(x)}\; dx_1 \cdots dx_n.$$

(Der Integrand liegt in der Baireschen Klasse, der Integrand ist also immer definiert, kann aber natürlich den Wert ∞ annehmen.)

Wir wollen zeigen, daß dieses Integral nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt und rechnen dazu zunächst aus, wie sich $g(x)$ beim Übergang zu einer anderen Parametrisierung verhält.

Seien also

$$\alpha : V_\alpha \longrightarrow X, \quad \beta : V_\beta \longrightarrow X$$

zwei reguläre Parametrisierungen. Wir wissen, daß

$$\chi = \beta^{-1} \circ \alpha : V_\alpha \longrightarrow V_\beta$$

ein Diffeomorphismus ist.

Wir betrachten einen Punkt $x \in V_\alpha$ und bezeichnen den entsprechenden Punkt aus V_β mit $y = \chi(x)$. Wendet man die Kettenregel an auf die Situation $\beta \circ \chi = \alpha$, so folgt

$$J(\alpha; x) = J(\beta; y) \cdot J(\chi; x)$$

und hieraus

$$g_\alpha(x) = J(\chi; x)'g_\beta(x)J(\chi; x).$$

Benutzt man die Multiplikativität der Determinante, so folgt

$$\sqrt{\det g_\alpha(x)} = |\det J(\chi; x)| \sqrt{\det g_\beta(y)}.$$

Unser Ziel war es,

$$\int\limits_{V_\alpha} \sqrt{\det g_\alpha(x)}\; dx = \int\limits_{V_\beta} \sqrt{\det g_\beta(y)}\; dy$$

zu zeigen. Dies folgt nun aus der *Transformationsformel für n-fache Integrale.* □

Eine leichte Verallgemeinerung besagt

2.7 Hilfssatz. *Seien*

$$\alpha : V_\alpha \longrightarrow X, \quad \beta : V_\beta \longrightarrow X$$

zwei reguläre Parametrisierungen einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit X und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int\limits_{V_\alpha} f(\alpha(x)) \sqrt{\det g_\alpha(x)}\; dx = \int\limits_{V_\beta} f(\beta(x)) \sqrt{\det g_\beta(x)}\; dx,$$

sofern eins der beiden Integrale existiert.

Die Existenz ist immer gesichert, wenn f nicht negativ ist, da dann der Integrand in der Baireschen Klasse liegt (das Integral kann dann allerdings den Wert ∞ annehmen) aber auch, wenn f kompakten Träger hat (dann ist das Integral endlich).

Von besonderem Interesse ist der zuvor behandelte Fall $f \equiv 1$. Man nennt dann

$$v(X) = \int\limits_V \sqrt{\det g(x)}\; dx_1 \cdots dx_d$$

den Inhalt —oder das d-dimensionale Volumen — der Mannigfaltigkeit X.

Inwiefern stimmt $v(X)$ mit dem anschaulichen Begriff des Inhalts überein? Eine ähnlich einfache Begründung wie im Falle $d = 1$ ist allgemein nicht so ohne weiteres möglich.

Wir begnügen uns mit folgender, etwas schwammiger Argumentation:

Da man sich das Integral als Summe über kleine Flächenstücke vorstellen kann und da die Jacobimatrix $J(\alpha; a)$ die Abbildung α im Kleinen linear approximiert, kann man annehmen, daß

$$\alpha(x) = A(x)$$

eine lineare Abbildung ist. Da sich außerdem weder das Integral noch das anschauliche Volumen ändert, wenn man X einer Drehung (orthogonalen Transformation) unterwirft, kann man annehmen, daß X in dem Unterraum

$$x_{d+1} = \cdots = x_n$$

enthalten ist. Dies bedeutet, daß man überhaupt $d = n$ annehmen kann. Dann ist aber

$$A : V \xrightarrow{\sim} X$$

ein durch eine lineare Abbildung vermittelter Diffeomorphismus von offenen Teile des $\mathbb{R}^n$. Die Formel

$$\mathrm{vol}(X) = |\det A| \,\mathrm{vol}(V)$$

steht mit der *Bedeutung des Betrags der Determinante als Verzerrungsfaktor bei der Volumenberechnung* im Einklang.

Wir kommen nun zum Begriff der (in den $\mathbb{R}^n$) eingebetteten, nicht notwendig global parametrisierbaren Mannigfaltigkeit.

2.8 Definition. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt eingebettete (differenzierbare) d-dimensionale Mannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung $a \in U \subset X$ gibt, so daß $U \cap X$ eine d-dimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit ist.*

Wenn X nicht leer ist, so ist die Dimension d eindeutig bestimmt. Man nennt

$$\dim_a(X) = d$$

die Dimension von X im Punkt a. Natürlich ist d dann auch die Dimension von X in allen Punkten aus einer vollen Umgebung von a. Dies bedeutet, daß $a \mapsto \dim_a(X)$ lokal konstant ist. Ist also X zusammenhängend, so ist d in allen Punkten gleich. Man nennt dann d die Dimension von X.

In diesem Zusammenhang weisen wir noch darauf hin, daß beliebige *offene* Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ n-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind.

Eine andere Möglichkeit, den Begriff der eingebetteten Mannigfaltigkeit einzuführen, liefert folgender Satz.

2.9 Satz. *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus*

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

auf einen anderen offenen Teil $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß das Bild $\varphi(X \cap U)$ in V gleich dem Durchschnitt von V mit einem d-dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

Man kann natürlich immer erreichen, daß der Untervektorraum durch die Gleichungen $x_{d+1} = \ldots = x_n = 0$ definiert wird.

Beweis von 2.9. Sei $\alpha : V \to X$ eine reguläre Parametrisierung einer eingebetteten Mannigfaltigkeit im Sinne von Definition 2.3. Wir müssen zeigen, daß X eine eingebettete Mannigfaltigkeit im Sinne von 2.8 ist: Dies folgt unmittelbar aus 2.2 (den Zusatz eingeschlossen).

Im Lichte von Satz 2.9 kann man sagen:

> *Eingebettete Mannigfaltigkeiten $X \subset \mathbb{R}^n$ sind Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, welche sich lokal stetig differenzierbar eben bügeln lassen.*

Man soll sich also eingebettete Mannigfaltigkeiten glatt, ohne Ecken, Kanten, Überkreuzungen u.s.w. vorstellen. Selbstverständlich sind eingebettete Mannigfaltigkeiten lokal abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Unser nächstes Ziel ist es, das Volumen eingebetteter Mannigfaltigkeiten zu definieren. Der naheliegende Gedanke, sie in parametrisierbare Stücke zu zertrümmern und die Inhalte der Trümmerstücke aufzusummieren, läßt sich nur schlecht realisieren, da man zwei beliebige Zertrümmerungen nur schlecht vergleichen kann und daher der Beweis der Unabhängigkeit von der Wahl der Zertrümmerung schwierig ist. Im nächsten Abschnitt lernen wir mit der „Zerlegung der Eins“ eine Art fließende Zertrümmerung kennen, welche diese Schwierigkeiten in eleganter Weise umgeht.

3. Zerlegung der Eins

Im folgenden wollen wir eingebettete Mannigfaltigkeiten $X \subset \mathbb{R}^n$ selbst als Räume auffassen, indem wir sie mit der induzierten Metrik versehen. Wir erinnern daran, daß eine Teilmenge $U \subset X$ genau dann offen bezüglich der induzierten Metrik ist, wenn es eine offene Teilmenge $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $U = \widetilde{U} \cap X$ gibt. Wir weisen noch einmal darauf hin, daß alle topologischen Begriffe (wie Stetigkeit und Konvergenz) auf dem Begriff der offenen Menge aufgebaut werden können.

Unter einem „Raum“ kann im folgenden immer ein metrischer Raum verstanden werden. Da es aber auf die Metrik selbst bei unseren Betrachtungen nicht ankommen wird, sondern nur auf die abgeleiteten topologischen Begriffsbildungen, also letztlich auf das Gefüge der offenen Mengen, so kann der Begriff „metrischer Raum“ auch durch „Hausdorffraum“ ersetzt werden, soweit dieser Begriff bekannt ist.

Sei also X ein Raum (in unseren Anwendungen wird X eine Mannigfaltigkeit sein) und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Sei $f \in C_c(X)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Wenn der Träger von f in U enthalten ist, so ist die Einschränkung $f|U$ in $C_c(U)$ enthalten:

$$f \in C_c(X), \quad \text{Träger}\,(f) \subset U \Longrightarrow f|U \in C_c(U).$$

Sei umgekehrt $g \in C_c(U)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann ist offensichtlich

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in U, \\ 0 & \text{für } x \notin U, \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf X und offensichtlich in $C_c(U)$ enthalten. Die Funktion f ist auf den beiden *offenen* Mengen U und $X - \text{Träger}\,(f)$ stetig, diese überdecken aber X. Wir machen hierbei von folgender noch mehrfach verwendeter trivialen Tatsache Gebrauch:

Sei $X = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung von X und $f : X \to Y$ eine Abbildung in eine weiteren metrischen Raum Y. Genau dann ist f stetig, wenn die Einschränkung von f auf jedes U_i stetig ist.

Wir erhalten also:

Die Zuordnung $g \mapsto f$ definiert eine injektive Abbildung

$$C_c(U) \hookrightarrow C_c(X).$$

Ihr Bild besteht aus allen Funktionen $f \in C_c(X)$, deren Träger in U enthalten sind.

Wenn Verwechslungen nicht zu befürchten sind, werden wir die Funktionen aus $C_c(U)$ mit den (durch 0 fortgesetzten) Funktionen aus $C_c(X)$ identifizieren.

Wir nehmen nun an, es sei eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in A} U_i$$

durch (i. a. unendlich viele) offene Teilmengen fest vorgegeben. Wir denken dabei beispielsweise an eine Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$. Die Überdeckung bestehe in diesem Falle beispielsweise aus solchen offenen Teilen, welche eine (reguläre) Parametrisierung gestatten.

Außerdem sei für jeden Index i eine lineare Abbildung

$$I_i : C_c(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Die Linearität bedeute natürlich

$$I_i(af + bg) = aI_i(f) + bI_i(g) \quad (f, g \in C_c(U_i), \;\; a, b \in \mathbb{R}).$$

3.1 Problem. *Existiert eine lineare Abbildung*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$I|C_c(U_i) = I_i \quad \textit{für } i \in I$$

und ist diese eindeutig bestimmt?

Man leitet sofort folgende notwendige Bedingung für die Existenz von I ab. Seien $i, j \in I$ zwei Indizes und $f \in C_c(X)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, deren Träger sowohl in U_i, als auch in U_j enthalten ist. Dann muß

$$I_i(f) = I_j(f)$$

gelten.

Die *Technik der Zerlegung der Eins* ist ein elegantes Mittel, dieses und ähnliche Probleme in einer großen Klasse von Fällen positiv zu beantworten.

Wir betrachten jetzt ein Kompaktum $K \subset X$ (beispielsweise den Träger einer Funktion $f \in C_c(X)$) und eine Überdeckung von K durch endlich viele offene Teilmengen von X,

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m.$$

(Eine solche endliche Überdeckung kann man beispielsweise aus der gegebenen unendlichen Überdeckung per Definition der Kompaktheit gewinnen.)

3.2 Definition. *Eine **Zerlegung der Eins** auf dem Kompaktum $K \subset X$ in Bezug auf die Überdeckung*

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m, \quad U_i \subset X \text{ offen,}$$

ist ein m-Tupel von Funktionen $f_i \in C_c(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $0 \le f_i \le 1 \quad (1 \le i \le m)$,
2) $\textit{Träger}(f_i) \subset U_i$,
3) $f_1(x) + \cdots + f_m(x) = 1 \quad$ *für alle* $x \in K$.

3.3 Definition. *Der Raum X gestattet Zerlegung der Eins, falls zu jedem Kompaktum $K \subset X$ und zu jeder offenen Überdeckung*

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m$$

eine Zerlegung der Eins existiert.

Als nächstes wollen wir klarstellen, daß für Räume, welche Zerlegung der Eins gestatten, das eingangs gestellte Problem positiv beantwortet werden kann.

3.4 Hilfssatz. *Sei X ein Raum, welcher Zerlegung der Eins gestattet. Außerdem sei eine offene Überdeckung*

$$X = \bigcup_{i \in A} U_i$$

und für jedes $i \in A$ eine lineare Abbildung

$$I_i : C_c(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Für je zwei Indizes i, j gelte

$$I_i(f) = I_j(f), \quad \text{falls } f \in C_c(U_i \cap U_j).$$

Dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$I(f) = I_i(f), \quad \text{falls } f \in C_c(U_i).$$

Beweis. Sei $f \in C_c(X)$ und $K \subset X$ ein Kompaktum, welches den Träger von f umfaßt,

$$\text{Träger}\,(f) \subset K.$$

Wir wählen aus der Überdeckung (U_i) eine endliche Teilüberdeckung aus,

$$K \subset U_{i(1)} \cup \cdots \cup U_{i(m)}.$$

Zu dieser Situation wählen wir eine Zerlegung der 1

$$f_\nu \in C_c(U_{i(\nu)}) \quad (1 \leq \nu \leq m).$$

Der Träger von $f \cdot f_\nu$ ist in $U_{i(\nu)}$ enthalten, der Ausdruck

$$I_{i(\nu)}(f \cdot f_\nu)$$

ist also definiert. Wir haben keine andere Wahl als

$$I(f) := \sum_{\nu=1}^{m} I_{i(\nu)}(f \cdot f_\nu)$$

zu definieren. Wir müssen allerdings zeigen, daß $I(f)$ unabhängig von der Wahl von K, der Auswahl der endlichen Teilüberdeckung und der Wahl der Zerlegung der 1 ist.

Die Stärke der Technik der Zerlegung der Eins liegt darin, daß diese Unabhängigkeit fast trivial ist.

Beweis der Unabhängigkeit

Sei also eine endliche Teilüberdeckung

$$K' \subset U_{j(1)} \cup \cdots \cup U_{j(m')}$$

eines Kompaktums K' gegeben, welches ebenfalls den Träger von f umfaßt. Wir betrachten hierzu eine Zerlegung der Eins $g_1, \cdots, g_{m'}$ und müssen

$$\sum_{\nu=1}^{m} I_{i(\nu)}(f_\nu f) = \sum_{\mu=1}^{m'} I_{j(\mu)}(g_\mu f)$$

zeigen. Der Trick besteht nun darin, die Funktion

$$f_\nu g_\mu f, \quad 1 \leq \nu \leq m, \quad 1 \leq \mu \leq m',$$

zu betrachten. Ihr Träger liegt sowohl in $U_{i(\nu)}$ als auch in $U_{j(\mu)}$. Nach Voraussetzung gilt

$$I_{i(\nu)}(f_\nu \cdot g_\mu f) = I_{j(\mu)}(f_\nu \cdot g_\mu f)$$

Wir summieren auf der linken Seite über μ. Nutzt man die Linearität von $I_{i(\nu)}$ aus und benutzt man

$$\sum_\mu f_\nu g_\mu f = f_\nu f,$$

so erhält man $I_{i(\nu)}(f_\nu f)$. Summiert man anschließend über ν, so erhält man $\sum I_{i(\nu)}(f_\nu f)$. Auf der rechten Seite verfährt man umgekehrt, man summiert zunächst über ν und dann über μ und erhält danach

$$\sum I_{j(\mu)}(g_\mu f).$$

Die Linearität

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$$

ist trivial, da man ein Kompaktum K so wählen kann, daß K sowohl den Träger von f als auch den Träger von g umfaßt.

Damit ist Hilfssatz 3.4 bewiesen. □

3.5 Definition. *Ein Raum X heißt topologische Mannigfaltigkeit, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung $U(a)$ gibt, welche zu einem offenen Teil eines $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.*

Beispielsweise sind eingebettete Mannigfaltigkeiten $X \subset \mathbb{R}^n$ topologische Mannigfaltigkeiten (wegen 2.9).

Als nächstes widmen wir uns der Frage der Existenz einer Zerlegung der Eins und formulieren zunächst zwei einfache Hilfssätze.

3.6 Hilfssatz. *Es existiert eine stetige monoton fallende Funktion*

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

1) $$h(t) = 0 \quad \textit{für } t \geq 3/2,$$
2) $$h(t) = 1 \quad \textit{für } t \leq 1/2.$$

3.7 Hilfssatz. *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Der Träger von f sei in der Nichtnullstellenmenge von g enthalten. Dann ist die Funktion*

$$h(x) = \begin{cases} f(x)/g(x), & \textit{falls } g(x) \neq 0, \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

stetig auf ganz X.

Die Funktion h ist nach Konstruktion auf der Nichtnullstellenmenge von g stetig, denn dort ist $g(x) \neq 0$. Sie ist auch auf dem Komplement des Trägers von f stetig, denn dort ist sie identisch 0. Damit haben wir eine Überdeckung von X durch zwei offene Mengen gefunden, auf denen h stetig ist.

3.8 Satz. *Topologische Mannigfaltigkeiten gestatten Zerlegung der Eins.*

Beweis. Wir betrachten ein Kompaktum $K \subset X$ und eine Überdeckung von K durch endlich viele offene Teile von X,

$$K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Eine weitere offene Überdeckung

$$K \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m$$

heißt *Verfeinerung* der ursprünglichen, falls jedes V_i $(1 \leq i \leq m)$ in mindestens einem U_j $(1 \leq j \leq n)$ enthalten ist. Man überlegt sich leicht: Wenn zu der Verfeinerung eine Zerlegung der Eins existiert, dann existiert auch eine zu der ursprünglichen Überdeckung. Wir werden zunächst eine geeignete Verfeinerung der ursprünglichen Überdeckung konstruieren. Zu diesem Zweck betrachten wir zu jedem Punkt $a \in K$ eine offene Umgebung $U' = U'(a)$, welche sich topologisch auf die Einheitskugel

$$\mathbf{E} = \{x \in \mathbb{R}^d; \quad \|x\| < 1\}$$

abbilden läßt. Eine solche existiert, da X eine Mannigfaltigkeit ist. Wir können und wollen $U'(a)$ so klein wählen, daß es in mindestens einem U_i enthalten ist. Sei $\varphi = \varphi_a : \mathbf{E} \to U'(a)$ eine im folgenden fest gewählte topologische Abbildung. Wir können dann

$$U = U(a) = \{x \in U'; \quad \|\varphi(x)\| < 1/2\}$$

betrachten. Diese Mengen sind offen und überdecken K. Da K kompakt ist, wird K schon von endlich vielen der $U(a)$ überdeckt. Wir haben so eine Verfeinerung unserer Ausgangsüberdeckung gewonnen. Da wir diese durch die Verfeinerung ersetzen dürfen, können wir o.B.d.A. annehmen:

Es existieren offene Mengen $U_1', \dots, U_m'$ in X und topologische Abbildungen

$$\varphi_i : U_i' \longrightarrow \mathbf{E}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

so daß

$$U_i = \{x \in U_i' : \quad \|\varphi_i(x)\| < 1/2\}.$$

Diese Konstruktion garantiert, daß die Mengen U_i und auch ihr Rand

$$\partial U_i = \{x \in U_i' : \quad \|\varphi_i(x)\| = 1/2\}$$

von besonders einfacher topologischer Natur sind.

Wir betrachten nun eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den in 3.6 angegebenen Eigenschaften. Die Funktion

$$H_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H_i(x) = h(|\varphi_i(x)|),$$

ist für jedes $i \in \{1, \dots n\}$ stetig und hat kompakten Träger. Wir wissen, daß die durch 0 auf ganz X fortgesetzte Funktion ebenfalls stetig ist und kompakten Träger hat. Diese fortgesetzte Funktion bezeichnen wir ebenfalls mit H_i.

Für die Konstruktion benötigen wir auch noch eine Überdeckung des Randes der Nichtnullstellenmenge von $H_1 + \dots + H_n$,

$$A = \partial\{x \in X; \quad H_1 + \dots + H_n \neq 0\}.$$

Dieser ist kompakt und disjunkt zu K. Nochmalige Anwendung der Überdeckungseigenschaft liefert die Existenz endlich vieler weiterer offener Mengen $U'_{m+1}, \dots, U'_N$ $(n \leq N)$ sowie topologischer Abbildungen

$$\varphi_i : U'_i \longrightarrow \mathbf{E}, \quad n < i \leq N,$$

so daß U'_i und die durch

$$U_i = \{x \in U'_i : \quad \|\varphi_i(x)\| < 1/2\} \quad n < i \leq N.$$

definierten offenen Teilmengen die folgenden beiden Eigenschaften haben:

a) $A \subset U_{n+1} \cup \dots \cup U_N$.

b) $U'_i \cap K = \emptyset$ für $n < i \leq N$.

Wir konstruieren dann die Funktionen $H_{n+1}, \dots, H_N$ in Analogie zu den Funktionen $H_1, \dots, H_n$. Nach Konstruktion von $U_{n+1}, \dots, U_N$ ist der Träger von H_i für $1 \leq i \leq n$ im Innern der Nichtnullstellenmenge von $H_1 + \cdots + H_N$ enthalten. Nach Hilfssatz 3.7 sind die Funktionen

$$h_i(x) = \begin{cases} H_i(x)/(H_1(x) + \dots H_N(x)), & \text{falls } H_i(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $i \in \{1 \leq i \leq n\}$ stetig. Sie haben kompakten Träger. Außerdem gilt für $x \in K$

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(x) = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} H_\nu(x)}{\sum_{\nu=1}^{N} H_\nu(x)} = 1 \quad ,$$

da nach Konstruktion von $U'_{n+1}, \dots, U'_N$ die Funktionen $H_{n+1}, \dots, H_N$ auf K verschwinden. Wir haben somit eine Zerlegung der Eins konstruiert. □

Sei nun $X \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit. Jeder Punkt $a \in X$ besitzt also eine offene Umgebung U mit einer regulären Parametrisierung

$$\alpha : V \xrightarrow{\sim} U \quad V \subset \mathbb{R}^d \text{ offen, } U \subset X \text{ offen.}$$

Wir betrachten häufig die Umkehrabbildung

$$\varphi = \alpha^{-1} : U \longrightarrow V$$

anstelle von α und schreiben

$$U = U_\varphi, \quad V = V_\varphi.$$

Wir nennen φ eine *Karte* der eingebetteten Mannigfaltigkeit X. Wenn φ die Menge aller Karten durchläuft, so erhält man eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi.$$

$\mathcal{A}$ bezeichnet die Menge all dieser Karten.

Sei nun $f \in C_c(X)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, deren Träger in einem U_φ enthalten ist. Wir betrachten

$$I_\varphi(f) = \int\limits_{V_\varphi} f(\varphi(x)) \sqrt{\det g_\varphi(x)}\, dx.$$

Dieses Integral ändert sich nicht, wenn man φ durch eine andere Karte mit dieser Eigenschaft ersetzt.

Aus den Sätzen 3.8 und 3.4 folgt

3.9 Satz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit folgender Eigenschaft. Sei $f \in C_c(X)$ und φ eine Karte mit Träger$(f) \subset U_\varphi$. Dann gilt

$$I(f) = \int\limits_{V_\varphi} f(\varphi(x)) \sqrt{\det g_\varphi(x)}\, dx.$$

Es war eigentlich eines unserer Ziele, den (d-dimensionalen) Inhalt $v(X)$ zu definieren. Wenn X kompakt ist, so ist die Funktion

$$f(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in X$$

in $C_c(X)$ enthalten und man kann in naheliegender Weise

$$v(X) := I(f) \quad (f \equiv 1)$$

definieren. Wenn jedoch X nicht kompakt ist, so muß man die Funktion $f \equiv 1$ erst durch stetige Funktionen mit kompaktem Träger approximieren. Dazu ist es zweckmäßig, die Integrationstheorie vom $\mathbb{R}^n$ ein Stück weit auf Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern und insbesondere die Bairesche Klasse für Mannigfaltigkeiten zu definieren. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

4. Radonmaße

Sei X ein (metrischer) Raum. Wir haben schon in Kapitel VII in §7 und §10 gewisse Verallgemeinerungen des Lebesgueschen Integrals angeschnitten und führen dies hier noch einmal aus:

4.1 Definition. *Ein Radonmaß auf X ist eine lineare Abbildung*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$I(f) \geq 0, \quad \textit{falls } f \geq 0.$$

Beispiel für ein Radonmaß ist das gewöhnliche Integral für stetige Funktionen mit kompaktem Träger des $\mathbb{R}^n$, aber auch das im letzten Abschnitt eingeführte Funktional $I(f)$ auf eingebetteten Mannigfaltigkeiten.

Die Integrationstheorie läßt sich auf beliebige Radonmaße weitgehend verallgemeinern. Ein paar Einschränkungen an den Raum X sind jedoch zu machen:

1) X ist ***lokal kompakt***, d. h. jeder Punkt $a \in X$ besitzt eine kompakte Umgebung.

Da wir mehr mit offenen Umgebungen arbeiten, drücken wir dies auch so aus. Es existiert eine offene Umgebung $U(a)$, deren Abschluß kompakt ist.

2) X ist ***abzählbar im Unendlichen.***

Dies bedeutet, daß es eine Folge von Kompakta $K_1, K_2, \cdots$ gibt, welche X ausschöpfen,

$$X = K_1 \cup K_2 \cup \cdots.$$

Da man K_n durch $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ ersetzen kann, darf man o. B. d. A.

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots$$

annehmen. Eine andere wichtige Bedingung ist:

3) X hat ***abzählbare Basis der Topologie***.

Dies bedeutet, daß eine Folge von offenen Mengen $U_1, U_2, \ldots$ existiert, so daß jede offene Teilmenge von X als Vereinigung von Elementen dieser Folge geschrieben werden kann.

4.2 Bemerkung. *Jeder lokal kompakte Raum mit abzählbarer Basis der Topologie ist abzählbar im Unendlichen.*

4.3 Bemerkung.
1) *Der* $\mathbb{R}^n$ *ist lokal kompakt und hat abzählbare Basis der Topologie.*
2) *Ist* X *ein lokal kompakter und im Unendlichen abzählbarer Raum, so hat auch jeder offene und jeder abgeschlossene Teilraum diese Eigenschaft.*

Folgerung: Jede eingebettete Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt und abzählbar im Unendlichen.

Die Aussage 1) ergibt sich aus der Tatsache, daß die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist. Hieraus ergibt sich, daß die Menge aller in einer offenen Menge enthaltenen kompakten Kugeln mit rationalen Radien und Mittelpunktskoordinaten abzählbar ist. Diese Kugeln überdecken die offene Menge, wie man sich leicht überlegt.

In diesem Abschnitt machen wir die

4.4 Generelle Voraussetzung. *Der Raum* X *ist lokal kompakt und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.*

4.5 Definition. *Eine Funktion*
$$f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$$
gehört der Baireschen Klasse an, falls es eine wachsende Folge
$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots$$
von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und mit der Eigenschaft
$$f(x) = \sup f_k(x)$$
gibt.

Wie im Falle des Lebesgue-Integrals beweist man

4.6 Bemerkung. *Sei* $f \in B$ *aus der Baireschen Klasse. Die Definition*
$$I(f) = \mathrm{Sup}(I(f_k))$$
ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge f_k
$$f_k \uparrow f, \quad f_k \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

Außerdem gelten die Stabilitätseigenschaften:

1) Sei f_k eine wachsende Folge von Funktionen der Baireschen Klasse, dann ist auch
$$f = \mathrm{Sup}\, f_k$$
in der Baireschen Klasse und es gilt
$$I(f) = \sup I(f_k).$$

2) Seien $f, g \in B$ und a, b zwei positive Zahlen. Dann ist auch $af + bg \in B$ und es gilt
$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g).$$

Die Existenz von Zerlegungen der Eins impliziert insbesondere

4.7 Bemerkung. *Zu jedem Kompaktum $K \subset X$ existiert eine Funktion $f \in C_c(X)$ mit der Eigenschaft*

1) $0 \le f \le 1,$

2) $f(x) = 1 \quad$ *für* $x \in K.$

Da X im Unendlichen abzählbar ist, folgt hieraus

4.8 Hilfssatz. *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine nirgends negative stetige Funktion auf einem offenen Teil $U \subset X$. Dann ist die durch 0 auf ganz X fortgesetzte Funktion $\widetilde{f}$ in der Baireschen Klasse. Insbesondere liegt die charakteristische Funktion χ_U einer beliebigen offenen Teilmenge in der Baireschen Klasse.*

Zum Beweis schöpft man U durch abzählbar viele Kompakta aus und konstruiert mittels 4.7 (angewendet auf U anstelle von X eine Folge $f_n \in \mathcal{C}_c(X)$ stetiger Funktionen mit kompakten Trägern, deren Träger in U enthalten sind und U ausschöpfen. Man kann erreichen, daß alle f_n nirgends negativ sind und —indem man die Folge durch die neue Folge $f_1, f_1 \vee f_2, \dots$ ersetzt— daß sie monoton wachsend ist. Man bildet dann die Funktionenfolge $f_n \widetilde{f}$ und erhält eine monotone Approximation der Funktion $\widetilde{f}$ durch stetige Funktionen mit kompakten Trägern.

Das Volumen von X in bezug auf das vorgelegte Radonsche Maß ist das Integral der (Baireschen) Funktion
$$f \equiv 1.$$
Dieses ist wegen 4.8 wohldefiniert, kann aber den Wert unendlich haben. Wenn X kompakt ist, so ist das Volumen jedenfalls endlich.

Wir können die benötigten Konstruktionen zusammenfassen und sagen:

Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit der Dimension d, so ist das d-dimensionale Volumen $v(X)$ als reelle Zahl oder $+\infty$ wohldefiniert.

Man kann die Integrationstheorie von der Baireschen Klasse bis zu den integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^1(X)$ weiterführen und die grundlegenden Resultate des Lebesgue-Integrals verallgemeinern. Für unsere Zwecke ist die folgende Konstruktion ausreichend:

4.9 Definition. *Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt in bezug auf das Radonmaß I* ***zulässig****, falls sie sich in der Form*

$$f = g - h$$

mit zwei Baireschen Funktionen ohne Unendlichkeitsstellen und mit endlichen $I(g), I(h)$ schreiben läßt.

4.10 Bemerkung. *Die Definition*

$$I(f) = I(g) - I(h)$$

ist von der Wahl der Zerlegung unabhängig.

Beweis: Aus

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2$$

folgt

$$g_1 + h_2 = h_1 + g_2$$

und man kann die Additivität für Funktionen der Baireschen Klasse anwenden.

4.11 Satz. *Die Menge der zulässigen Funktionen ist ein Vektorraum von Funktionen, welche die Klasse der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger umfaßt. Die Zuordnung*

$$f \longmapsto I(f)$$

ist linear auf dem Vektorraum der zulässigen Funktionen und es gilt

$$f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0.$$

4.12 Hilfssatz. *Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge mit kompaktem Abschluß und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist die Funktion*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in U, \\ 0 & \text{für } x \notin U \end{cases}$$

zulässig.

Beweis. Wir können annehmen, daß f nirgends negativ ist, da man f in seinen positiven und negativen Teil zerlegen kann. Dann ist die Funktion $\widetilde{f}$ Bairesch und man muß nur zeigen, daß ihr Integral endlich ist. Man konstruiert mittels 4.7 leicht eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger und mit der Eigenschaft $g \leq f$.

Wir schreiben wieder

$$\int_U f(x)\, d\mu = I(\tilde{f}).$$

Damit hat man eine große für unsere Zwecke ausreichende Klasse von integrierbaren Funktionen gewonnen. (Die Grenzwertsätze fehlen, aber diese brauchen wir im folgenden nicht.)

Auch der Begriff der Nullmenge läßt sich ohne große Probleme verallgemeinern.

4.13 Definition. *Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt Nullmenge (in Bezug auf das vorgelegte Radonmaß I), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nirgends negative Bairesche Funktion f mit der Eigenschaft*

a) $f(x) \geq 1 \quad$ *für* $x \in A$,

b) $I(f) < \varepsilon$

gibt.

Wie im Falle des Lebesgue-Integrals im $\mathbb{R}^n$ gilt:

Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

Ist A_n eine Folge von Nullmengen, so findet man zunächst eine Folge f_n Bairescher Funktionen mit der Eigenschaft

a) $f_n(x) \geq 1 \quad$ für $x \in A_n$,

b) $I(f_n) < \varepsilon/2^n$.

Man bildet dann die monotone Folge Bairescher Funktionen $f_1, f_1 + f_2, \ldots$. Sie approximiert eine Bairesche Funktion f mit der gewünschten Eigenschaft.

Der Begriff der Nullmenge ist insbesondere in folgendem Sinne lokaler Natur:

Eine im Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem Punkt $a \in A$ eine offene Umgebung $U \subset X$ gibt, so daß $A \cap U$ eine Nullmenge ist.

Man zeigt leicht:

4.14 Hilfssatz. *Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte zulässige Funktion. Sei $U_0 \subset U$ eine offene Teilmenge, so daß das Komplement $U - U_0$ eine Nullmenge ist. Dann ist auch die Einschränkung f_0 von f auf U_0 zulässig und es gilt*

$$\int_U f(x)\, d\mu = \int_{U_0} f_0(x)\, d\mu.$$

Eine Anwendung dieses Resultates besagt: Das Volumen einer d-dimensionalen eingebetteten Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$ ändert sich nicht, wenn man eine abgeschlossene Nullmenge $A \subset X$ entfernt (das Komplement $X_0 = X - A$ ist dann in X offen und folgedessen selbst eine eingebettete Mannigfaltigkeit). Dann stimmen das Volumen von X und X_0 überein.

Beispiele von Nullmengen sind endliche Mengen.

Beispielsweise ändert sich das Volumen der n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nicht, wenn man einen Punkt entfernt. Dann erhält man aber eine regulär parametrisierbare Mannigfaltigkeit, für welche man das Volumen ausrechnen kann.

Jetzt endlich haben wir das n-dimensionale Volumen von S^n streng in den Griff bekommen!

Wir geben noch eine wichtige Klasse von Nullmengen an.

4.15 Hilfssatz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete Mannigfaltigkeit und $d\mu$ das durch 3.9 definierte Radonmaß. Jede eingebettete Mannigfaltigkeit $Y \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension $< d$, welche in X enthalten ist, ist eine Nullmenge.*

Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß der Begriff der Nullmenge lokaler Natur ist, sowie aus Satz 2.9 in Verbindung mit der Transformationsformel für n-fache Integrale.

Um den Inhalt einer eingebetteten Mannigfaltigkeit zu berechnen, darf man aus ihr also Untermannigfaltigkeiten kleinerer Dimension entfernen, man darf sie also zerschneiden. Die „Zerstückelung“ hat somit am Ende der Konstruktion eine strenge Begründung erfahren.

5. Abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Alle betrachteten Räume seien abzählbar im Unendlichen.

5.1 Definition. *Eine Karte φ auf einem (metrischen) Raum X ist eine topologische Abbildung*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi$$

eines offenen Teils $U_\varphi \subset X$ auf einen offenen Teil $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$.

Eine topologische Mannigfaltigkeit ist also ein Raum X, so daß es zu jedem Punkt $a \in X$ eine Karte φ mit $a \in U_\varphi$ gibt. Wir sagen auch kurz: Der Punkt a ist in der Karte enthalten.

5.2 Definition. *Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf einer topologischen Mannigfaltigkeit X ist eine Menge von Karten, so daß jeder Punkt aus X in mindestens einer Karte enthalten ist*

$$X = \bigcup U_\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{A}.$$

Seien

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad \psi : U_\psi \longrightarrow V_\psi$$

zwei Karten. In der Regel werden $U_\varphi \cap U_\psi$ nicht leer sein. Es ist dann sinnvoll, die offenen Mengen

$$\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset V_\varphi, \quad \psi(U_\varphi \cap U_\psi) \subset V_\psi$$

zu betrachten. Durch Einschränkung von φ und ψ bekommt man topologische Abbildungen

$$\varphi_0 : U_\varphi \cap U_\psi \longrightarrow \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$$
$$\psi_0 : U_\varphi \cap U_\psi \longrightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi)$$

Man kann dann die Abbildung $\psi_0^{-1} \circ \varphi_0$ betrachten. Der Einfachheit halber bezeichnen wir sie (entgegen streng mengentheoretischer Konvention) mit

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \longrightarrow \psi(U_\varphi \cap U_\psi).$$

Dies ist eine topologische Abbildung zwischen zwei offenen Teilen des $\mathbb{R}^n$.

5.3 Definition. *Zwei Karten φ, ψ auf X heißen **differenzierbar verträglich**, falls die Kartentransformationsabbildung*

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist.

(Wir setzen der Einfachheit halber in diesem Zusammenhang voraus, daß die Kartentransformationen unendlich oft stetig differenzierbar ist. Natürlich käme man für viele Zwecke mit wenige aus. Für die meisten Anwendungen ist dies bedeutungslos.)

5.4 Definition. *Ein Atlas $\mathcal{A}$ auf einer topologischen Mannigfaltigkeit X heißt differenzierbar, falls je zwei Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ differenzierbar verträglich sind.*

5.5 Definition. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein Paar $(X, \mathcal{A})$, bestehend aus einer topologischen Mannigfaltigkeit und einem differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}$.*

Wir wollen uns gleich klar machen, daß eingebettete differenzierbare Mannigfaltigkeiten $X \subset \mathbb{R}^n$ einen natürlichen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}$ besitzen und somit als differenzierbare Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{A})$ betrachtet werden können.

5.6 Definition. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eingebettete differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Karte*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi \quad (U_\varphi \subset X, \quad V_\varphi \subset \mathbb{R}^d \text{ offen})$$

heißt regulär, falls die Umkehrung

$$\alpha = \varphi^{-1} : V_\varphi \xrightarrow{\sim} U_\psi$$

eine reguläre Parametrisierung von U_ψ ist.

5.7 Bemerkung. *Die Menge der regulären Karten einer eingebetteten differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$ bildet einen differenzierbaren Atlas.*

Der Beweis folgt aus 2.4.

Volumenformen

Es ist nicht sinnvoll, das Volumen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren zu wollen, denn im Falle einer eingebetteten Mannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$ gehen in die Formel für das Volumen die aus der Einbettung herrührende Größe

$$\omega(x) := \sqrt{\det g_\varphi(x)}$$

ein. Man kann diese Größe aber als Zusatzstruktur ansehen und gelangt so zu folgender

5.8 Definition. *Eine* ***Volumenform*** ω *auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit* $(X, \mathcal{A})$ *ist eine Vorschrift, gemäß welcher jeder Karte* $\varphi \in \mathcal{A}$ *eine Funktion*

$$\omega_\varphi : V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R} \quad (V_\varphi \subset \mathbb{R}^n)$$

zugeordnet wird, so daß im Durchschnitt für je zwei Karten φ, ψ *folgende Umsetzungsformel gültig ist:*

Sei

$$a \in U_\varphi \cap U_\psi; \quad x = \varphi(a),\ y = \psi(a).$$

Dann gilt

$$\omega_\varphi(x) = \omega_\psi(y)\, \left|\det J(\psi^{-1} \circ \varphi; x)\right|.$$

5.9 Definition. *Sei* ω *eine Volumenform und* $a \in X$ *ein fester Punkt. Wir sagen*

1) ω *verschwindet in* a,
2) ω *ist nicht negativ in* a,
3) ω *ist positiv in* a,

falls eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ *mit* $a \in U_\varphi$ *existiert, so daß entsprechend*

$$\omega_\varphi(a) = 0, \quad \omega_\varphi(a) \geq 0, \quad \omega_\varphi(a) > 0$$

gilt.

5.10 Bemerkung. *Die in 5.9 formulierten Bedingungen 1) – 3) hängen von der Wahl der Karte* φ *nicht ab.*

Insbesondere ist es sinnvoll zu definieren:

Eine Volumenform ω ist positiv, falls sie in jedem Punkt positiv ist.

Außerdem ist der Träger

$$\text{Träger}\,(\omega) = \overline{\{x \in X; \quad \omega(x) \neq 0\}}$$

einer Volumenform wohldefiniert.

Man kann Volumenformen addieren

$$(\omega + \omega')_\varphi := \omega_\varphi + \omega'_\varphi$$

und mit stetigen Funktionen multiplizieren

$$(f\omega)_\varphi = f \cdot \omega_\varphi.$$

Die charakteristische Transformationsformel für $\omega + \omega'$ und $f\omega$ ist trivial.

Insbesondere bildet die Menge aller Volumenformen einen Vektorraum. Die Teilmenge der Volumenformen mit kompaktem Träger ist ein Untervektorraum.

5.11 Bemerkung. *Es gibt eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung von dem Vektorraum aller Volumenformen mit kompaktem Träger in den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$*

$$\omega \longmapsto \mathcal{I}(\omega)$$

mit folgender Eigenschaft

Ist der Träger von ω im Definitionsbereich U_φ der Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ enthalten, so gilt

$$\mathcal{I}(\omega) = \int\limits_{V_\varphi} \omega_\varphi(x)\,dx.$$

Zusatz. Ist ω nirgends negativ, so gilt $\mathcal{I}(\omega) \geq 0$.

5.12 Bemerkung. *Sei ω eine positive Volumenform auf X. Dann existiert zu jeder anderen Volumenform ω' eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$\omega' = f\omega.$$

Wenn also ***eine*** positive Volumenform ausgezeichnet ist, so braucht man anstelle beliebiger Volumenformen nur noch gewöhnliche Funktionen zu studieren.

5.13 Annahme. *Auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist eine positive Volumenform ω ausgezeichnet.*

Wir erinnern an das fundamentale Beispiel einer eingebetteten Mannigfaltigkeit: Für ω nimmt man

$$\omega_\varphi = \sqrt{\det g_\varphi}.$$

5.14 Bemerkung. *Sei ω eine positive Volumenform. Dann wird durch*

$$I(f) := \mathcal{I}(f\omega)$$

ein Radonsches Maß auf X definiert.

5.15 Definition. *Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche abzählbar im Unendlichen ist und sei ω eine ausgezeichnete positive Volumenform auf X. Das Volumen von X in bezug auf ω ist das Integral der Funktion „identisch 1" bezüglich des in 5.14 definierten Radonmaßes.*

Das Volumen ist also eine positive Zahl oder ∞.

Im Falle eingebetteter Mannigfaltigkeiten haben wir natürlich nichts neues erhalten.

5.16 Definition. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit ausgezeichneter positiver Volumenform ω_0 und*

$$I : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) = \mathcal{I}(f\omega_0),$$

das assoziierte Radonsche Maß. Eine Volumenform $\omega = f\omega_0$ heißt zulässig, falls die Funktion f zulässig in Bezug auf das Radonsche Maß I ist. Für zulässige Volumenformen ist

$$\mathcal{I}(\omega) = I(f)$$

definiert.

5.17 Bemerkung. *Der Begriff der zulässigen Volumenform ω hängt nicht von der Wahl von einer positiven Volumenform ω_0 ab.*

1. Zusatz. *Der Wert von $\mathcal{I}(\omega)$ hängt nicht von der Wahl der positiven Volumenform ω_0 ab.*

2. Zusatz. *Der Begriff der Nullmenge hängt nicht von der Wahl von ω_0 ab.*

Wir verzichten auf den (einfachen) Beweis dieser Bemerkung, da in den uns interessierenden Fällen stets eine konkrete positive Volumenform ausgezeichnet ist.

Kapitel IX. Integration von Vektorfeldern

1. Kurvenintegral längs Vektorfeldern

Neben den in Kap. IIX, §1 eingeführten Kurvenintegralen zur Messung von (eventuell gewichteten) Bogenlängen gibt es Kurvenintegrale einer anderen Art, welche den Fluß eines Vektorfeldes längs einer Kurve messen.

1.1 Definition. *Ein Vektorfeld auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung*

$$A : D \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Eine Möglichkeit, ein Vektorfeld in der Ebene anschaulich darzustellen, ist, in einigen Punkten von a aus D einen Pfeil von a nach $a + A(a)$ zu zeichnen.

1.2 Definition. *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und*

$$\alpha : I \longrightarrow D \quad (I \text{ Intervall})$$

eine in D verlaufende glatte Kurve. Außerdem sei

$$A : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld. Das Integral von A längs α ist durch

$$\int\limits_\alpha A := \int\limits_I \langle A(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle \, dt$$

definiert, sofern es absolut konvergiert.

Wenn das Vektorfeld auf der Kurve senkrecht steht

$$(d.h. \quad \langle A(\alpha(t)), \dot\alpha(t)\rangle = 0),$$

so verschwindet das Integral. Allgemein mißt das Integral eines Vektorfeldes nach einer Kurve den *tangentiellen Anteil des Vektorfeldes im Mittel.*

Beispiel. Wir betrachten die Kreislinie

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

und das *Wirbelfeld*

$$A(x,y) = (x,-y).$$

Das Integral ist

$$\int_\alpha A = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos^2 t)\, dt = -2\pi.$$

Wir wollen uns mit der Invarianz des Kurvenintegrals gegenüber Parametertransformation befassen.

1.3 Bemerkung. *Die beiden Kurven*

$$\alpha, \beta : I \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$$

seien äquivalent (VIII.1.8). Dann gilt für jedes stetige Vektorfeld A auf D

$$\int_\alpha A = \int_\beta A.$$

Vorsicht. *Die Bemerkung gilt nicht bei schwacher Äquivalenz! Wenn die Kurven α und β nur schwach äquivalent aber nicht äquivalent sind, so ändert das Integral sein Vorzeichen!*

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ eine eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit und $A : X \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf X. Wir möchten gern das Integral von A längs X definieren. Der naheliegende Gedanke, eine reguläre Parametrisierung $\alpha : (0,1) \to X$ zu wählen und

$$\int_X A = \int_\alpha A$$

zu definieren, funktioniert zunächst nicht, da zwei reguläre Parametrisierungen im allgemeinen nicht äquivalent sondern nur schwach äquivalent sind. Man kann also nicht Bemerkung 1.3 anwenden. Man muß zuerst den Begriff der *Orientierung* einer eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit einführen. (Später wird das Integral der Orientierung auch auf nicht parametrisierbare Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension verallgemeinert werden.)

Orientierung eindimensionaler parametrisierbarer Mannigfaltigkeiten

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit. Wir bezeichnen die Menge aller regulären Parametrisierungen von X mit $\mathcal{P}$.

Seien α, β zwei Elemente von $\mathcal{P}$. Dann ist $\tau = \beta^{-1} \cdot \alpha$ ein Diffeomorphismus eines Intervalls auf ein anderes. Da die Ableitung von τ nirgens verschwindet, gibt es zwei Möglichkeiten

1) $\tau'(t) > 0$ für alle t.

In diesem Fall sind α und β äquivalent im Sinne von VIII.1.8, und wir wollen α und β in diesem Zusammenhang etwas sprechender *orientierungsgleich* nennen.

2) $\tau'(t) < 0$ für alle t.

In diesem Falle sind α und β nur schwach äquivalent. Die beiden Parametrisierungen sind entgegengesetzt orientiert.

1.4 Bemerkung. *Sei X eine zusammenhängende eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit. Die Menge $\mathcal{P}$ aller regulären Parametrisierungen zerfällt in genau zwei Äquivalenzklassen orientierungsgleicher Parametrisierungen*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \quad \textit{(disjunkte Vereinigung).}$$

1.5 Definition. *Eine Orientierung $\mathcal{O}$ einer zusammenhängenden eindimensionalen parametrisierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Auszeichnung einer der beiden Klassen orientierungsgleicher Parametrisierungen (also $\mathcal{O} = \mathcal{P}_1$ oder $\mathcal{O} = \mathcal{P}_2$).*

Eine eindimensionale parametrisierbare Mannigfaltigkeit heißt *orientiert*, falls eine der beiden Orientierungen ausgezeichnet wurde.

1.6 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{O})$ eine zusammenhängende parametrisierbare eindimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und sei*

$$A : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld. Das Integral

$$\int\limits_X A := \int\limits_\alpha A, \quad \alpha \in \mathcal{O},$$

ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung α aus der gegebenen Orientierung $\mathcal{O}$.

Wir können also von dem Integral eines Vektorfeldes längs einer orientierbaren parametrisierbaren Mannigfaltigkeit sprechen.

Ebene Kurven

Das Kurvenintegral, daß wir soeben eingeführt haben, mißt den *tangentiellen Anteil* eines Feldes längs der Kurve.

Im Falle einer ebenen Kurve ($n = 2$) kann man durch eine kleine Modifikation auch den orthogonalen Anteil, also den mittleren Durchtritt des Feldes durch die Kurve messen. Dies liegt an folgender —auf den Fall $n = 2$ beschränkter

1.7 Bemerkung. *Sei $A = (A_1, A_2)$ ein ebener Vektor (d. h. Element des $\mathbb{R}^2$). Der Vektor*

$$A^\perp = (-A_2, A_1)$$

steht auf A senkrecht und hat dieselbe Länge (Euklidische Norm).

Man nennt $A^\perp$ den entgegen dem Uhrzeiger um $90°$ gedrehten Vektor A.

Allgemein definiert man das Orthogonalfeld eines ebenen Vektorfeldes

$$A : D \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

durch

$$A^\perp(x) = A(x)^\perp \quad \text{für } x \in D.$$

Ist nun

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

eine glatte Kurve und $A : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld, so mißt

$$\int\limits_\alpha A^\perp,$$

wie schon erwähnt, den mittleren Durchtritt des Feldes durch die Kurve.

Man kann diese Variante des Kurvenintegrals auch etwas anders definieren.

Allgemein gilt für zwei ebene Vektoren $A, B \in \mathbb{R}^2$ die Formel

$$\langle A^\perp, B\rangle = -\langle A, B^\perp\rangle.$$

Man hat also auch

$$\int\limits_\alpha A^\perp = -\int\limits_I \langle \dot\alpha(t)^\perp, A\rangle.$$

Die geometrische Bedeutung des Vektors $\dot\alpha(t)$ ist, daß er die Richtung der Tangente im Kurvenpunkt $\alpha(t)$ angibt. Entsprechend gibt $\dot\alpha(t)^\perp$ die *Richtung der Normalen* im Kurvenpunkt $\alpha(t)$ an.

Bevor wir auf die Begriffe „Tangente“ und „Normale“ genauer eingehen, geben wir noch eine andere einfache Schreibweise für das neue Kurvenintegral an. In diesem Zusammenhang schreiben wir $\alpha(t), \dot{\alpha}(t)$ und $A(t)$ als Spaltenvektoren. Dann ist $(A(t), \dot{\alpha}(t))$ eine 2×2-Matrix. Es gilt

$$\det(A(t), \dot{\alpha}(t)) = \langle \dot{\alpha}(t), A(t) \rangle.$$

Wir erhalten also

$$\int\limits_{\alpha} A^{\perp} = \int\limits_{I} \det(\dot{\alpha}(t), A(t))\, dt.$$

Diese Formeln sind ein Ausgangspunkt für Verallgemeinerungen auf höher dimensionale Mannigfaltigkeiten.

2. Tangenten und Normalen

Ist $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $a \in I$ ein fester Punkt, so gibt der Vektor $\dot\alpha(a)$ die Richtung der Tangente im Kurvenpunkt $\alpha(a)$ an. Wir wollen dieses Konzept auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern.

2.1 Bemerkung. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension $d \le n$. Sei $a \in X$ ein fester Punkt und*

$$\begin{array}{cccc} \alpha\colon & V & \longrightarrow & U \qquad (V \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & 0 & \longmapsto & a \end{array}$$

eine reguläre Parametrisierung einer offenen Umgebung U von a. Die „Jacobiabbildung“

$$J(\alpha; 0) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist eine injektive lineare Abbildung. Ihr Bild

$$T_aX := J(\alpha; 0)(\mathbb{R}^d)$$

ist ein d-dimensionaler Unterviektorraum des $\mathbb{R}^n$. Dieser Unterraum hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung α ab.

T_aX ist im übrigen genau der Raum, welcher von den Spalten der Jacobimatrix erzeugt wird. Diese sind ja gerade die Bilder der Einheitsvektoren.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folgerung aus VIII.2.4 und der Kettenregel.

□

2.2 Definition. *Man nennt den Untervektorraum T_aX den* ***Tangentialraum*** *von X im Punkte a.*

Vorsicht. T_aX ist nicht der Tangentialraum im geometrischen Sinne. Der „geometrische Tangentialraum“ ist der affine Raum

$$a + T_aX := \{a + x;\ x \in T_aX\}.$$

(Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt affiner Raum, wenn die Menge

$$V = \{a - b;\ a \in A,\ b \in A\}$$

ein Untervektorraum ist. Für jeden Vektor $a \in V$ gilt dann

$$A = a + V = \{a + x;\ x \in V\},$$

d.h. die affinen Räume sind genau die Translate von Untervektorräumen. Mathematisch ist es meist günstiger mit Vektorräumen anstelle von affinen Räumen zu arbeiten, denn Vektorräume haben per se eine algebraische Struktur — eben als Vektorraum).

Man kann $a + T_aX$ auch den geometrischen Tangentialraum nennen. „Unser“ Tangentialraum T_aX ist also der in den Nullpunkt verschobene geometrische Tangentialraum.

Normalenraum

Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ steht definitionsgemäß senkrecht auf V, falls

$$\langle a, x \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in V$$

gilt. Man bezeichnet mit

$$V^\perp = \left\{ a \in \mathbb{R}^n; \quad \langle a, x \rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in V \right\}$$

das orthogonale Komplement von V, das heißt alle Vektoren, welche auf V senkrecht stehen.

Aus der linearen Algebra ist bekannt:

Es gilt

$$\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp,$$

d.h. jeder Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung

$$a = a_1 + a_2; \quad a_1 \in V,\ a_2 \in V^\perp.$$

Insbesondere gilt

$$n = \dim V + \dim V^\perp.$$

Sei nun noch $X \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit (=eingebettete Mannigfaltigkeit) und $a \in X$ ein Punkt. Das orthogonale Komplement

$$O_a(X) = T_a(X)^\perp$$

ist der *Orthonormalraum* von X im Punkte a.

Wir interessieren uns in diesem Kapitel besonders für *Hyperflächen*, das sind differenzierbare Untermannigfaltigkeiten der Dimension $n-1$. Beispielsweise ist die Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$ eine Hyperfläche. Im Falle von Hyperflächen ist der Normalenraum $O_a(X)$ eindimensional.

In einem eindimensionalen Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt es offensichtlich genau zwei Vektoren der Länge 1. Ist $a \in V$ einer der beiden, so ist $-a$ der andere.

Wir möchten gerne im Falle von Hyperflächen einen der beiden normierten Normalenvektoren auswählen. Die Auswahl hängt mit der Frage der Orientierung von X zusammen.

Orientierung

Wir führen den Begriff der Orientierung gleich für abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{A})$ ein.

2.3 Definition. *Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und seien*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad \psi : U_\psi \longrightarrow U_\psi$$

zwei Karten aus dem Atlas $\mathcal{A}$. Man nennt φ und ψ ***orientierungsverträglich****, falls die Funktionaldeterminante der Kartentransformationsabbildung*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : V'_\varphi \longrightarrow V'_\psi \quad \bigl(V'_\varphi = \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)\bigr)$$

in allen Punkten positiv ist

$$\det J(\psi \circ \varphi^{-1}; x) > 0 \quad \textit{für alle } x \in V'_\varphi.$$

Die Orientierungsverträglichkeit ist also nur eine Bedingung im Durchschnitt $U_\varphi \cap U_\psi$ der beiden Karten. Ist dieser Durchschnitt leer, wird diese Verträglichkeit per üblicher logischer Konvention automatisch gewährleistet.

2.4 Definition. *Ein (differenzierbarer) Atlas heißt orientiert, falls je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ orientierungsverträglich sind.*

Zusatz. *Eine* ***orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit*** $(X, \mathcal{A})$ *ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, deren Atlas orientiert ist.*

Wir erinnern daran, daß wir differenzierbare Untermannigfaltigkeiten X des $\mathbb{R}^n$ als differenzierbare Mannigfaltigkeiten auffassen, indem wir als Atlas $\mathcal{A}$ die Menge aller Umkehrungen $\varphi = \alpha^{-1}$ regulärer Parametrisierungen von offenen Teilen von X nehmen. Wir betrachten nun den Fall einer Hyperfläche und nehmen an, es sei uns gelungen, eine Orientierung, d.h. einen Unteratlas $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}$ zu finden, so daß je zwei Karten aus $\mathcal{O}$ orientierungsverträglich sind. Dies kann so sein, muß aber nicht immer so sein, wie das Beispiel des Möbiusbandes zeigt.

Wir wollen nun zeigen, wie man dann in natürlicher Weise aus jedem der beiden normierten Orthonormalvektoren in $O_a(X)$ einen auszeichnen kann — wir nennen ihn $\mathfrak{n}(a) \in O_a(X)$.

Das wesentliche dieser Auszeichnung wird sein, daß sie stetig von a abhängt, daß also die Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad a \longmapsto \mathfrak{n}(a),$$

stetig ist.

Konstruktion von $\mathfrak{n}(a)$

Wir wählen eine Karte

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \longmapsto 0,$$

aus der vorgegebenen Orientierung $\mathcal{O}$ und bezeichnen mit

$$\alpha : V_\varphi \longrightarrow V_\varphi$$

ihre Umkehrung (die entsprechende reguläre Parametrisierung). Es ist natürlich immer möglich, die Karte so zu wählen, daß dem vorgegeben Punkt a der Nullpunkt entspricht, dies vereinfacht manchmal die Bezeichnungsweisen. Wir betrachten die zugehörige Tangentialabbildung

$$J(\alpha; 0) : \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\sim} T_a X \ \subset \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{n-1}$ in ihrer natürlichen Anordnung

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0);\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0); \cdots e_{n-1} = (0, \cdots, 1)$$

und bezeichnen ihre Bilder in $T_a X$ mit

$$E_1, \cdots, E_{n-1} \in T_a X.$$

Wie wir schon erwähnt haben, sind dies genau die Spalten der Jacobimatrix. Sei F irgendein Spaltenvektor aus $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren

$$(E_1, \cdots, E_{n-1}, F)$$

können als quadratische Matrix aufgefaßt werden. Ihre Determinante ist von 0 verschieden, wenn F nicht in $T_a X$ enthalten ist. Sie kann positiv oder negativ sein. Ersetzt man F durch $-F$, so ändert sie ihr Vorzeichen.

Im Normalenraum $O_a(X)$ (er hat die Dimension 1) existiert also ein und nur ein Vektor $\mathfrak{n}(a)$ der Länge 1, so daß die Determinante positiv ist

$$\det(E_1, \cdots, E_{n-1}, \mathfrak{n}(a)) > 0.$$

Diese Konstruktion ist unabhängig von der Wahl der Karte $\varphi \in \mathcal{O}$ (genau hier wird eingehen, daß $\mathcal{O}$ ein orientierter Atlas ist):

2.5 Satz. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Hyperfläche und $\mathcal{O}$ ein orientierter Atlas von (differenzierbaren) Karten auf X. Es existiert zu jedem Punkt $a \in X$ ein und nur ein Normalenvektor $\mathfrak{n}(a) \in 0_a(X)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

1) $\|\mathfrak{n}(a)\| = 1$.
2) *Ist* $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi, \quad a \mapsto 0$ *eine Karte aus* $\mathcal{O}$ *um* a, *so gilt*

$$\det(E_1, \cdots, E_{n-1}, \mathfrak{n}(a)) > 0, \quad \textit{mit } E_j = J(\varphi^{-1}; 0) e_j, \quad (1 \le j \le n-1).$$

Anmerkung. Man kann umgekehrt zeigen:

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Hyperfläche. Es existiere zu jedem $a \in X$ ein Normalenvektor $\mathfrak{n}(a)$ der Länge eins, welcher von a stetig abhängt. Dann besitzt X eine Orientierung $\mathcal{O}$.

Es erhebt sich die Frage, warum man nicht die stetige Auswahl eines Normalenvektors zur Definition der Orientierung erheben kann. Die Antwort ist einfach. Dieses Konzept funktioniert nur bei Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$.

Äquivalenz von differenzierbaren Strukturen

Bemerkung: Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Menge aller Karten

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi,$$

welche mit allen Karten aus $\mathcal{A}$ differenzierbar verträglich sind, bildet einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}_{\max}$ welcher $\mathcal{A}$ umfaßt.

Der Atlas $\mathcal{A}_{\max}$ ist aus trivialen Gründen maximal in folgendem Sinne: Jede Karte, welche mit $\mathcal{A}_{\max}$ differenzierbar verträglich ist, ist schon in $\mathcal{A}_{\max}$ enthalten.

Mit anderen Worten: $\mathcal{A}_{\max}$ ist der größte differenzierbare Atlas, welcher $\mathcal{A}$ umfaßt.

Beispiel: Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A}$ der Atlas, welcher aus einer einzigen Karte, nämlich der Identität besteht. Damit ist $\mathcal{A}_{\max}$ die Menge aller ($C^\infty-$)-Diffeomorphismen, mit

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V; \quad U, V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen.}$$

Im allgemeinen ist $\mathcal{A}_{\max}$ echt größer als $\mathcal{A}$, die beiden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{A})$ und $(X, \mathcal{A}_{\max})$ sind also formal voneinander verschieden.

Sie sind in gewissem Sinne, d. h. für unsere Zwecke, jedoch als gleich anzusehen:

Sei $(\omega_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}_{\max}}$ eine Volumenform auf $(X, \mathcal{A}_{\max})$. Ihre Einschränkung $(\omega_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A}$ ist dann eine Volumenform auf $\mathcal{A}$. Es gilt:

2.6 Bemerkung. *Jede Volumenform auf $(X, \mathcal{A})$ läßt sich zu einer Volumenform auf $(X, \mathcal{A}_{\max})$ ausdehnen. Die ausgedehnte Form ist genau dann positiv, wenn die ursprüngliche es war. Die zugeordneten Radonmaße für die gegebene Form und ihre Ausdehnung sind dieselben.*

Zwei differenzierbare Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ auf X heißen *im wesentlichen gleich*, falls ihre maximalen Atlanten übereinstimmen,

$$\mathcal{A}_{\max} = \mathcal{B}_{\max}.$$

Halten wir fest:

Wenn die differenzierbaren Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ im wesentlichen gleich sind, so entsprechen sich die Volumenformen auf $(X, \mathcal{A})$ und $(X, \mathcal{B})$ umkehrbar eindeutig. Entsprechende Volumenformen führen zur selben Integrationstheorie.

In konkreten Fällen wird man versuchen, eine differenzierbare Struktur mit möglichst wenig Karten zu definieren, die Sphäre z. B. mit zwei Karten. Für mathematische Untersuchungen ist es danach sinnvoll, auch weitere differenzierbar verträgliche Karten zuzulassen, daher betrachtet man formal am besten gleich den maximalen Atlas.

In der Literatur ist es nebenbei bemerkt abweichend von unserem Vorgehen häufig üblich, in der Definition der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten nur maximale Atlanten zuzulassen.

Äquivalenz von Orientierungen

Bemerkung: Sei $(X, \mathcal{O})$ eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Teilmengen

$$\mathcal{O}^+_{\max} \subset \mathcal{O}_{\max}$$

aller Karten $\varphi \in \mathcal{O}_{\max}$, welche mit allen $\varphi \in \mathcal{O}$ orientierungsverträglich sind, bilden einen orientierten Atlas $\mathcal{O}^+_{\max}$. Dies ist der größte orientierte Atlas, welcher $\mathcal{O}$ umfaßt.

Zwei orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(X, \mathcal{O}_2)$ heißen im wesentlichen gleich, falls

$$(\mathcal{O}_1)^+_{\max} = (\mathcal{O}_2)^+_{\max}$$

gilt.

2.7 Definition. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{A})$ heißt orientierbar, falls es einen Teilatlas $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}_{\max}$ gibt (also eine Teilmenge von Karten, deren Definitionsbereiche ganz X überdecken), so daß $(X, \mathcal{O})$ eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.*

Anmerkung. Man kann zeigen, daß jede eindimensionale Mannigfaltigkeit orientierbar ist, in höheren Dimensionen ist dies falsch, wie das Beispiel des Möbiusbandes zeigt.

Man kann sich nun fragen, wieviele wesentlich verschiedene Orientierungen auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{A})$ möglich sind.

2.8 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Wenn $(X, \mathcal{A})$ überhaupt orientierbar ist, existieren genau zwei Klassen von im wesentlich gleichen Orientierungen.*

Im allgemeinen gibt es kein Verfahren, eine der beiden Orientierungen von der anderen auszuzeichnen. In einem wichtigen Spezialfall von Randmannigfaltigkeiten ist dies doch möglich.

3. Randmannigfaltigkeiten

Wir wollen das Konzept des Begriffs der Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern und Untermannigfaltigkeiten beliebiger differenzierbarer Mannigfaltigkeiten definieren. Wir erinnern nochmals an eine mögliche Definition:

Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt glatt in einem Punkt $a \in X$, falls es eine offene Umgebung $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $U \cap X$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit ist.

3.1 Definition. *Sei (X, A) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt* ***glatt*** *in einem Punkt $a \in Y$, falls eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi$$

existiert, so daß $\varphi(U_\alpha \cap Y) \subset \mathbb{R}^n$ glatt in $\varphi(a)$ ist.

Unmittelbar klar ist:

3.2 Bemerkung. *Die in 3.1 formulierte Bedingung hängt nicht von der Wahl der Karte φ ab.*

Wir bezeichnen mit Y_{reg} die Menge der glatten Punkte von Y. Dies ist offensichtlich eine offene Teilmenge von Y. Wir nennen Y glatt schlechthin, falls $Y = Y_{\text{reg}}$ gilt. Offensichtlich ist allgemein Y_{reg} glatt.

Eine etwas andere Möglichkeit, den Begriff der Glattheit zu definieren, beruht auf dem maximalen Atlas.

3.3 Bemerkung. *Sei $Y \subset (X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $a \in Y$ ein Punkt. Genau dann ist Y glatt im Punkte a, wenn es eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi,$$

im maximalen Atlas gibt, so daß folgende Bedingung erfüllt ist:

Es existiert ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(U_\varphi \cap X) = V \cap V_\varphi.$$

Mit anderen Worten:

Y ist (in der Nähe von a) nach Wahl einer geeigneten Karte im maximalen Atlas platt gebügelt.

Der Vektorraum V habe die Dimension $d\,(\leq n)$. Man kann in 3.3 o. B. d. A. annehmen, daß

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad x_{d+1} = \cdots = x_n\}$$

gilt. Danach erhält man eine Identifikation von V mit $\mathbb{R}^d$, genauer einen Vektorraumisomorphismus

$$\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sim} V, \quad x \longmapsto (x, 0, \cdots, 0).$$

Nach einer solchen Identifikation kann man die Karte φ auf Y einschränken:

Sei

$$U'_\varphi = Y \cap U_\varphi$$

und sei $V'_\varphi \subset \mathbb{R}^d$ derjenige offene Teil, welcher in V der Menge $V_\varphi \cap V$ entspricht. Wir können dann die Einschränkung φ' von φ

$$\varphi' : U'_\varphi \longrightarrow V'_\varphi$$

betrachten.

3.4 Satz. *Sei $Y \subset (X, \mathcal{A})$ ein glatter Teil einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Die Menge aller Einschränkungen φ' von Karten $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi,$$
$$\varphi(U_\varphi \cap Y) = \{x \in V_\varphi; \quad x_{d+1} = \cdots = x_n = 0\},$$

ist ein differenzierbarer Atlas $\mathcal{A}' := \mathcal{A}|Y$ auf Y.

Insbesondere können wir $Y = (Y, \mathcal{A}')$ wieder als differenzierbare Mannigfaltigkeit auffassen (und wir meinen immer stillschweigend diese Struktur auf Y). Im Fall eingebetteter Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ erhalten wir das alte Konzept zurück.

Wir weisen nochmals ausdrücklich darauf hin.

Selbst wenn $\mathcal{A}$ orientierbar ist, so braucht $\mathcal{A}'$ noch lange nicht orientierbar zu sein, wie das schon mehrfach erwähnte Beispiel des Möbiusbands zeigt.

Es gibt jedoch eine besondere Situation, wo dies doch der Fall ist.

3.5 Satz. *Seien $X = (X, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $U \subset X$ ein offener Teil von X und $a \in \partial U$ ein Randpunkt. Man nennt a einen glatten Randpunkt von U, falls es eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}_{max}$*

$$\varphi : U_\varphi \longrightarrow V_\varphi, \quad a \in U_\varphi$$

mit folgenden Eigenschaften gibt

1) $$\varphi(U_\varphi \cap \partial U) = \{x \in V_\varphi; \quad x_n = 0\},$$

2) $$\varphi(U_\varphi \cap U) = \{x \in V_\varphi; \quad x_n > 0\}.$$

Sei $S \subset \partial U$ die Menge aller glatten Randpunkte von U. Insbesondere gilt (wegen 1), daß $S \subset (\partial U)_{\text{reg}}$ und S offensichtlich ein offener Teil von (∂U) (und $(\partial U)_{\text{reg}}$) ist. Die Bedingung 2) bezieht sich aber nicht nur auf die Menge ∂U allein, sondern auch auf ihre Angrenzung an U. Ist beispielsweise U das Komplement der x-Achse in $\mathbb{R}^2$, so ist der Rand von U die x-Achse. Diese ist glatt aber U ist in keinem Randpunkt glatt.

3.6 Satz. *Sei $X = (X, \mathcal{A})$ eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subset X$ ein offener Teil. Die Menge $\mathcal{B}^+$ aller Einschränkungen von φ' von Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften 1) und 2) definieren einen **orientierten** Atlas auf der Menge S aller glatten Randpunkte. Insbesondere trägt S eine Struktur als orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

Wir wollen nun nochmals das wichtige Beispiel des Randes einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ betrachten:

Sprechweise. Sei $a \in \partial U$ ein Randpunkt und $A \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Der Vektor *A weist in a aus U heraus*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß alle Punkte

$$a + tA, \quad 0 < t < \varepsilon,$$

im Komplement von U liegen.

3.7 Hilfssatz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Teil und sei $S \subset \partial U$ die Menge der glatten Randpunkte von U. Die in 3.6 definierte Orientierung ist so beschaffen, daß für jeden Punkt $a \in S$ der normierte Vektor $\mathfrak{n}(a) \in \mathcal{O}_a(S)$ aus U herausweist.*

4. Der Gaußsche Integralsatz

4.1 Definition. *Sei $A = A^{(n,n-1)}$ eine Matrix mit n Zeilen und $n-1$ Spalten. Sei A_i $(1 \le i \le n)$ die Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile entsteht. Wir bezeichnen mit $\nu(A)$ den Spaltenvektor mit den Einträgen*

$$\nu(A)_i := (-1)^{n+1} \det(A_i).$$

Im Falle $n = 3$ nennt man $\nu(A)$ auch das *Kreuzprodukt* der beiden Spalten von A.

Eine andere Möglichkeit, den Vektor $\nu(A)$ zu charakterisieren, bietet

4.2 Bemerkung. *Sei $A = A^{(n,n-1)}$ eine Matrix mit n Zeilen und $n-1$ Spalten. Für jeden Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\det((A, x)) = \langle \nu(A), x \rangle.$$

Insbesondere steht $\nu(A)$ auf den Spalten von A senkrecht.

Man kann auch die Länge von $\nu(A)$ angeben:

4.3 Bemerkung. *Die Euklidische Länge von $\nu(A)$ ist*

$$||\nu(A)|| = \sqrt{\det(A'A)}.$$

Geometrisch ist dies der Inhalt eines $(n-1)$-dimensionalen Parallelotops, nämlich das Bild $A(0,1)^{n-1}$ des Einheitswürfels.

4.4 Definition. *Sei $A = A^{(n,n-1)}$ eine Matrix mit n Zeilen und $n-1$ Spalten. Ihr Rang sei $n-1$. Man definiert*

$$\boldsymbol{n}(A) := \frac{\nu(A)}{||\nu(A)||}.$$

In Abschnitt 2 haben wir den normierten Normalenvektor an eine Hyperfläche definiert. Offenbar gilt

4.5 Bemerkung. *Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte Hyperfläche, $a \in X$ ein Punkt und φ eine Karte des orientierten Atlas, deren Definitionsbereich den Punkt a enthält. Dann kann der normierte Normalenvektor durch das verallgemeinerte Kreuzprodukt wie folgt berechnet werden:*

$$\boldsymbol{n}(a) = \boldsymbol{n}(J(\alpha; x)) \quad (\alpha = \varphi^{-1},\, x = \varphi(a)).$$

Wir nehmen nun an, auf der orientierten Hyperfläche X sei ein (stetiges) Vektorfeld $A : X \to \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir können dann die Funktion

$$X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \langle A(x), \boldsymbol{n}(x) \rangle,$$

definieren. Diese Funktion können wir mit der Volumenform ω, ($\omega_\varphi = \sqrt{\det g_\alpha}$) multiplizieren und dann integrieren, sofern $f\omega$ zulässig ist. Das Integral

$$\int_X \langle A(x), \boldsymbol{n}(x) \rangle \omega$$

mißt den mittleren Durchtritt des Feldes durch die Hyperfläche X. Man schreibt dieses Integral auch folgendermaßen:

$$\int_X \langle A(x), \boldsymbol{n}(x) \rangle \, dS(x),$$

wobei man sich unter $dS(x)$ ein Flächenelement vorstellen mag. Entsprechend mag man sich unter $d\boldsymbol{n}(x) := \boldsymbol{n}(x)\, dS(x)$ ein Normalenelement vorstellen. Wir wollen uns um eine genaue Interpretation dieser Begriffe nicht kümmern und begnügen uns mit der

4.6 Definition.

$$\int_X \langle A(x),\, d\boldsymbol{n}(x) \rangle = \int_X \langle A(x), \boldsymbol{n}(x) \rangle \omega.$$

Aus 4.2 und 4.3 ergibt sich unmittelbar

4.7 Bemerkung. *Sei X eine parametrisierbare Hyperfläche und $\alpha : U \to X$ eine (orientierungstreue) reguläre Parametrisierung von X, so gilt*

$$\begin{aligned} \int_U \langle A(x), d\boldsymbol{n}(x) \rangle &= \int_X \langle A(x), \boldsymbol{n}(x) \rangle \sqrt{\det(J(\alpha; x)' J(\alpha; x)} dx \\ &= \int_U \det\bigl(J(\alpha; x), A(x)\bigr) dx, \end{aligned}$$

wobei wir in diesem Zusammenhang den Vektor $A(x)$ als Spaltenvektor schreiben.

Auf die letzte Formel waren wir bereits im Fall $n = 2$ gestoßen. Wir formulieren nun den Gaußschen Integralsatz:

4.8 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte nicht leere Teilmenge mit (überall) glattem Rand. Sei weiterhin $A : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $\widetilde{U}$, welche das Kompaktum $U \cup \partial U$ umfaßt. Dann gilt die Integralformel*

$$\int\limits_{\partial U} \langle A(x), d\,\boldsymbol{n}(x) \rangle = \int\limits_{U} \operatorname{div} A(x) dx,$$

wobei

$$\operatorname{div} A(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i}$$

*die sogenannte **Divergenz** des Feldes bezeichne.*

Der Gaußsche Integralsatz wird sich als Spezialfall das allgemeinen Stokeschen Integralsatzes auf Mannigfaltigkeiten erweisen. Wir verzichten daher ans dieser Stelle auf einen Beweis.

Kapitel X. Alternierende Differentialformen

1. Die Graßmannalgebra

Seien $V_1, \cdots, V_n$ Vektorräume. Eine Abbildung

$$H : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

in einen weiteren Vektorraum heißt *multilinear*, falls sie in jeder Komponente linear ist.
Für jedes $j \in \{1, \cdots, n\}$ und jedes feste $(n-1)$-Tupel

$$a_\nu \in V_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n, \quad \nu \neq j,$$

ist also die Abbildung

$$V_j \longrightarrow W, \quad x \longmapsto H(a_1, \cdots, a_{j-1}, x, a_j, \cdots, a_n),$$

linear.
Von besonderem Interesse ist der Fall $V = V_1 = \cdots = V_n$. In diesem Falle heißt H *alternierend*, falls H das Vorzeichen ändert, wenn man zwei Komponenten vertauscht.
Sei

$$\sigma : \{1, \dots n\} \longrightarrow \{1, \dots n\}$$

eine Permutation der Ziffern 1 bis n. Für eine alternierende Multilinearform H gilt

$$H(a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) H(a_1, \cdots, a_n).$$

Hierbei bedeutet $\operatorname{sgn}(\sigma)$ das Vorzeichen der Permutation σ. Dies liegt daran, daß man jede Permutation als Produkt endlich vieler Transpositionen (Vertauschen zweier Ziffern) schreiben kann. Das Signum ist die Anzahl der benötigten Transpositionen. Es gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau).$$

Ist der Zielvektorraum W der Grundkörper (bei uns $\mathbb{R}$) selbst, so nennt man die multilineare Abbildung H auch eine *Multilinearform*.

Eine der wichtigsten alternierenden Multilinearformenalternierende Multilinearform ist die *Determinante*. Wir betrachten den Vektorraum der Spaltenvektoren $V = \mathbb{R}^n$. Eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ kann als Element von $V^n = V \times \cdots \times V$ aufgefaßt werden.

Die Determinante

$$\det : V^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine alternierende Multilinearform. Sie ist bekanntlich bis auf einen skalaren Faktor sogar die einzige alternierende Multilinearform auf V^n.

Die Graßmannalgebra ist eine Verallgemeinerung der Determinantenkonstruktion.

1.1 Definition. *Eine graduierte Algebra V_* ist eine durch $\mathbb{Z}$ parametrisierte Schar von Vektorräumen*

$$(V_p)_{p \in \mathbb{Z}}$$

zusammen mit einer durch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ parametrisierten Schar von bilinearen Abbildungen

$$V_p \times V_q \longrightarrow V_{p+q}.$$

Wir bezeichnen die bilineare Abbildung symbolisch als Produkt

$$V_p \times V_q \longrightarrow V_{p+q}, \quad (a, b) \longmapsto a \wedge b.$$

(An sich wäre es genauer,

$$a \wedge_{(p,q)} b$$

zu schreiben).

1.2 Definition. *Eine graduierte Algebra heißt* ***assoziativ****, falls*

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

für $a \in V_p,\ b \in V_q,\ c \in V_r$ (p, q, r beliebig aus $\mathbb{Z}$) gilt.

1.3 Definition. *Eine graduierte Algebra heißt* ***schiefkommutativ****, falls*

$$a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$$

für $a \in V_p,\ b \in V_q$ gilt.

In einer schiefkommutativen Algebra gilt offensichtlich

$$a \wedge a = 0, \text{ falls } a \in V_p, \quad p \text{ ungerade}.$$

1.4 Definition. *Eine graduierte Algebra besitzt ein* ***Einselement****, falls ein Element*

$$1 \in V_0 \textit{ mit } 1 \wedge a = a \wedge 1 \textit{ für alle } a \in V_p \quad (p \textit{ beliebig})$$

existiert.

Das Einselement ist natürlich eindeutig bestimmt.

1.5 Definition. *Sei V_* eine assoziative graduierte Algebra mit Einselement 1. Die Algebra wird von V_1 erzeugt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1) $V_p = 0, \quad p < 0.$
2) $V_0 = \mathbb{R} \cdot 1.$
3) *Im Falle $p > 0$ wird V_p als Vektorraum von den speziellen Elementen* $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p, \quad a_j \in V_1 \quad (1 \leq j \leq p)$ *erzeugt.*

(Wegen der Assoziativität ist $a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$ wohldefiniert).

Wir nehmen einmal an, daß V_* eine assoziative graduierte Algebra mit Einselement ist, welche von V_1 erzeugt wird. Es existiere mindestens ein p, so daß V_p von 0 verschieden ist. Dann gilt natürlich $1 \neq 0$. Aus 1.5, 2) folgert man unmittelbar, daß die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow V_0, \quad t \longmapsto t \cdot 1,$$

ein Vektorraumisomorphismus ist. Es gilt für $a \in V_p,\ p \in \mathbb{Z}$ (beide beliebig)

$$(t1) \wedge a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bilinearität von } \wedge}}{=} t(1 \wedge a) = ta.$$

Aus diesem Grunde identifiziert man dann häufig die reelle Zahl t mit $t1 \in V_0$. Es gilt dann einfach

$$t \cdot a = t \wedge a \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

1.6 Bemerkung. *Sei V_* eine assoziative und schiefkommutative Algebra mit Einselement, welche von V_1 erzeugt wird. Sei $e_1, \cdots, e_n$ ein Erzeugendensystem von V_1 (z. B. eine Basis). Dann gilt*

1) *$V_p = 0$ für $p > n$.*
2) *Im Falle $p > 0$ wird V_p von den Elementen*

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n,$$

erzeugt.

Folgerung: Sei $n = \dim V_1$. Dann gilt

$$\dim V_p \leq \binom{n}{p}.$$

(Wir setzen den Binomialkoeffizienten 0, falls $p > n$ oder $p < 0$ gilt. Will man den Fall $n = 0$ zulassen, so muß man in diesem Zusammenhang $\binom{0}{p} = 0$ definieren.

1.7 Definition. *Eine graduierte Algebra V_* heißt eine* ***Graßmannalgebra****, falls folgende Bedingungen erfüllt sind*

1) *V_* ist assoziativ, schiefkommutativ und besitzt ein Einselement* 1.

2) $n = \dim V_p < \infty$.

3) $\dim V_p = \binom{n}{p}$.

(Es gilt also insbesondere $V_p = 0$ für $p < 0$ und $p > n$).

1.8 Satz. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Es existiert eine Graßmannalgebra V_* mit der Eigenschaft*

$$V_1 = V.$$

Sprechweise: Wir nennen eine Graßmannalgebra V_* mit der Eigenschaft $V_1 = V$ eine Graßmannalgebra über V.

Wir wollen Satz 1.8 gleich in Verbindung mit einer Eindeutigkeitsaussage beweisen und formulieren diese Aussage vor dem Beweis von 1.8.

1.9 Definition. *Ein Homomorphismus*

$$\varphi_* : V_* \longrightarrow W_*$$

von graduierten Algebren mit Einselement ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$\varphi_p : V_p \longrightarrow W_p, \quad p \in \mathbb{Z},$$

mit den Eigenschaften

1) $\varphi_0(1) = 1$,

2) $\varphi_p(a) \wedge \varphi_q(b) = \varphi_{p+q}(a \wedge b)$ *für* $a \in V_p,\ b \in V_q$.

Man nennt φ_* einen Isomorphismus, wenn alle φ_p Isomorphismen sind.

1.10 Satz. *Sei*

$$l : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen Vektorräumen. Seien V_*, W_* Graßmannalgebren über V, W. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus

$$l_* : V_* \longrightarrow W_*$$

von Graßmannalgebren mit der Eigenschaft

$$l = l_1.$$

1. Folgerung. Wenn l ein Isomorphismus ist, so ist auch l_* ein Isomorphismus.

2. Folgerung. Seien V_* und W_* zwei Graßmannalgebren über ein und demselben Vektorraum V. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$l_* : V_* \longrightarrow W_*$$

mit der Eigenschaft

$$l_1 = \mathrm{id}_V \, .$$

Wir können sagen:

Die Graßmannalgebra ist bis auf *kanonische Isomorphien* eindeutig bestimmt, sie ist also im Wesentlichen eindeutig. Daher sprechen wir im folgenden auch von *der* Graßmannalgebra über V.

Existenz einer Graßmannalgebra

Wir geben zwei Existenzbeweise. Der erste benutzt Basen, der zweite ist koordinateninvariant und wird nur skizziert.

Existenzbeweis mittels Basen

Da zwei Vektorräume gleicher Dimension isomorph sind, genügt es, zu jedem gegebenen n eine Graßmannalgebra V_* mit $\dim V_1 = n$ zu konstruieren. Wir konstruieren im folgenden die sogenannte *Standardalgebra.* Sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge. Die Menge aller Funktionen

$$\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

bildet in üblicher Weise einen Vektorraum, den man manchmal mit $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ bezeichnet. Im Falle $\mathcal{M} = \{1, \cdots, n\}$ erhält man genau den $\mathbb{R}^n$.

Sei $a \in \mathcal{M}$ ein Element. Wir betrachten die Funktion

$$e_a = e_a^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad e_a(b) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktionen bilden eine Basis von $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$. Es gilt also

$$\dim \mathbb{R}^{\mathcal{M}} = \sharp \mathcal{M}.$$

Im Grunde ist dies die bekannte Aussage $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Wir betrachten nun die Menge $\{1, \cdots, n\}$ und bezeichnen mit

$$\mathcal{M}_p^{(n)} = \mathcal{M}_p = \big\{ a \subset \{1, \cdots, n\}, \quad \sharp a = p \big\}$$

die Menge ihrer p-elementigen Teilmengen. Es gibt gerade

$$\binom{n}{p} = \sharp \mathcal{M}_p^{(n)}$$

solcher Teilmengen. Wir können immer

$$1 \le p \le n$$

annehmen (dies ist aber nicht notwendig).

Wir definieren nun

$$V_p = V_p^{(n)} = \mathbb{R}^{\mathcal{M}_p}, \quad 1 \le p \le n,$$

und definieren ergänzend

$$V_0 = \mathbb{R}, \quad V_p = 0 \text{ für } p > n \text{ oder } p < 0.$$

Es gilt also

$$\dim V_p = \binom{n}{p}$$

und insbesondere

$$\dim V_1 = n.$$

(Da die einelementigen Teilmengen von $\{1, \cdots, n\}$ mit den Ziffern $1, \cdots, n$ identifiziert werden können, kann man V_1 mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren.)

Behauptung: Es existieren bilineare Abbildungen

$$V_p \times V_q \longrightarrow V_{p+q},$$

so daß $V_* = (V_p)_p$ eine Graßmannalgebra wird. (Damit ist V_* eine Graßmannalgebra über $\mathbb{R}^n$. Da jeder endlichdimensionale Vektorraum zu einem $\mathbb{R}^n$ isomorph ist, folgt die Existenz einer Graßmannalgebra allgemein.)

Konstruktion der bilinearen Abbildung $V_p \times V_q \to V_{p+q}$

Im Falle $p < 0$ oder $q < 0$ ist sie (zwangsweise) die Nullabbildung. Im Falle $p = 0$ oder $q = 0$ ist sie gewöhnliche skalare Multiplikation mit reellen Zahlen. Wir können also $p > 0$ und $q > 0$ annehmen. Außerdem können wir $p \le n$ und $q \le n$ annehmen.

Wir machen nun von der Tatsache Gebrauch, daß man eine bilineare Abbildung auf Basiselementen willkürlich vorschreiben kann.

Wenn man also je zwei Teilmengen

$$\begin{aligned} &a \subset \{1, \cdots, n\}, \quad b \subset \{1, \cdots, n\}, \\ &\sharp a = p, \quad \sharp b = q, \end{aligned}$$

irgendwie ein Element

$$e(a, b) \in V_{p+q}$$

zugeordnet hat, so existiert eine eindeutig bestimmte bilineare Abbildung

$$V_p \times V_q \longrightarrow V_{p+q}, \quad (a, b) \longmapsto a \wedge b,$$

mit der Eigenschaft

$$e_a \wedge e_b = e(a, b).$$

Ein naheliegender Gedanke $e(a, b)$ als $e_{a \cup b}$ zu definieren, scheidet aus zwei Gründen aus:

1) Nur wenn a und b disjunkt sind, gilt $\sharp(a \cup b) = p + q$ (und wir suchen Elemente in V_{p+q}).

2) Der Ansatz läßt keine Schiefkommutativität erwarten.

Eine geringe Modifikation dieses Ansatzes läßt beide Schwierigkeiten überwinden.

1) Wir *definieren*

$$e_a \wedge e_b = 0, \quad \text{falls } a \cap b \neq \emptyset.$$

2) Es sei nun $a \cap b = \emptyset$. Wir definieren

$$e_a \wedge e_b = \varepsilon(a, b) \cdot e_{a \cup b}$$

mit einem gewissen *Vorzeichen* $\varepsilon(a, b) = \pm 1$.

Das Geheimnis der Konstruktion liegt nun darin, daß man das Vorzeichen so wählen kann, daß man Assoziativität und Schiefkommutativität bekommt.

Definition des Vorzeichens $\varepsilon(a, b)$

Wir ordnen die Menge $a \subset \{1, \cdots, n\}$ in ihrer natürlichen Reihenfolge an

$$a = \{a_1, \cdots, a_p\}, \quad 1 \leq a_1 < \cdots < a_p \leq n.$$

Entsprechend verfahren wir mit b und $c = a \cup b$:

$$\begin{aligned} b &= \{b_1, \cdots, b_q\}, \quad 1 \leq b_1 < \cdots < b_q \leq n, \\ c &= \{c_1, \cdots, c_{p+q}\}, \quad 1 \leq c_1 < \cdots < c_{p+q} \leq n. \end{aligned}$$

Wir schreiben nun a und b nebeneinander und darunter c

$$\begin{pmatrix} a_1, & \cdots, a_p, b_1, \cdots & , b_q \\ c_1, & \cdots & , c_{p+q} \end{pmatrix}.$$

In beiden Zeilen stehen dieselben Elemente aber in verschiedener Reihenfolge, denn es muß ja nicht $a_p < b_1$ gelten!

Damit bietet sich folgende Definition eines Vorzeichens $\varepsilon(a, b)$ im Falle $a \cap b = \emptyset$ an.

$\varepsilon(a,b)$ *ist das Vorzeichen derjenigen Permutation, welche das Tupel* $(a_1,\cdots,b_q)$ *in die natürliche Reihenfolge* $(c_1,\cdots,c_{p+q})$ *überführt.*

Damit haben wir in allen Fällen eine bilineare Abbildung

$$V_p \times V_q \longrightarrow V_{p+q}$$

definiert und müssen die Axiome der Graßmannalgebra nachweisen.

1) *Schiefkommutativität*

Zu zeigen ist

$$e_a \wedge e_b = (-1)^{pq} e_b \wedge e_a.$$

Im relevanten Fall $a \cap b = \emptyset$ bedeutet dies, daß das Vorzeichen derjenigen Permutation, welche

$$(a_1,\cdots,a_p,b_1,\cdots,b_q) \longrightarrow (b_1,\cdots,b_q,a_1,\cdots,a_p)$$

überführt, gerade $(-1)^{pq}$ ist. Dies ist jedoch klar, da man jedes b_j an allen $a_1,\cdots,a_p$ vorbeischieben muß. Das sind qp Transpositionen.

2) *Assoziativität*

Es ist

$$e_a \wedge (e_b \wedge e_c) = (e_a \wedge e_b) \wedge e_c$$

zu zeigen, wobei man annehmen kann, daß a, b und c paarweise disjunkt sind. Dies bedeutet

$$\varepsilon(a, b \cup c)\varepsilon(b,c) = \varepsilon(a,b)\varepsilon(a \cup b, c).$$

Beide Seiten geben aber das Vorzeichen der Permutation, welche man braucht, um

$$a_1,\dots a_p, b_1,\dots b_q, c_1,\dots c_r$$

in die natürliche Reihenfolge zu bringen.

Die restlichen Eigenschaften der Graßmannalgebra sind trivial.

Koordinatenfreier Existenzbeweis (Skizze)

Sei V ein Vektorraum. Unter dem Dualraum V^* von V versteht man die Menge aller linearen Abbildungen (Linearformen) $l : V \to \mathbb{R}$, welche in der üblichen Weise addiert und mit Skalaren multipliziert werden. Den Dualraum des Dualraums bezeichnet man mit V^{**}. Es gibt eine wichtige natürliche lineare Abbildung

$$V \longrightarrow V^{**}.$$

Ist $a \in V$ ein Element, so ist sein Bild in V^{**} eine Linearform

$$l_a : V^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Diese ist durch

$$l_a(f) = f(a) \quad (f \in V^*)$$

definiert.

Mittels Basen zeigt man leicht:

Wenn V endlich dimensional ist, so gilt $\dim V = \dim V^*$. Die natürliche Abbildung

$$V \longrightarrow V^{**}$$

ist ein Isomorphismus. (Man nennt diesen Isomorphismus „kanonisch", weil er „natürlich", insbesondere basisunabhängig definiert wurde. Er ist so „natürlich", daß man V und V^{**} identifizieren kann.)

Für eine natürliche Zahl p sei nun V_p der Vektorraum aller alternierenden Multilinearformen

$$\overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{\text{p-Faktoren}} = V^{*p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(Ergänzend definieren wir wieder $V_0 = \mathbb{R}$ und $V_p = 0$ für $p < 0$). Es gilt also $V_1 = V^{**}$. Wir wollen eine lineare Abbildung

$$V_p \times V_q \longrightarrow V_{p+q}$$

konstruieren, so daß wir eine Graßmannalgebra erhalten. Seien

$$A : V^{*p} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad B : V^{*q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei alternierende Multilinearformen. Man kann dann die Abbildung

$$C : V^{*p+q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad C(a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q) = A(a_1, \cdots, a_p) \cdot B(b_1, \cdots, b_q),$$

definieren. Diese ist offensichtlich multilinear aber nicht alternierend.

Doch es gibt einen Prozeß, welcher jede Multilinearform

$$M : V^{*p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine alternierende Multilinearform M^{alt} zuordnet, nämlich

$$M^{\text{alt}}(a_1, \cdots, a_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}\sigma \, M(a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)}).$$

Hierbei bezeichne S_p die Menge aller Permutationen der Ziffern $1, \cdots, p$. Wir definieren nun

$$A \wedge B := C^{\text{alt}}$$

und überlassen es dem Leser, die Axiome der Graßmannalgebra zu beweisen.

Beweis von Satz 1.10. Wir wählen eine Basis

$$e_1, \cdots, e_n \quad \text{von } V.$$

Dann bilden die Vektoren

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n,$$

eine Basis von V_p.

(Wir nehmen $p > 0$ an, die anderen Fälle sind trivial). Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $V_p \to W_p$, welche $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ in $l(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge l(e_{i_p})$ überführt. Der gesuchte Homomorphismus wird notwendigerweise durch diese Folge linearer Abbildungen definiert. Die Homomorphieeigenschaft muß man natürlich nachweisen, was aber einfach ist.

Wir erinnern daran, daß wir V_1 mit dem $\mathbb{R}^n$ identifiziert haben. Die Standardbasis sei $e_1, \cdots, e_n$.

Behauptung. Sei $a \subset \{1, \cdots, n\}$, $\quad a = \{a_1, \cdots, a_p\}$, $\quad a_1 < \cdots a_p$. Es gilt

$$e_a = e_{a_1} \wedge \cdots \wedge e_{a_p}.$$

Der Beweis ist trivial (Induktion nach p unter Ausnutzung der bewiesenen Assoziativität.)

Abschließend eine Zusammenfassung

Die Graßmannalgebra ist im Grunde etwas Triviales. Sei V ein Vektorraum mit Basis $e_1, \cdots, e_n$. Man rechnet mit Ausdrücken

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1, \cdots, i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

bilinear und assoziativ unter Verwendung von

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i.$$

der Existenzbeweis für die Graßmannalgebra zeigt, daß diese Rechenregeln widerspruchsfrei sind.

Sprech- und Schreibweise. Man nennt den p-ten Anteil der Graßmannalgebra über V die p-te *äußere Potenz* von V und bezeichnet sie mit

$$V^{[p]} \text{ oder auch mit } \Lambda^p V.$$

Die Determinante

Sei V ein Vektorraum positiver Dimension n. Dann ist die höchste äußere Potenz $V^{[n]}$ eindimensional. Sei $l : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $l^{[n]} : V^{[n]} \to V^{[n]}$ notwendigerweise die Multiplikation mit einem Skalar. Dieser Skalar ist die *Determinante* von l:

1.11 Satz. *Es gilt*

$$l^{[n]}(a) = \det(l) \cdot a \quad \textit{für } a \in V^{[n]}.$$

Im Falle $V = \mathbb{R}^n$ ist die lineare Abbildung durch eine Matrix gegeben und man erhält den Begriff der Determinante einer Matrix. Wäre dieser Begriff noch nicht entwickelt, so könnte man Satz 1.11 zur Definition der Determinante umfunktionieren. Dies rechtfertigt die eingangs gemachte Anmerkung, daß die Graßmannalgebra als Verallgemeinerung der Determinantenkonstruktion anzusehen ist. Der Beweis von Satz 1.11 ergibt sich unmittelbar aus der bekannten Charakterisierung der Determinante als normierte alternierende Multilinearform.

2. Alternierende Differentialformen, lokale Theorie

Wir betrachten eine (die) Graßmannalgebra über dem $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen ab jetzt ihren (p-ten) Anteil ($p \in \mathbb{Z}$) mit $\Lambda^p\mathbb{R}^n$. Es ist also

$$\Lambda\mathbb{R}^n = \mathbb{R}, \quad \Lambda^1\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n, \quad \Lambda^p\mathbb{R}^n = 0, \quad \text{falls } p < 0 \text{ oder } p > n.$$

Im Falle $1 \le p \le n$ bilden die Elemente

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \quad (1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n)$$

eine Basis von $\Lambda^p\mathbb{R}^n$. Ist $a \subset \{1, \cdots, n\}$ eine Teilmenge von p Elementen, so verwenden wir gelegentlich die Bezeichnung

$$e_a = e_{a_1} \wedge \cdots \wedge e_{a_p},$$

wobei $a_1, \cdots, a_p$ die Elemente von a in ihrer natürlichen Anordnung seien.

2.1 Definition. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offener Teil. Eine* ***alternierende Differentialform*** *vom Grade p ist eine Abbildung*

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^p\mathbb{R}^n.$$

Sei $x \in U$. Dann ist also

$$\omega(x) \in \Lambda^p \mathbb{R}^n,$$

d. h.

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} f_{i_1,\cdots,i_p}(x) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

Die Komponenten in dieser Darstellung sind Funktionen

$$f_{i_1,\cdots,i_p} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (1 \leq i_1 < \cdots < i_p).$$

Also: Eine alternierende Differentialform auf einem offenen Teil des $\mathbb{R}^n$ ist nichts anderes als ein Tupel von Funktionen. Und zwar wird jedem $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ eine Funktion $f_{i_1,\cdots,i_p}$ zugeordnet. Alternierende Differentialformen vom Grade 0 sind gewöhnliche Funktionen.

Sprechweisen. Wir nennen "alternierende Differentialformen" im folgenden auch kurz "Differentialformen" und "alternierende Differentialformen vom Grade p" auch einfach "p-Formen". Alternierende Differentialformen vom Grad 1 nennt man auch Differentiale.

Die Bezeichnung "Differentialformen" für solche Tupel wird sich erst dann rechtfertigen, wenn man sieht, wie man mit diesen Tupeln rechnet.

Merke. Es ist belanglos, was Differentialformen sind, es kommt nur darauf an, wie man mit ihnen rechnet.

Wir definieren Addition von Differentialformen gleichen Grades und das schiefe Produkt punktweise.

$$(\omega + \omega')(x) = \omega(x) + \omega'(x),$$
$$(\omega \wedge \omega')(x) = \omega(x) \wedge \omega'(x).$$

Differentialformen vom Grade 0 sind gewöhnliche Funktionen. Das schiefe Produkt mit einer Funktion f (Differentialformen vom Grad 0) ist einfach die gewöhnliche komponentenweise Multiplikation mit f.

Wir bezeichnen die 1-Form mit dem Konstanten Wert e_i mit dx_i. Dies ist also das n-Tupel von Funktionen, melches an der i-ten Stelle die Funktion konstant 1 und sonst lauter Nullfunktionen enthält,

$$dx_i = (\underline{0}, \ldots, \underline{0}, \underline{1}, \underline{0}, \ldots, \underline{0}).$$

Dabei bezeichnen wir mit $\underline{C}$ die konstante Funktion mit dem Wert C. Eine 1-Form kann mit dieser Bezeichnung auch in der Form

$$(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

geschrieben werden. Allgemeiner kann eine p-Form $(1 \le p \le n)$ in der Form

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n} f_{i_1,\cdots,i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

geschrieben werden.

Wir verwenden für eine Teilmenge $a \subset \{1, \dots, n\}$ von p Elementen die Bezeichnung

$$dx_a := dx_{a_1} \wedge \ldots \wedge dx_{a_p},$$

wobei $a_1, \dots, a_p$ die Elemente von a in ihrer natürlichen Reihenfolge bezeichnen. Schreibt man noch abkürzend $f_a := f_{a_1,\ldots,a_p}$, so erhält man für p-Formen die vereinfachte Schreibweise

$$\omega = \sum_{\sharp a = p} f_a dx_a.$$

Bemerkenswert sind noch die “Top”-Formen (Differentialformen höchsten Grades n). Sie haben nur eine Komponente

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Allgemein haben p-Formen $\binom{n}{p}$ Komponenten.

3. Die äußere Ableitung

Eine Differentialform auf einem offenen Teil $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar*, falls alle ihre Komponenten differenzierbare Funktionen sind. Der Einfachheit halber möge hier unter „differenzierbar“ unendlich oft stetig differenzierbar verstanden werden. Natürlich geht vieles auch unter schwächeren Voraussetzungen.

3.1 Bezeichnung. *Mit*

$$M^p(U), \quad U \subset \mathbb{R}^n \textit{ offen},$$

wird die Menge aller alternierenden Differentialformen vom Grade p bezeichnet und mit

$$A^p(U)$$

die Teilmenge aller differenzierbaren Formen.

Das alternierende (schiefe) Produkt definiert Abbildungen

$$M^p(U) \times M^q(U) \longrightarrow M^{p+q}(U), \quad A^p(U) \times A^q(U) \longrightarrow A^{p+q}(U).$$

Im Falle $p = 0$ ist dies die gewöhnliche Multiplikation mit einer C^∞-Funktion, denn es ist

$$A^0(U) = C^\infty(U).$$

Ausgangspunkt der äußeren Ableitung Ableitung ist eine klassische Konstruktion.

3.2 Definition. *Das **totale Differential** einer C^∞ Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist*

$$df := \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n.$$

Das totale Differential kann als Abbildung

$$d : A^0(U) \longrightarrow A^1(U)$$

aufgefaßt werden. Es ist unser Ziel, diese Abbildung zu einer Abbildung

$$d : A^p(U) \longrightarrow A^{p+1}(U)$$

zu verallgemeinern (genauer aber umständlicher wäre es, d_p anstelle von d zu schreiben, noch genauer aber noch umständlicher müßte man diese Abbildung mit d_p^U bezeichnen.)

Die Definition der Abbildung d benutzt wesentlich den „schiefen Kalkül"

3.3 Definition. *Man definiert die Abbildung*

$$d : A^p(U) \longrightarrow A^{p+1}(U)$$

durch

$$d\left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} f_{i_1 \cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) =$$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} \left(df_{i_1 \cdots i_p}\right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Was passiert hier eigentlich? Es ist ja

$$df_{\dots} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{\dots}}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Es kommt also darauf an,

$$dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_p}$$

zu bestimmen. Falls j unter den $i_1, \cdots, i_p$ vorkommt, ist der Term zu streichen, andernfalls ist das j an die richtige Stelle zu schreiben und ein entsprechendes Vorzeichen aufzunehmen.

Wir führen dies im $\mathbb{R}^3$ genauer durch.

1) $p = 0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,dx_3.$$

2) $p = 1$

$$\begin{aligned}
&d(f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3) = \\
&\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\,dx_3\right) \wedge dx_1 \\
+&\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\,dx_3\right) \wedge dx_2 \\
+&\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,dx_3\right) \wedge dx_3
\end{aligned}$$

Benutzt man die Regeln

$$dx_i \wedge dx_j = -\,dx_j \wedge dx_i \quad \text{speziell}\;\; dx_i \wedge dx_i = 0),$$

so folgt

$$d(f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + f_3\,dx_3) = g_1\,dx_2 \wedge dx_3 + g_2\,dx_1\,dx_3 + g_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

mit

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \\
g_2 &= \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\
g_3 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

Faßt man die dx-Terme nur als Verzierungen auf, so wird also einem 3-Tupel von Funktionen (f_1, f_2, f_3) das neue 3-Tupel (g_1, g_2, g_3) zugeordnet. Es handelt sich hierbei (bis auf ein Vorzeichen um den klassischen Operator **rot** (Rotation).

3) $p = 2$

$$\begin{aligned}
d(f_1\,dx_2 &\wedge dx_3 + f_2\,dx_1 \wedge dx_3 + f_3\,dx_1 \wedge dx_2) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \\
&\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \\
&\quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\,dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

Es wird also jedem Vektorfeld eine skalarwertige Funktion zugeordnet. Es handelt sich (bis auf ein Vorzeichen) um den klassischen Operator **div** (Divergenz.

3.4 Hilfssatz. *Es gilt*

$$d \circ d = 0$$

(genauer müßte man

$$d_{p-1} \circ d_p = 0$$

schreiben).

Den Beweis führt man sofort auf den Fall von 0-Formen zurück, also auf die Formel

$$d \circ d(f) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial\, dx_i \partial\, dx_j}\, dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Diese Formel wird klar wenn man die Summationsindizes i und j vertauscht.

Ein Spezialfall ist die kalssische Formel

$$\mathbf{div} \circ \mathbf{rot} = 0.$$

4. Transformation (Rücktransport) von Differentialformen

Sei

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \ V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen},$$

eine differenzierbare ($C^\infty-$)Abbildung. Ist $f : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf V, so definiert man ihren *Rücktransport* $\varphi^* f$ durch

$$\varphi^* f = f \circ \varphi : U \longrightarrow V.$$

Der Rücktransport induziert insbesondere eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* : C^\infty(V) & \longrightarrow & C^\infty(U) \\ \| & & \| \\ A^0(V) & \longrightarrow & A^0(U). \end{array}$$

Wir wollen allgemeiner den Rücktransport $\varphi^*(\omega)$ einer p-Form ω auf U definieren und insbesondere eine Abbildung

$$\varphi^* : A^p(V) \longrightarrow A^p(U)$$

definieren.

Dieser Rücktransport soll mit den eingeführten Rechenregeln für Differentialformen verträglich sein. Er ist hierdurch auch schon eindeutig bestimmt.

4.1 Satz. *Sei*

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen }, V \subset \mathbb{R}^m \text{ offen},$$

eine differenzierbare Abbildung. Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung, welche jeder p-Form ω auf V eine p-Form $\varphi^*\omega$ auf U zuordnet, so daß folgende Rechenregeln erfüllt sind

1) *Sei f eine 0-Form, also eine Funktion, dann ist*

$$\varphi^* f = f \circ \varphi.$$

2) *Sei ω eine p-Form und ω' eine q-Form auf V. Dann gilt*

$$\varphi'(\omega \wedge \omega') = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\omega').$$

3) *Sei ω differenzierbar. Dann ist auch $\varphi^*\omega$ differenzierbar und es gilt*

$$d(\varphi^*) = \varphi^*(\,d\omega).$$

Wir erhalten also insbesondere Abbildungen

$$A^p(V) \longrightarrow A^p(U).$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, folgern wir gleich

4.2 Satz. *Der Rücktransport ist „funktoriell", d. h. sind*

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \quad (U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m,\ W \subset \mathbb{R}^p \text{ offene Teile})$$

differenzierbare Abbildungen, so gilt

$$\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^*$$

(genauer

$$\varphi^*\,(\psi^*(\omega)) = (\psi \circ \varphi)^*(\omega)$$

für eine p-Form ω auf W).

Da außerdem $\mathrm{id}^*(\omega) = \omega$ für die identische Abbildung $\mathrm{id} : U \to U$ gilt, erhalten wir: Sei

$$\varphi : U \longrightarrow V; \quad U, V \subset \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus. Dann ist der Rücktransport eine Bijektion zwischen Differentialformen auf V und U, insbesondere sind die Abbildungen

$$\varphi^* : A^p(V) \longrightarrow A^p(U)$$

bijektiv.

Beweis. Wir definieren zunächst den Rücktransport $\varphi^*(\,dy_j)$ der Basisdifferentiale

$$dy_1, \cdots, dy_m \text{ auf } V$$

Wir bezeichnen hierbei die „Koordinaten" in V mit $y_1, \cdots, y_m$ und in U mit $x_1, \cdots, x_n$.

Bezeichnet man mit

$$p_j : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p_j(y) = y_j,$$

die j-te Projektion, so gilt offenbar

$$dp_j = dy_j.$$

Wir haben keine andere Wahl, als

$$\varphi^*(\,dy_j) = \varphi^*(\,dp_j) = d\,(\varphi^*(p_j)) = d(\varphi_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx_i$$

zu definieren. Dabei sei $\varphi_j = p_j \circ \varphi$ die j-te Komponente von φ.

Halten wir fest

$$\boxed{\varphi^*(\,dy_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx_i.}$$

Allgemein müssen wir

$$\begin{aligned}\varphi^* &\left(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m} f_{i_1,\cdots,i_p}\,dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_p} \right) \\ = &\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le m} \varphi^*(f_{i_1,\cdots,i_p})\varphi^*(\,dy_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(\,dy_{i_p})\end{aligned}$$

definieren, wobei $\varphi^*(f) = \varphi \circ f$ der Rücktransfer von Funktionen ist.

Jetzt muß man die postulierten Rechenregeln lediglich verifizieren. Dies ist nun einfach:

1) Man verifiziert durch einfache Rechnung zunächst

$$\varphi^*(\,df) = d(\varphi^*(f))$$

für Funktionen (0-Formen) f. Was eingeht, ist die *Kettenregel*

$$\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_j} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j}.$$

Es ist natürlich, diese Formel folgendermaßen zu interpretieren: Sei $a \in U$ ein Punkt und $b = \varphi(a) \in V$ ein Bildpunkt. Wir betrachten

$$\varphi^*(\,df)(a) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n, \quad (\,df)(b) \in \Lambda^1(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m.$$

Wir betrachten alsdann die lineare Abbildung von dem $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$, die durch die Transponierte der Jacobimatrix von φ gegeben ist,

$$J(\varphi; a)' : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(Die Jacobimatrix selbst bildet den $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ ab). Ein Blick auf die Definition von $\varphi^*(\,df)$ zeigt

$$\boxed{\varphi^*(\,df)(a) = J(\varphi; a)'\,((\,df)(a))\,.}$$

Die Definition von $\varphi^*(\omega)$ für beliebige p-Formen ist gerade so gemacht, daß

$$\varphi^*(\omega)(a) = (J(\varphi; a)')^{[p]}\,\omega(a)$$

gilt. Aus den (algebraischen) Rechenregeln für die Graßmannalgebra folgt nun

2) $\varphi^*(\omega \wedge \omega') = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\omega')$.

Als letztes beweist man

3) $\varphi^*(\,d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$.

Aber diese Rechenregel folgt aus der Definition mit Hilfe von 1) und 2) unmittelbar.

Wir wenden unser Augenmerk noch dem Spezialfall der Top-Formen zu. Aus den Rechenregeln für die Graßmannalgebra folgern wir

4.3 Satz. *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega = f\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ eine alternierende Differentialform vom Grade n. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere offene Menge und $\varphi : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung, so gilt*

$$\varphi^*(f\,dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = g\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

mit

$$g(x) = f(\varphi(x)) \cdot \det J(\varphi; x).$$

4.4 Definition. *Eine n-Form $\omega = f\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ auf einem offenen Teil des $\mathbb{R}^n$ heißt integrierbar, falls f (im Lebesgueschen Sinne) integrierbar ist und man definiert*

$$\int\limits_U \omega := \int\limits_U f(x)\,dx.$$

Die Transformationsformel für n-fache Integrale schreibt sich wegen in folgender einfachen Form.

4.5 Bemerkung. *Seien*

$$\varphi : U \longrightarrow V, \quad U, V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

ein orientierungstreuer Diffeomorphismus und ω eine integrierbare n-Form auf V. Dann ist auch $\varphi^*\omega$ integrierbar und es gilt

$$\int\limits_U \varphi^*\omega = \int\limits_V \omega.$$

5. Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Unter einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit verstehen wir im folgenden immer eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit, also eine topologische Mannigfaltigkeit X zusammen mit einem Atlas $\mathcal{A}$, so daß alle Kartentransformationen

$$\gamma = \psi\varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \longrightarrow \psi(U_\psi \cap U_\varphi)$$

beliebig oft stetig differenzierbar sind.

5.1 Definition. *Eine alternierende Differentialform vom Grad p (p-Form)*

$$\omega = (\omega_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$$

auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{A})$ ist eine Vorschrift, welche jeder Karte $\varphi : U_\varphi \to V\varphi$ ($U_\varphi \subset X$ offen, $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ offen) eine p-Form ω_φ auf V_φ zuordnet, so daß für je zwei Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ die Umsetzungsformel

$$\gamma^*\big(\omega_\psi \,|\, \psi(U_\psi \cap U_\varphi)\big) = \omega_\varphi \,|\, \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \qquad (\gamma = \psi \circ \varphi^{-1})$$

gültig ist.

Einprägsamer aber nicht ganz exakt ist die Schreibweise

$$\boxed{\gamma^*\omega_\varphi = \omega_\psi.}$$

Eine p-Form heißt differenzierbar, falls alle ω_φ differenzierbar sind.

Bezeichnung.

$$\begin{aligned} M^p((X,\mathcal{A})) &= \text{Menge aller } p\text{-Formen auf } (X,\mathcal{A}),\\ A^p((X,\mathcal{A})) &= \text{Teilmenge aller differenzierbaren Formen.} \end{aligned}$$

Versieht man einen offenen Teil U des $\mathbb{R}^n$ mit dem tautologischen Atlas, welcher aus einer Karte, der Identität besteht, so erhält man den alten Begriff der p-Form zurück.

$$M^p((U,\{\mathrm{id}_U\}) = M^p(U), \quad A^p((U,\{\mathrm{id}_U\}) = A^p(U).$$

Allgemein schreiben wir $M^p(X)$ anstelle von $M^p((X,\mathcal{A}))$ und $A^p(X)$ anstelle von $A^p((X,\mathcal{A}))$, wenn klar ist, welche differenzierbare Struktur auf X gerade betrachtet wird.

5.2 Bemerkung. *Sei $X = (X,\mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.*
1) *Seien ω, ω' zwei alternierende Differentialformen desselben Grades p. Dann werden durch*

$$(\omega+\omega')_\varphi := \omega_\varphi + \omega'_\varphi, \quad (C\omega)_\varphi := C(\omega_\varphi) \quad (C \in \mathbb{R})$$

ebenfalls p-Formen $\omega+\omega'$, $C\omega$ auf X definiert.
2) *Seien ω eine p-Form und ω' eine q-Form Dann wird durch*

$$(\omega \wedge \omega')_\varphi := \omega_\varphi \wedge \omega'_\varphi$$

eine $(p+q)$-Form $\omega \wedge \omega'$ auf X definiert.
3) *Sei ω eine differenzierbare p-Form. Dann wird durch*

$$(d\omega)_\varphi := d(\omega_\varphi)$$

eine (ebenfalls differenzierbare) $p+1$-Form $d\omega$ auf X definiert.

Zum Beweis muß man die in 5.2 formulierten Bedingungen für die Scharen $\omega+\omega'$, $\omega\wedge\omega'$, $d\omega$ nachweisen. Diese folgen unmittelbar aus den entsprechenden Bedingungen für ω und ω' in Verbindung mit den Verträglichkeitsformeln des „Zurückziehens“ mit den Operationen $+$, $\wedge$ und d.

Wir führen zwei weitere triviale Operationen auf Differentialformen auf. Diese werden sich als Spezialfälle des im nächsten Abschnitt behandelten *Zurückziehens von Differentialformen bei differenzierbaren Abbildungen* erweisen.

5.3 Bemerkung. *Sei ω eine alternierende Differentialform auf $X = (X,\mathcal{A})$ und $U \subset X$ ein offener Teil von X. Wie versehen U mit der eingeschränkten differenzierbaren Struktur $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|U$. Ist φ eine Karte aus $\mathcal{A}$ so bezeichen wir die auf U eingeschränkte Karte mit φ_0. (Der Definitionsbereich von φ_0 ist $U \cap U_\varphi$, der Wertevorrat $\varphi(U \cap U_\varphi)$. Durch die Vorschrift*

$$(\omega|U)_{\varphi_0} := (\omega_\varphi)|\varphi(U \cap U_\varphi)$$

wird eine Differentialform $\omega|U$ auf $(U,\mathcal{A}_0)$ definiert.

Man nennt $\omega|U$ die Einschränkung von ω auf U.

5.4 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}_{\max}$ der zugehörige maximale Atlas. Zu jeder p-Form ω auf $(X, \mathcal{A})$ existiert eine eindeutig bestimmte Ausdehnung $\widetilde{\omega}$ auf $(X, \mathcal{A}_{\max})$, d.h. $\widetilde{\omega}$ ist eine p-Form auf $(X, \mathcal{A}_{\max})$ mit der Eigenschaft*

$$\widetilde{\omega}_\varphi = \omega_\varphi \quad \textit{für } \varphi \in \mathcal{A}.$$

Insbesondere sind die natürlichen Restriktionen

$$M^p(X, \mathcal{A}) \longrightarrow M^p(X, \mathcal{A}_{\max}), \quad A^p(X, \mathcal{A}) \longrightarrow A^p(X, \mathcal{A}_{\max}),$$

bijektiv.

Einen entsprechenden Sachverhalt haben wir für *Volumenformen* anstelle von Differentialformen erläutert. Wir übergehen daher den (einfachen) Beweis von 5.4 und gehen stattdessen auf den Zusammenhang zwischen n-Formen und Volumenformen genauer ein.

Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Alternierende Differentialformen vom Grade n nennt man auch *Topformen.* Diese transformieren sich beim Übergang von einer Karte zur anderen ähnlich wie Volumenformen. Der Unterschied besteht darin, daß bei Topformen die Funktionaldeterminante, bei Volumenformen jedoch ihr Betrag als Transformationsfaktor auftritt. Wenn die Funktionaldeterminante von Kartentransformationen stes positiv ist, besteht kein Unterschied mehr.

5.5 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Topformen (alternierende Differentialformen vom Grad n) und Volumenformen sind dasselbe. Insbesondere ist der Begriff der zulässigen Topform ω sinnvoll, für solche ist das Integral*

$$\int\limits_X \omega$$

definiert.

Eine ebenfalls ausgezeichnet Rolle spielen Nullformen.

5.6 Bemerkung. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{A})$. Ordnet man jeder Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ die Funktion*

$$f_\varphi = f \circ \varphi^{-1} : V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu, so erhält man eine 0-Form $(f_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$. Diese Zuordnung definiert eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller Funktionen und der Menge der 0-Formen.

Der Beweis ist trivial. Wenn Verwechslungen nicht zu befürchten sind, werden wir Funktionen mit den entsprechenden Nullformen identifizieren.

6. Differenzierbare Abbildungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

Im folgenden seien $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Sei $f : X \to Y$ ein Abbildung zwischen ihnen. Ist $\varphi \in \mathcal{A}$, $\psi \in \mathcal{B}$ eine Karte auf X bzw. Y, so betrachten wir die Menge

$$\varphi\big(f^{-1}(V_\psi) \cap U_\psi\big).$$

Ist y ein Punkt aus dieser Menge, so kann man $\varphi(f(\psi^{-1}(y)))$ betrachten. Die hierdurch definierte Abbildung bezeichnen wir (abweichen von der strengen mengentheoretischen Konvention) mit

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \varphi\big(f^{-1}(V_\psi) \cap U_\psi\big) \longrightarrow V_\varphi.$$

Wir hätten gern, daß der Definitionsbereich dieser Abbildung offen ist und setzen daher im folgenden von vornherein voraus, daß f stetig ist.

6.1 Definition. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ heißt differenzierbar, falls die Abbildung*

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \varphi\big(f^{-1}(V_\psi) \cap U_\psi\big) \longrightarrow V_\varphi.$$

für je zwei Karten $\varphi \in \mathcal{A}$, $\psi \in \mathcal{B}$ im üblichen Sinne der reelen Analysis (unendlich oft stetig) differenzierbar ist.

Aus der Tatsache, daß Kartentransformationen Diffeomorphismen sind, ergibt sich unmittelbar:

6.2 Bemerkung. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ ist differenzierbar, falls es zu jedem Punkt $a \in X$ Karten $\varphi \in \mathcal{A}$, $\psi \in \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft*

$$a \in U_\varphi, \quad f(a) \in U_\psi,$$

gibt, sodaß $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ differenzierbar ist.

Die folgenden drei Bemerkungen sind ebenfalls trivial:

6.3 Bemerkung. *Eine Abbildung*

$$f : U \longrightarrow V, \quad U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m \text{ beide offen,}$$

ist genau dann differenzierbar im Sinne der reellen Analysis, falls sie eine differenzierbare Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(U, \{\mathrm{id}_U\})$, $(V, \{\mathrm{id}_V\})$ (tautologische Atlanten) ist.

6.4 Bemerkung. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X = (X, \mathcal{A})$ ist genau dann eine differenzierbare Abbildung zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(X, \mathcal{A})$ und $(\mathbb{R}, \{id_{\mathbb{R}}\})$, falls die zugeordnete 0-Form $f_\varphi = f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist.*

Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^\infty(X)$ die Menge all dieser differnzierbaren Abbildungen. Identifiziert man also Funktionen mit ihren assoziierten 0-Formen, so gilt

$$\mathcal{C}^\infty(X) = A^0(X).$$

6.5 Bemerkung. *Die identische Selbstabbildung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist differenzierbar. Die Zusammensetzung $g \circ f$ zweier differenzierbarer Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten X, Y, Z ist differenzierbar.*

6.6 Definition. *Ein* ***Diffeomorphismus*** *$f : X \to Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist eine bijektive Abbildung, sodaß sowohl f als auch f^{-1} differenzierbar sind.*

Der Begriff des Diffeomorphismus wirft ein neues Licht auf die Konstruktion des maximalen Atlas. Aus 6.2 folgt

6.7 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Abbildung. Die identische Selbstabbildung von X definiert einen Diffeomorphismus*

$$f : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow (X, \mathcal{A}_{\max})$$

.

Hieraus folgt allgemeiner:

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ zwei differenzierbare Strukturen auf ein und demselben Raum X. Die identische Selbstabbildung von X definiert genau dann einen Diffeomorphismus zwischen $(X, \mathcal{A})$ und $(X, \mathcal{B})$, falls die maximalen Atlanten übereinstimmen, ($\mathcal{A}_{\max} = \mathcal{B}_{\max}$).

Aus demselben Grund gilt:

6.8 Bemerkung. *Sei $(X, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Abbildung und $\varphi : U \to V$ eine Abbildung eines offenen Teils $U \subset X$ in einen offenen Teil $V \subset \mathbb{R}^n$. Folgende beiden Aussagen sind äquivalent*

1) φ ist in $\mathcal{A}_{\max}$ enthalten.

2) φ ist definiert einen Diffeomorphismus differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

$$\varphi : (U, \mathcal{A}|U) \longrightarrow (V, \{\mathrm{id}_V\}).$$

Die maximalen Atlanten haben ausgedient, sie subsumieren sich unter den Begriff des Diffeomorphismus!

Zurückziehen von Differentialformen

Wir wollen nun den Rücktransport f^* von Differentialformen für beliebige differenzierbare Abbildungen $f : X \to Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten definieren. Natürlich soll für offene Teile des $\mathbb{R}^n$ das bereits Bekannte herauskommen. Außerdem soll das Zurückziehen lokaler Natur sein. Durch diese beiden Eigenschaften ist das Zurückziehen im wsentlichen festgelegt. Genauer gilt:

6.9 Satz. *Es gibt eine Vorschrift, welche jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \to Y$ differenzierbarer Mannigfaltigkeiten $X = (X, \mathcal{A})$, $Y = (Y, \mathcal{B})$ Abbildungen*

$$f^* : M^p(Y) \longrightarrow M^p(X) \quad (p \in \mathbb{Z})$$

zuordnet, welche folgende Eigenschaften besitzt und durch diese eindeutig festgelegt ist:

1) *Sei $f : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung zwischen offenen Teilen $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, welche wir als differenzierbare Mannigfaltigkeiten (tautologische Struktur) auffassen. In diesem Falle stimmt der Rücktransport mit dem bereits definierten überein.*

2) *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Dann gilt*

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \qquad \text{(Natürlichkeit des Zurückziehens)} \quad .$$

3) *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $U \subset X$ eine offener Teil von X versehen mit der eingeschränkten differenzierbaren Struktur. Bezeichnet man mit $i : U \to X$ die natürliche Inklusion (diese ist differenzierbar), so gilt*

$$i^*(\omega) = \omega|U \quad \text{für } \omega \in M^p(X).$$

Dabei sei $\omega|U$ die eingeschränkte Differentialform im Sinne von 5.3.

4) *Sei $\omega = (\omega_\varphi)_{\varphi \in \mathcal{A}}$ eine Differentialform auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $X = (X, \mathcal{A})$ und $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$ eine Karte aus $\mathcal{A}$. Wir fassen φ als Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $(U, \mathcal{A}|U)$, $(V_\varphi, \{id_V\})$ auf. Es gilt*

$$\omega_\varphi = (\varphi^{-1})^*(\omega|U_\varphi).$$

Die eindeutige Bestimmtheit des Zurückziehens ergibt sich aus der Natürlichkeit und der lokalen Vorgabe. Auf die Gefahr hin, zu formalistisch zu werden formulieren wir noch die hierbei zu benutzende Tatsache, daß der Begriff der Differentialform lokaler Natur ist.

Sei

$$X = \bigcup_i U_{i \in I}$$

eine offene Überdeckung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Jedem $i \in I$ sei eine p-Form ω_i auf U_i zugeordnet. Es gelte

$$\omega_i | (U_i \cap U_j) = \omega_j | (U_i \cap U_j) \quad \textit{für alle } i, j \in I.$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte p-Form auf ganz X mit der Eigenschft

$$\omega | U_i = \omega_i \quad \textit{für alle } i \in I.$$

Der Existenzbeweis zu 6.9 liegt auf der Hand, es gehört lediglich etwas Geschick dazu, ihn in vertretbarem Umfang darzustellen. Wir schlagen folgende Vorgehensweise vor, ohne auf Einzelheiten einzugehen:

Sei also ω eine Differentialform auf $(Y, \mathcal{B})$. Wir wollen die Differentialform $f^*(\omega)$ auf $(X, \mathcal{A})$ definieren. Es ist technisch geschickt, folgenden Atlas

$$\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}_{\max}$$

einzuführen:

Eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$ heiße *klein (bezüglich f)*, falls es eine Karte $\psi \in \mathcal{B}$ gibt, sodaß

$$f(U_\varphi) \subset U_\psi$$

gilt.

Wir konstruieren zunächst eine Differentialform $\widetilde{\omega}$ auf $(X, \widetilde{\mathcal{A}})$ und nehmen dann für $f^*(\omega)$ die gemäß 5.4 assozierte Form auf $(X, \mathcal{A})$.

Konstruktion von $\widetilde{\omega}$. Wir müssen $\widetilde{\omega}_\varphi$ für eine (kleine) Karte $\varphi \in \widetilde{A}$ definieren und wählen hierzu eine Karte $\psi \in \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft $f(U_\varphi) \subset U_\psi$. Der Definitionsbereich von $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ ist dann ganz V_φ und wir können (und müssen)

$$\widetilde{\omega}_\varphi = (\varphi \circ f \circ \psi^{-1})^*(\omega_\psi)$$

definieren. Man muß jetzt zeigen, daß dies Definition nicht von der Wahl von ψ abhängt, und man muß nachweisen, daß man eine Differentialform erhält. Die restlichen Eigenschaften in 6.9 sind mehr oder weniger klar.

Auf einen weiteren Spezialfall des Zurckziehens sollte noch hingeweisen. Die in 5.4 konstruierte Ausdehnung einer Differentialform auf den maximalen Atlas kann interpretiert werden als Zurückziehen bei der identischen Abbildung.

Schließlich weisen wir noch darauf hin, daß die Eigenschaft „differenzierbar“ beim Zurückziehen erhalten bleibt, das Zurückziehen liefert also Abbildungen

$$M^p(Y) \longrightarrow M^p(X), \quad A^p(Y) \longrightarrow A^p(X) \quad (f : X \to Y).$$

Diese sind bijektiv, wenn f ein Diffeomorphismus ist, es gilt dann

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*.$$

Die Transformationsformel für das Integral kann (im orientierbaren Fall) einfach wie folgt formuliert werden:

6.10 Satz. *Sei $f : X \to Y$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus orientierter differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ω eine zulässige Topform auf Y. Dann ist auch $f^*(\omega)$ zulässig und es gilt*

$$\int\limits_X f^*(\omega) = \int\limits_Y \omega.$$

Wir überlassen es hirbei dem Leser, den Begriff „orientierungserhaltend“ vom lokalen Fall auf den Fall beliebiger differenzierbaren Mannigfaltigkeiten via Karten zu übertragen.

Wir beschliessen den Abschnitt mit dem Hinweis, daß das Zurückziehen analog zum lokalen Fall mit den Operationen $+$, $\wedge$ und d verträglich ist. Es gelten also unter naheliegenden Voraussetzungen die Formeln

$$f^*(\omega+\omega') = f^*(\omega)+f^*(\omega'), \quad f^*(\omega\wedge\omega') = f^*(\omega)\wedge f^*(\omega'), \quad f^*(d\omega) = d(f^*(\omega)).$$

7. Der Satz von Stokes

Wir haben nun die Mittel bereitgestellt, um den Satz von Stokes zu formulieren. Der Beweis selbst wird mit dank entwickelten Techniken ganz einfach sein.

Der Einfachheit halber verwenden wir folgende Bezeichnung:

Sei $Y \in X$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimmension d einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X (beispielsweise eine eingebettete Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$). Wir nehen an, daß Y orientiert ist. Die kanonische Inklusion $i : Y \to X$ ist offenbar eine differenzierbare Abbildung. Is ω eine Differentialform auf X, so können wir

$$\omega|Y = i^*\omega$$

betrachten. Ist ω eine d-Form, so ist die Einschränkung auf Y eine Topform und wir können —falls sie zulässig ist—, das Integral

$$\int_Y \omega := \int_Y \omega|Y$$

definieren. Man nennt dieses Intgral auch das Integral von ω längs Y.

7.1 Theorem (Satz von Stokes). *Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $U \subset X$ ein offener nicht leerer Teil mit glattem Rand ∂U. Der Rand ist selbst eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (s. IX.3.6). Wir nehmen an, daß der Abschluß von U (insbesondere auch ∂U) kompakt ist. Sei $\omega \in A^{n-1}(X)$ eine differenzierbare $(n-1)$-Form auf X. Dann gilt*

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega.$$

Man überlegt sich leicht, daß $\omega|U$ eine zulässige Volumenform auf U ist. Dies liegt daran, daß ω auf der umfassenden Mannigfaltigkeit X definiert ist, in welcher U relativ kompakt liegt.

Für den Beweis des Satzes von Stokes ist es technisch geschickt, ihn etwas allgemeiner zu formulieren:

7.2 Theorem (Satz von Stokes, vearallgmeinerte Variante).
Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $U \subset X$ ein offener nicht leerer Teil. Sei Y der glatte Teil des Randes. Schließlich sei ω eine differenzierbare $(n-1)$-Form auf X.

Annahme. Die Menge

$$(U \cup Y) \cap \mathit{Träger}(\omega)$$

ist kompakt.

Dann gilt der Satz von Stokes

$$\int\limits_U d\omega = \int\limits_Y \omega.$$

Wenn alle Randpunkte von U glatt sind und wenn schon $U \cup \partial U$ kompakt ist, so ist die Voraussetzung in 7.2 natürlich erfüllt. 7.1 folgt also aus 7.2.

Beweis von 7.2. Die Idee ist es, den Satz mit Hilfe der Technik der Zerlegung der Eins zu lokalisieren und auf einen Spezialfall zurückzuführen, dan man leicht nachrechnen kann. Dazu dienen zwei Bemerkungen, welche formuliert werden aber wegen ihre Offensichtlichkeit nicht bewiesen werden müssen.

1) Sei X_0 ein offener Teil von X, welcher $(U \cup Y) \cap \text{Träger}(\omega)$ umfasst. Die Formel von Stokes gilt genau dann für (X, U, Y, ω), wenn sie für die Situation (X_0, U, Y, ω) gilt. (Es kommt nicht darauf an , wie ω „weit weg" von $(U \cup Y) \cap$ Träger(ω) aussieht.)

2) Sei $f : X' \to X$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus orientierter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten. Die Formel von Stokes gilt genau dann für (X, U, Y, ω), wenn sie für (X', U', Y', ω') mit $U' = f^{-1}(U)$, $y' = f^{-1}(y)$ und $\omega' = f^*\omega$ gilt.

Wir nutzen nun die Technik der Zerlegung der Eins aus. Die Existenz solcher Zerlegungen haben wir in VIII.3.8 bewiesen. Dort haben wie uns allerdings nur mit topologischen Mannigfaltigkeiten und folgedessen nur mit stetigen Partitionen der Eins befasst. Auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist es jedoch sinnvoll, von differenzierbaren Zerlegungen der Eins zu sprechen, man fordert in VIII.3.2, daß alle aufteretenden Funktionen (unendlich oft) differenzierbar sind. Da Hilfssatz VIII.3.7 auch mit einer differenzierbaren Funktion zu realisieren ist, erhalten wir:

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten gestatten ***differenzierbare*** *Zerlegungen der Eins.*

Dank der Existenz der Zerlegung der Eins, genügt es, den Satz von Stokes für Differentialformen ω mit kleinem Träger zu beweisen. „Klein" bedeute hierbei, daß es einen Punkt $a \in U \cup T$ gibt, so daß der Träger in einer offenen Umgebung von a enthalten ist, welche im Definitionsbereich einer Karte (des maximalen orientierten Atlas) ist, welcher entweder ganz in U enthalten ist $(a \in U)$ oder so daß der Rand durch die Karte „ebengebügelt" wird. Der allgemeine Satz von Stokes wird dank 1) und 2) damit auf folgende beiden Spezialfälle zurückgeführt:

a) $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^n$, $(\partial U = \emptyset)$,

b) $X = \mathbb{R}^n$, $U = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}$. Wie behandeln den Fall b) (der Fall a) ist noch einfacher und beschränken uns der Übersichtlichkeit halber auf den Fall

$n = 2$,

$$\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$
$$d\omega = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Es gilt einerseits

$$\int\limits_{\partial U} \omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,0),$$

andererseits

$$\int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) dxdy.$$

Die Integrale sind natürlich in Wirllichkeit eigentlich, da die Träger von f und g in der oberen Halbebene einschließlich der reellen Achse beschränkt sind. Die beiden Integrale kann man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung mühelos ausrechnen und so den Satz von Stokes verifizieren.

Der Satz von Stokes ist also nicht anderes als eine aufgeblähte Form des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

.