Eberhard Freitag

Vorlesungen über Analysis

E-mail: freitag@mathi.uni-heidelberg.de
home-page: http://www.zruser.uni-heidelberg.de/ t91

Teil I

Differential- und Integralrechnung

für Funktionen einer Veränderlicher

Das vorliegende Manuskript ist aus vielen Niederschriften im Laufe der Zeit entstanden. Es erhebt nicht den Anspruch, lehrbuchreif zu sein. Vieles verdient weitere Vertiefung und auch Beispiele kommen durchaus zu kurz. Auch möge der Leser die vielen Dreck- und Formatierungsfehler mit Nachsicht aufnehmen. Für die sachliche Richtigkeit wird jedoch garantiert, so wahr Eins und Eins Drei ist.

1. Vorwort für Einsteiger

Das vorliegende Manuskript ist eine Ausarbeitung einer Vorlesung, wie sie im Rahmen der Grundausbildung in Mathematik üblich ist. Jeder der drei Teile beinhaltet den Stoff einer vierstündigen Vorlesung jeweils eines Semesters in Anspruch. Der Stoffumfang ist recht gewaltig, das Tempo der Vorlesung hoch. Dies ist dadurch bedingt, daß ohne eine solide Grundausbildung in Analysis ein Zugang zu tieferen Gebieten der Mathematik nicht möglich ist. Aus demselben Grund ist eine exakte Grundlegung der Analyis unabdingbar. Auf wenigen Axiomen (=Grundanahmen) aufbauend, wird das gesamte Gebäude der Analysis mit streng logischen Schlüssen entwickelt. Dementsprechend liegt ein Schwerpunkt der Vorlesung in der Formulierung präziser Aussagen und in dem Führen von Beweisen. Dies fordert ein hohes Maß an Fähigkeit zu abstraktem Denken. Durch den Unterricht an den Gymnasium wird man auf diese Form der Mathematik nur unzulänglich vorbereitet. Dies kann dazu führen, daß das Studium der Mathematik mit falschen Erwartungen angetreten wird. Man sollte daher die erste Zeit dieses Studiums als Orientierungsphase ansehen und dabei ernsthaft prüfen, ob Interesse und Begabung ausreichen, um diesen Weg mit Erfolg und Freude zu gehen. Ich betone dies, weil zum Mathematikstudium eine besondere Neigung und eine besondere Begabung gehören. Dies ist vergleichbar zu einer besonderen Musikalität, die einem als Geschenk in die Wiege gelegt sein kann. Wer sich wirklich für Mathematik interessiert und die nötige Begabung mitbringt, und wer die erforderliche nicht geringe Mühe zu ihrer Erarbeitung aufwendet, wird ein gewaltiges Gedankengebäude von außerordentlicher Schönheit kennenlernen.

Die Vorlesung besteht aus drei einsemestrigen Teilen: Im ersten Semester wird eine Einführung in die reellen Zahlen, in grundlegende Konvergenzbegriffe und schließlich in die Integral- und Differentialrechnung von Funktionen einer Veränderlicher gegeben. Im zweiten Semester erfolgt die Ausweitung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher, im Zentrum stehen die Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Im dritten Semester werden Mannigfaltigkeiten und die sogenannten Integralsätze behandelt.

2. Vorwort für Erfahrene

Diese Vorlesungsausarbeitung wurde bereits Mitte der Sechziger Jahre begonnen, einer Zeit, in welcher der „Bourbakismus“ mit seinen formalen Auswüchsen merkwürdige Blüten trieb. Er schwappte auch in die Schulen über, wo Schüler mit inhaltsleeren Formalien traktiert wurden. Die Mengenlehre ist hier das prägnanteste Beispiel. Mein Ansatzpunkt, der sich bis heute nicht verändert hat, war die Erkenntnis, daß die Analysis eine der inhaltsreichsten und schwierigsten Vorlesungen des Studiums ist. Der Anfänger muß viele neue Techniken erlernen und sich auf ein hohes Tempo einstellen. Daher suchte ich nach einem Weg, diesen Einstieg mit geringst möglichem Aufwand zu ermöglichen. Im ersten Semester werden in großer Ausführlichkeit konvergente Folgen und Reihen reeller Zahlen behandelt. Funktionen werden alsdann nur auf Intervallen definiert betrachtet. Topologische Betrachtungen (Umgebungsbegriff, Kompaktheit) kommen im ersten Semester nicht oder allenfalls am Rande vor. Alles wird „zu Fuß“ mit möglichst geringem Aufwand erzielt. Dafür komme ich recht weit, einige spezielle Funktionen wie die Gammafunktion und auch die Theorie der Fourierreihen werden ausführlich im ersten Semester behandelt.

Im zweiten Semester beginne ich auf höherem Niveau, das Tempo wird gesteigert, da der Hörer nun schon die Grundschwierigkeiten überwunden hat. Die Konvergenzbegriffe werden neu behandelt, bei mir in der Sprache der metrischen Räume, die topologischen Begriffsbildungen werden erarbeitet. Während im ersten Semester nur das Regelintegral*) behandelt wurde, wird im zweiten Semster auf diesem aufbauend das Lebesgues-Integral über den sogenannten Daniel-Lebsgue-Prozeß behandelt.

Es wird gelegentlich der Einwand erhoben, es sei unökonomisch, die Analysis einer und mehrerer Veränderlicher zu trennen. Ich halte diesen Einwand aus zweierlei Gründen für falsch.

Erstens: Um schwierige mathematische Sachverhalte zu verstehen, muß man sie von verschiedensten Perspektiven aus betrachten. Der Übergang vom Elementaren zum Allgemeineren, das Neubegreifen von einer höheren Warte aus, vermittelt tiefere Einsichten als der systematische Weg.

Zweitens: Analysis einer Veränderlicher ist kein reiner Spezialfall der Analysis mehrerer Veränderlicher. Die reelle Gerade ist kein Spezialfall des $\mathbb{R}^n$. Die reelle Gerade ist ein angeordneter Körper, der $\mathbb{R}^n$ hingegen ein metrischer Raum. Hierzu ein Beispiel. Eine monotone Funktion auf einem reellen Intervall ist genau dann stetig, falls ihr Wertevorrat ebenfalls ein Intervall ist. Folgedessen ist die Umkehrfunktion einer injektiven stetigen Funktion auf einem Intervall

*) Das Regelintegral ziehe ich dem Riemannschen Integral vor, weil bereits in seiner Definition der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz in Erscheinung tritt, welcher in dieser Phase der Ausbildung mit Recht stark in den Vordergrund gerückt ist. Aus diesem Grund behandle ich auch das Regalintegral vor der Differentialrechnung.

wieder stetig. Dies sind banale Monotonieschlüsse, die in der Analysis mehrerer Variabler nicht zur Verfügung stehen, mit der Konsequenz, daß manche Sätze dort nur unter stärkeren Voraussetzungen gelten. Ein gutes Beispiel hierfür ist auch die Frage nach der Ableitbarkeit der Umkehrfunktion.

Im dritten Semester betreibe ich Analysis auf Mannigfaltigkeiten und zwar nach einer kurzen Einführung in Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ dann doch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten. Versuche, eine formale Vereinfachung durch Beschränkung auf eingebettete Mannigfaltigkeiten zu erzielen, haben sich bei mir nicht bewährt. Analysis 3 hat somit bei mir den Charakter einer eher anspruchsvollen Kursusvorlesung. Ich neige zu der Ansicht, daß es vielleicht das Beste und Ehrlichste ist, sie als Kursusvorlesung gleichberechtigt neben andere auf den Grundvorlesungen aufbauende Vorlesungen zu stellen.

Man kann auch daran denken, die Analysis 3 zu spalten, beispielsweise in für Mathematiker und Physiker getrennte Veranstaltungen. Den Königsweg, welcher allen Ansprüchen gerecht wird, die an die Analyis 3 gestellt werden, sehe ich im Rahmen einer vierstündigen Vorlesung nicht.

Differentialgleichungen oder Funktionentheorie werden im Übrigen in meinen Grundkursen gar nicht behandelt. Das mag ein Mangel sein, er rührt mich aber letztlich doch wenig. Eine meiner Grunddevisen heißt „Mut zur (Wissens-) Lücke". Studenten sollen eine wissenschaftliche Ausbildung erhalten, die sie in die Lage versetzt, ihre Wissenslücken eigenverantwortlich schließen zu können. Dies jedenfalls sollte ein Ziel unserer Ausbildung sein. Hierfür werden Skripten und Bücher zur Verfügung gestellt.

Studenten sind jedoch keine Container für Wissensmüll, den man angeblich in ferner Zukunft irgendwo bei irgend jemandem einmal wird brauchen können. Ich versuche immer, Mathematik in jeder Phase in sich interessant zu halten. Vertröstungen auf ferne Zukunft sind Sache der Religion und haben in der Ausbildung zu selbstbewußten und kritisch denkenden Mathematikern nichts zu suchen.

Bestrebungen, eine lückenlose und überlappungsfreie Ausbildung zu organisieren, halte ich für verfehlt.

Inhalt

Analyis I

Analyis II

Analyis III

Kapitel I. Reelle Zahlen und Folgen von reellen Zahlen

0. Mengen

Wir setzen den Begriff der *Menge* als bekannt voraus und erläutern nur kurz die wichtigsten *Operationen*, die auf Mengen erklärt sind.

Schreibweise. Meistens werden Mengen mit großen lateinischen Buchstaben, ihre *Elemente* häufig mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

Ist a ein Element der Menge M, so schreibt man

$$a \in M.$$

Sprechweise.

a ist ein Element von M,
a ist in M enthalten,
M enthält (das Element) a.

Ist jedes Element der Menge N auch ein Element der Menge M, so schreibt man

$$N \subset M.$$

Sprechweise.

N ist eine Untermenge (Teilmenge) von M,
N ist in M enthalten,
M umfaßt N.

Beispiele.

a) $N =$ Menge der natürlichen Zahlen,
$M =$ Menge der reellen Zahlen.

b) $N =$ Menge der Affen,
$M =$ Menge der Tiere.

Zwei Mengen M und N sind genau dann *gleich*, wenn M in N und umgekehrt auch N in M enthalten ist. Man kann also sagen:

Die Aussage

$$M = N$$

bedeutet nichts anderes, als daß gilt:

$$M \subset N \text{ und } N \subset M.$$

Will man also von zwei irgendwie definierten Mengen zeigen, daß sie übereinstimmen, so muß man zweierlei nachweisen:

1. Wenn $x \in M$ gilt, so gilt auch $x \in N$ (d.h. $M \subset N$).
2. Wenn $x \in N$ gilt, so gilt auch $x \in M$ (d.h. $N \subset M$).

Operationen auf Mengen

Seien die Mengen M und N irgendwie gegeben. Die Menge aller Elemente x, die *sowohl* in M *als auch* in N enthalten sind, nennt man *Durchschnitt* $M \cap N$, also

$$x \in M \cap N \iff x \in M \text{ und } x \in N.$$

Die *Vereinigungsmenge* $M \cup N$ besteht aus allen Elementen x, die in M *oder* in N enthalten sind, also

$$x \in M \cup N \iff x \in M \text{ oder } x \in N.$$

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß „oder“ in der Mathematik *nicht ausschließlich* verwendet wird. Wenn also x sowohl in M als auch in N enthalten ist, so ist die Aussage „x ist ein Element von M oder von N“ wahr. Es gilt also

$$M \cap N \subset M \cup N.$$

Beispiel.

$M =$ Menge aller Studenten,
$N =$ Menge aller Menschen, die älter als 40 Jahre sind.

Es gehört jemand genau dann der Menge $M \cup N$ an, wenn er Student oder älter als 40 Jahre ist (oder beides gleichzeitig).

Dagegen ist $M \cap N$ die Menge der über 40-jährigen Studenten.

Wenn M und N kein einziges Element gemeinsam haben, so ist $M \cap N$ die sogenannte *leere Menge* $\emptyset$. Diese ist dadurch gekennzeichnet, daß sie keine Elemente enthält.

Es ist beispielsweise zu vermuten, daß die Menge der Krokodile, die nördlich des 85. Breitengrads leben, die leere Menge ist.

1. Axiomatische Einführung der reellen Zahlen

Die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen sind Spezialfälle des Begriffs der *Komposition* (inneren Verknüpfung) auf einer Menge M.

1.1 Definition. *Eine **Komposition** auf einer Menge M ist eine Vorschrift, gemäß welcher je zwei Elementen $a, b \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element*

$$c = a \perp b$$

zugeordnet wird, welches wieder in M enthalten ist: $\quad a \perp b \in M$.

Im allgemeinen wird es auf die Reihenfolge von a und b ankommen, es sind also $a \perp b$ und $b \perp a$ im allgemeinen zwei verschiedene Elemente von M.

Selbstverständlich kann man anstelle von $\perp$ auch eine anderes Zeichen zur Beschreibung einer Komposition (im Grunde jedes beliebige Zeichen) verwenden. Folgende Zeichen sind besonders gebräuchlich:

$$a \perp b,\ a \top b,\ a \cdot b,\ ab,\ a + b,\ a \wedge b.$$

Verwendet man $\cdot$ als Kompositionszeichen, so spricht man auch von einer *Multiplikation* und nennt $a \cdot b$ das *Produkt* von a und b. Verwendet man hingegen $+$ als Verknüpfungssymbol, so spricht man von einer *Addition* und nennt $a + b$ die *Summe* von a und b.

Es wird hier ausdrücklich betont, daß beispielsweise der Begriff der Addition hierbei *nur als Sprechweise* verwendet wird und für jede Komposition in irgendeiner Menge verwendet werden kann.

Das Axiomensystem für die reellen Zahlen.

Das Axiomensystem für die reellen Zahlen besteht aus den Gruppen:

I. Körperaxiome
II. Anordnungsaxiome
III. Vollständigkeitsaxiom.

0. Axiom

Die reellen Zahlen sind die Elemente einer gewissen Menge $\mathbb{R}$, die mindestens zwei Elemente enthält.

Wir können also anstelle von

„x ist eine reelle Zahl“

immer sagen

„x ist ein Element von $\mathbb{R}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.“

I. Körperaxiome

In der Menge $\mathbb{R}$ sind zwei Kompositionen ausgezeichnet:

*Die **Addition** und*
*die **Multiplikation**.*

Dabei sind folgende Eigenschaften erfüllt:

1. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\left.\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a(bc) &= (ab)c \end{aligned}\right\} \quad \textbf{\textit{Assoziativgesetze}}$$

2. *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ ab &= ba \end{aligned} \quad \textbf{\textit{Kommutativgesetze}}$$

3. *Es existieren zwei eindeutig bestimmte Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} a + 0 &= a \qquad \textbf{\textit{neutrales Element der Addition}} \\ a \cdot 1 &= a \qquad \textbf{\textit{neutrales Element der Multiplikation}} \end{aligned}$$

4. *Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert ein eindeutig bestimmtes $-a \in \mathbb{R}$, so daß*

$$a + (-a) = 0$$

gilt.
Zu jedem von 0 verschiedenen Element $a \in \mathbb{R} (a \neq 0)$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

*Man nennt $(-a)$ das **Negative** und a^{-1} das **Inverse** von a.*

5. *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \textbf{\textit{Distributivgesetz}}$$

Bevor wir das nächste Axiomensystem formulieren wollen, ziehen wir aus den Körperaxiomen einige Folgerungen. Wir wollen dabei rein logisch aus den Axiomen schließen und die anschauliche Vorstellung, die wir uns von den reellen Zahlen gebildet haben, nicht benutzen.

1.2 Bemerkung. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Es gibt eine und nur eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, so daß*

$$a + x = b$$

gilt.

Beweis, Eindeutigkeit von x. Aus der Gleichung

$$a + x = b$$

folgt

$$(-a) + (a + x) = (-a) + b.$$

Die Anwendung des Assoziativgesetzes zeigt

$$[(-a) + a] + x = (-a) + b,$$

also

$$0 + x = x = (-a) + b.$$

Wenn also x eine Lösung von $a+x = b$ sein soll, so muß notwendig $x = (-a)+b$ gelten.

Existenz von x. Wir prüfen nach, daß tatsächlich

$$a + x = b \;\text{ mit }\; x = (-a) + b$$

gilt:

$$a + [(-a) + b] = [a + (-a)] + b = 0 + b = b. \qquad \square$$

Schreibweise. $b - a := (-a) + b$.

Übungsaufgabe. Man leite aus der Definition von $b - a$ und den Axiomen ab:

a) $-(b - a) = a - b$,
b) $a - 0 = a$,
c) $0 - a = -a$,
d) $-(-a) = a$.

1.3 Bemerkung. *Es gilt*

$$a \cdot 0 = 0 \;\textit{ für alle reellen Zahlen } a.$$

Beweis. Es gilt

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \quad \text{(Distributivgesetz)}.$$

Außerdem gilt

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0.$$

Wegen Bemerkung 1.2 (Eindeutigkeit der Lösung) gilt daher

$$a \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

1.4 Bemerkung. *Es ist* $\quad 1 \neq 0.$

Beweis. Nach Axiom 0 existiert eine von 0 verschiedene reelle Zahl a ($a \neq 0$). Es ist

$$a \cdot 1 = a \neq 0,$$

aber (wegen Bemerkung 1.3)

$$a \cdot 0 = 0.$$

Demnach kann nicht $1 = 0$ sein. □

1.5 Bemerkung. *Es gilt* $(-1) \cdot (-1) = 1.$

Beweis. Aus $1 + (-1) = 0$ folgt durch Multiplikation mit (-1)

$$(-1) + (-1) \cdot (-1) = 0,$$

also

$$(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1.$$ □

Wir gehen nun auf Lösungen von Gleichungen der Form

$$ax = b$$

ein.

1.6 Bemerkung. *Seien a, b reelle Zahlen, $a \neq 0$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl x, so daß*

$$ax = b$$

gilt.

Der *Beweis* ist dem von Bemerkung 1.2 analog; man hat lediglich

„ + “ durch „ $\cdot$ “

und „ − “ durch „ $^{-1}$ “

zu ersetzen.

Schreibweise. Es sei $b \neq 0$:

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}.$$

1.7 Bemerkung (Nullteilerfreiheit). *Es seien a, b reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$ab = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Beweis. Sei $ab = 0$, aber $a \neq 0$. Wir zeigen, daß dann $b = 0$ gilt. Weil a von Null verschieden ist, können wir das Inverse a^{-1} betrachten. Damit erhalten wir einerseits

$$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

und andererseits

$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b.$$

Aus $a \neq 0$ folgt also $b = 0$. □

Man kann Bemerkung 6 auch so ausdrücken:

Sind a und b von Null verschieden, so ist auch ab von Null verschieden.

1.8 Bemerkung. *Seien a, b, c, d reelle Zahlen, b und d und damit auch bd seien von Null verschieden. Es gilt:*

a) $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

b) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

c) $$\left(\frac{d}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{d}.$$

Wir begnügen uns mit dem *Beweis* von Teil a).
Nach Definition ist die Zahl
$$x = \frac{ad + bc}{bd}$$
durch die Bedingung
$$bd \cdot x = ad + bc$$
festgelegt. Es genügt daher zu beweisen, daß
$$(bd)(ab^{-1} + cd^{-1}) = ad + bc$$
gilt. Dies erhält man aber leicht, wenn man die linke Seite mit Hilfe der Axiome umformt und die Beziehungen $bb^{-1} = 1,\ dd^{-1} = 1$ benutzt. □

Schreibweise. Seien a, b, c reelle Zahlen. Man definiert
$$a + b + c := (a + b) + c = a + (b + c),$$
$$abc := (ab)c = a(bc).$$

Wegen der Unabhängigkeit von der Klammerung (Assoziativgesetz) läßt man die Klammern einfach weg. Das gleiche kann man auch für die Summe (bzw. das Produkt) von vier und mehr reellen Zahlen machen.

Durch die Körperaxiome kann noch nicht ausgedrückt werden, daß es positive und negative Zahlen gibt. Diese Begriffe werden in einem weiteren Axiomensystem eingeführt.

II. Anordnungsaxiome

*In $\mathbb{R}$ ist eine gewisse Teilmenge $\mathbb{R}_+$ ausgezeichnet. Man nennt die Elemente von $\mathbb{R}_+$ die **positiven** reellen Zahlen und schreibt anstelle von*
$$x \in \mathbb{R}_+$$
häufig auch
$$x > 0.$$

Die positiven Zahlen haben die folgenden Eigenschaften:

1. *Wenn a und b positiv sind, so trifft dies auch für $a+b$ und ab zu. In Formeln:*

$$a, b \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow a + b \in \mathbb{R}_+ \textit{ und } ab \in \mathbb{R}_+$$

oder

$$a, b > 0 \Longrightarrow a + b > 0 \textit{ und } ab > 0.$$

2. *Sei a positiv, dann ist $-a$ nicht positiv, also*

$$a > 0 \Longrightarrow -a \not> 0.$$

3. *Sei a eine Zahl, die von Null verschieden ist und die nicht positiv ist, dann ist $-a$ positiv, also*

$$a \not> 0, a \neq 0 \Longrightarrow -a > 0.$$

Wir benutzen im folgenden die üblichen *Bezeichnungen* und *Sprechweisen*:

$a > b$ (a ist größer als b). Dies bedeutet definitionsgemäß nichts anderes als $a - b > 0$.

Anstelle von $a > b$ schreibt man auch häufig $b < a$ (b ist kleiner als a).

Diejenigen Zahlen a, die kleiner als Null sind, heißen die *negativen* Zahlen.

Die Bezeichnung $a \geq b$ bringt zum Ausdruck, daß a größer als b oder daß $a = b$ ist (entsprechend $a \leq b$).

Wir ziehen einige Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen.

1.9 Bemerkung. *Sei $a \neq 0$. Dann ist*

$$a^2 := a \cdot a > 0.$$

Beweis.

a) $a > 0 \Longrightarrow a \cdot a > 0$ nach 1,

b) $a < 0 \Longrightarrow -a > 0$ nach 3.,

$a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$ nach a).

(Die aus den Körperaxiomen abzuleitende Rechenregel

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

sei als Übungsaufgabe gestellt.)

1.10 Bemerkung. *Die Zahl* 1 *ist positiv:* $1 > 0$.

Beweis. Wir wissen bereits, daß 1 von Null verschieden ist. Wegen Bemerkung 1.9 gilt daher

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2 > 0.$$ □

1.11 Bemerkung. *Seien* a, b, c *reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$a > b \text{ und } b > c \Longrightarrow a > c.$$

Beweis.

$$a > b \Longleftrightarrow a - b > 0$$
$$b > c \Longleftrightarrow b - c > 0$$

Es folgt daher

$$(a - b) + (b - c) = a - c > 0.$$

(Die Gleichung

$$(a - b) + (b - c) = a - c$$

ist leicht aus den Körperaxiomen abzuleiten.)

Die restlichen Regeln werden als Übungsaufgaben gestellt.

1.12 Bemerkung. *Aus* $a \geq b$ *und* $b \geq a$ *folgt* $a = b$.

1.13 Bemerkung. *Sei* $a \geq b,\ c \geq 0$. *Dann gilt*

$$ac \geq bc.$$

1.14 Bemerkung. *Aus* $a \geq b,\ b > 0$ *folgt*

$$a^{-1} \leq b^{-1}.$$

Die Rechenregeln 1.13 und 1.14 gelten auch, wenn man „$\geq$“ durch „$>$“ ersetzt.

1.15 Definition. *Als (Absolut-)Betrag einer reellen Zahl* a *definiert man*

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Unmittelbar aus der Definition ergeben sich die folgenden Eigenschaften des Betrags:

1) Es ist $|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

2) $-|a| \leq a \leq |a|$.

3) $|ab| = |a|\,|b|$.

4) $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ für $a \neq 0$.

In der Analysis benötigt man für Abschätzungen häufig die „Dreiecksungleichung“

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$,

welche man leicht durch Fallunterscheidungen beweist.

Die sogenannte *verschärfte Dreiecksungleichung*

6) $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b|$

kann man aus 5) folgern oder direkt ebenfalls durch Fallunterscheidungen beweisen.

7) Sei a eine reelle Zahl mit folgender Eigenschaft: Es gelte $|a| < \varepsilon$ für jede positive Zahl ε. Dann ist $a = 0$.

Beweis. Wenn a von 0 verschieden ist, so gilt

$$|a| > \frac{1}{2}|a|.$$

Die vorausgesetzte Ungleichung wäre also für $\varepsilon := \frac{1}{2}|a|$ falsch. □

Wir schicken dem letzten Axiom — dem *Vollständigkeitsaxiom* — einige Vorbemerkungen voraus.

1.16 Definition. *Sei M eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt* ***Maximum*** *von M, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) $a \in M$.

b) *für alle* $x \in M$ *gilt* $a \geq x$.

Entsprechend definiert man den Begriff des *Minimums*, indem man anstelle von $a \geq x$ die Ungleichung $a \leq x$ fordert.

1.17 Bemerkung. *Das Maximum (Minimum) einer Menge von reellen Zahlen ist, sofern es überhaupt existiert, eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien a und b Maxima der Menge M. Dann gilt:

1) $a \geq b$, weil a Maximum von M und $b \in M$ ist.

2) $b \geq a$.

Aus 1) und 2) folgt nun $a = b$. □

Bezeichnung. Wenn das Maximum (Minimum) einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ existiert, so bezeichnen wir es mit

$$\max M \qquad (\min M).$$

Natürlich gibt es Mengen, die weder ein Maximum, noch ein Minimum besitzen, beispielsweise

1) die leere Menge $\emptyset$.

2) die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.

Interessanter ist folgendes Beispiel:

3) Sei M die Menge aller reellen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x < 2 \qquad *)$$

Hierfür schreibt man auch

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ x < 2\}.$$

Behauptung. Die Menge M hat kein Maximum.

Beweis. Wir schließen indirekt, nehmen also an, daß M ein Maximum a besitzt und führen diese Annahme zum Widerspruch. Nach Voraussetzung ist a Maximum, also insbesondere

$$a \in M, \text{ d.h. } a < 2.$$

Wir betrachten nun irgendeine Zahl x zwischen a und 2

$$a < x < 2 \qquad \left(\text{etwa } x := \frac{a+2}{2}\right).$$

Dann gilt $x \in M$. Die Ungleichung $a < x$ steht nun im Widerspruch zur Annahme, daß a das Maximum von M ist. □

Die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ x < 2\}$$

besitzt also kein Maximum, obwohl sie „nach oben beschränkt“ ist.

1.18 Definition. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge von reellen Zahlen. Eine Zahl a heißt* ***obere (untere) Schranke*** *von M, falls für alle x in M die Ungleichung*

$$x \le a \qquad (x \ge a)$$

gilt.

---

*) Die Zahl 2 ist durch $2 := 1 + 1$ definiert.

Ist a eine obere Schranke von M, so ist natürlich auch jede größere Zahl b, $b \geq a$, eine obere Schranke von M. Wenn die Menge M ein Maximum besitzt, so besitzt M insbesondere eine obere Schranke.

Sprechweise. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt.

Die Zahl 2 ist eine obere Schranke der Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R};\ x < 2\}.$$

Sie ist sogar eine ganz besondere obere Schranke. Sie ist *die kleinste aller oberen Schranken*, also:

Ist a eine obere Schranke von M, so gilt $2 \leq a$.

Der *Beweis* ist einfach. Wir schließen erneut indirekt, nehmen also an, es existiere eine obere Schranke mit der Eigenschaft $a < 2$. Wir betrachten wie oben wieder eine Zahl x zwischen a und 2,

$$a < x < 2 \qquad \left(\text{etwa } x = \frac{a+2}{2}\right).$$

Dann gilt $x \in M$ (wegen $x < 2$) und wir erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung, daß a obere Schranke von M ist (wegen $a < x$). $\square$

Halten wir noch einmal fest:

Die Menge
$$M = \{x \in \mathbb{R};\ x < 2\}$$
ist nach oben beschränkt. Sie besitzt kein Maximum. Aber die Zahl 2 ist die kleinste obere Schranke von M.

III. Vollständigkeitsaxiom

Sei M eine nicht leere Menge von reellen Zahlen, welche nach oben beschränkt ist. Dann existiert eine kleinste obere Schranke a von M, d.h.

1) *a ist obere Schranke von M;*

2) *ist b eine obere Schranke von M, so gilt $a \leq b$.*

Man kann 1) und 2) etwas umständlich auch so aussprechen:

a ist das Minimum der Menge aller oberen Schranken von M.

Da das Minimum einer Menge eindeutig bestimmt ist, erhalten wir

1.19 Bemerkung. *Sei M eine nicht leere nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Die kleinste obere Schranke von M ist eindeutig bestimmt.*

Bezeichnung. Das *Supremum* von M ist die kleinste obere Schranke von M:

$$\sup M = \textit{kleinste obere Schranke von } M.$$

Sei M eine nicht leere Menge reeller Zahlen, welche nach unten beschränkt ist. Dann ist die Menge

$$N := \{x \in \mathbb{R};\ -x \in M\}$$

nach oben beschränkt. Ist a eine untere Schranke von M, so ist $-a$ eine obere Schranke von N und umgekehrt. Aus dem Vollständigkeitsaxiom und aus 1.17 ergibt sich daher:

Ist M eine nicht leere nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen, so besitzt M eine ***größte untere Schranke*** *und diese ist eindeutig bestimmt.*

Bezeichnung. Das *Infimum* von M ist die größte untere Schranke von M:

$$\inf M = \textit{größte untere Schranke von } M.$$

1.20 Bemerkung. *Sei M eine Menge von reellen Zahlen, welche ein Maximum (Minimum) besitzt. Dann gilt*

$$\max M = \sup M \qquad (\min M = \inf M).$$

Wir behandeln abschließend eine Anwendung für das Vollständigkeitsaxiom und betrachten hierzu die folgende Menge reeller Zahlen:

$$M = \{x \in \mathbb{R};\quad x^2 \leq 2\}.$$

(Wir setzen $x^2 := x \cdot x$.)

Diese Menge ist nach oben beschränkt. Beispielsweise ist 2 eine obere Schranke. Wäre dies nicht der Fall, so müßte eine Zahl

$$x \in M,\ x > 2,$$

existieren. Aus den Anordnungsaxiomen folgert man

$$x^2 = x \cdot x > 2x > 2 \cdot 2 > 2 \cdot 1 = 2,$$

also $x^2 > 2$ im Widerspruch zur Annahme $x \in M$.

Die Menge M ist nicht leer; beispielsweise ist $1 \in M$.

Aufgrund des *Vollständigkeitsaxioms* existiert eine *kleinste obere Schranke* a der Menge M.

$$1 \in M \Longrightarrow a \geq 1.$$

Behauptung. Es gilt

$$a^2 = 2.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

1) $a^2 \leq 2.$

Wir wollen indirekt schließen, nehmen also $a^2 > 2$ an. Es existiert eine positive Zahl b mit den Eigenschaften

$$a^2 > b^2 > 2, \; a > b > 0,$$

beispielsweise

$$b = a + \frac{2 - a^2}{2a} = \frac{a^2 + 2}{2a},$$

denn es gilt

$$b^2 - 2 = \frac{(a^2 - 2)^2}{4a^2}.$$

Die Zahl b ist obere Schranke von M, aber echt kleiner als a; Widerspruch!

2) $a^2 \geq 2.$

Wir schließen wieder indirekt, nehmen also $a^2 < 2$ an. Wie im 1. Fall erhalten wir einen Widerspruch, wenn es gelingt, eine positive Zahl b mit der Eigenschaft

$$a^2 < b^2 < 2$$

zu konstruieren. Wir machen den Ansatz

$$b = a + \varepsilon, \; 0 < \varepsilon < 1.$$

Dann gilt

$$b^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 < a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon.$$

Man sieht nun, daß

$$\varepsilon = \frac{2 - a^2}{2(2a + 1)}$$

die gewünschte Eigenschaft hat. □

Wir haben also *mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms* bewiesen, daß eine reelle Zahl

$$a \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 = 2$$

existiert.

Wir werden später sehen, daß man dies *ohne* Vollständigkeitsaxiom, also allein mit Hilfe der Körper- und Anordnungsaxiome, nicht beweisen kann.

2. Natürliche Zahlen, ganze Zahlen und rationale Zahlen

Die *natürlichen Zahlen* sind diejenigen reellen Zahlen, die man als Summe von 1-en darstellen kann, also

$$\begin{aligned}&1\\&2 := 1+1\\&3 := 1+1+1\\&4 := 1+1+1+1 \qquad \text{usw.}\end{aligned}$$

Das „usw.“ ist mathematisch wenig befriedigend. Da wir aber das Zählen, also die natürlichen Zahlen, als bekannt voraussetzen wollen, verzichten wir auf eine exakte Konstruktion der natürlichen Zahlen (s. Anhang zu diesem Abschnitt).

Wir setzen also als bekannt voraus, daß eine Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

1) Es gibt keine natürliche Zahl, die kleiner als 1 ist.
2) Die Summe und das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist wieder eine natürliche Zahl.
3) Die Differenz $n-m$ zweier natürlicher Zahlen n, m ist eine natürliche Zahl, sofern $n > m$ ist.
4) Mit der Bezeichnung

   $$A_n := \{x \le n;\ x \text{ natürlich}\}$$

   für natürliches n gilt

   $$A_{n+1} = A_n \cup \{n+1\}.$$

   (Mit anderen Worten: Zwischen n und $n+1$ existiert keine weitere natürliche Zahl.)
5) Jede nicht leere Menge von natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum.

Auf der Eigenschaft 5) beruht das Beweisverfahren der *vollständigen Induktion*:

Jeder natürlichen Zahl sei eine Aussage $A(n)$ zugeordnet.

Voraussetzung.

a) *$A(1)$ ist wahr.*
b) *Aus der Annahme, daß $A(n)$ für eine natürliche Zahl n wahr ist, läßt sich folgern, daß $A(n+1)$ wahr ist.*

Behauptung.

Die Aussage $A(n)$ ist dann für alle natürlichen Zahlen n wahr.

Andernfalls müßte es wegen der Eigenschaft 5) eine kleinste natürliche Zahl n_0 geben, so daß $A(n_0)$ falsch ist. Wegen a) ist $n_0 \neq 1$. Daher ist auch $n = n_0 - 1$ eine natürliche Zahl. $A(n)$ ist wahr und wegen b) muß auch $A(n+1)$, d.h. $A(n_0)$ wahr sein. Widerspruch! □

Die gleiche Überlegung zeigt, daß man das Beweisverfahren der vollständigen Induktion auch in der folgenden modifizierten Form anwenden kann:

Jeder natürlichen Zahl sei eine Aussage $A(n)$ zugeordnet.

Voraussetzung.

a) $A(1)$ *ist wahr.*

b) Aus der Annahme, daß für eine natürliche Zahl n *die Aussagen* $A(1),\ A(2),\ \dots,\ A(n-1)$ *wahr sind, läßt sich folgern, daß* $A(n)$ *wahr ist.*

Behauptung.

Die Aussage $A(n)$ *ist dann für alle natürlichen Zahlen* n *wahr.*

Als erste Anwendung des Vollständigkeitsaxioms behandeln wir das *Archimedische Prinzip*.

2.1 Theorem (Archimedisches Prinzip). *Zu jeder reellen Zahl* x *existiert eine natürliche Zahl* n *mit der Eigenschaft:*

$$n > x.$$

Beweis (indirekt). Sei x eine reelle Zahl, so daß

$$n \leq x \quad \text{für alle} n \in \mathbb{N}$$

gilt. Mit anderen Worten, $\mathbb{N}$ sei nach oben beschränkt. Wir können dann die kleinste obere Schranke

$$a := \sup \mathbb{N}$$

betrachten.

Da die Zahl $a - 1$ keine obere Schranke mehr sein kann, muß eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft

$$n > a - 1$$

existieren. Hieraus folgt

$$n + 1 > a;$$

das ist aber eine Widerspruch, denn $n + 1$ ist ja auch eine natürliche Zahl. □

Es folgen nun einige Formeln, die mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

1) Sei a eine reelle, n eine natürliche Zahl. Man definiert

$$a^n := \overbrace{a \cdots a}^{n-\text{mal}},$$

also

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Wollte man exakt vorgehen, d.h. die Pünktchen durch strenge Begriffe ersetzen, so müßte man eine induktive Konstruktion von a^n vornehmen; diese ist jedoch etwas heikel (s. Anhang zu diesem Abschnitt).

Wir begnügen uns daher mit dem evidenten Resultat dieser induktiven Konstruktion

$$\boxed{a^1 = a, \qquad a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.}$$

Mit diesen zwei Eigenschaften operierend kann man nun einige Formeln ableiten. Die Beweise werden nur angedeutet.

a) $\qquad a^{n+m} = a^n \cdot a^m \qquad (n, m$ natürliche Zahlen, a reell)

(*Beweis* durch vollständige Induktion nach n bei festem, aber beliebigem m.)

b) Man definiert

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ für } n \in \mathbb{N},\ a \neq 0.$$

Dazu muß man sich allerdings klarmachen, daß mit a auch jede Potenz a^n von Null verschieden ist. Auch dies zeigt man durch vollständige Induktion.

2) Sei n eine natürliche Zahl. Man definiert

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad \text{(lies: } n \textit{ Fakultät.})$$

Auch hier ist eine induktive Definition vorzunehmen.

$$\boxed{1! = 1, \quad (n+1)! = n!\,(n+1).}$$

Man definiert außerdem

$$0! := 1.$$

Der sogenannte *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ (lies: n *über* k) ist durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiert. Dabei sind n, k ganze Zahlen, $n \geq k \geq 0$.

Übungsaufgabe.

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Hieraus folgt, daß die Binomialkoeffizienten ganze Zahlen sind.

3) Seien

$$a_1, \dots, a_n$$

reelle Zahlen. Es ist also gemäß einer bestimmten Vorschrift jeder natürlichen Zahl ν zwischen 1 und n $(1 \leq \nu \leq n)$ eine gewisse reelle Zahl a_ν zugeordnet.

Man definiert

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu.$$

Auch hier müßte man eine induktive Konstruktion vornehmen. Das Resultat ist

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{1} a_\nu = a_1, \qquad \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right) + a_{n+1}.}$$

Übungsaufgabe.

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + b_\nu).$$

4) Die *binomische Formel*.

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu b^{n-\nu}.}$$

Der *Beweis* erfolgt erneut durch vollständige Induktion nach n.

5) Man beweist durch Induktion nach n die beiden Formeln

a) $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1).$$

b) $$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad \text{für } a \neq 1.$$

Wir führen den Beweis von b) (der sog. *geometrischen Summenformel)* durch.

Induktionsbeginn: $n = 1$.

$$1 + a = \frac{1 - a^2}{1 - a}$$

Induktionsschritt. Die Formel sei für n schon bewiesen. Wir beweisen sie für $n+1$.

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} a^\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a^\nu + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

6) Die Bernoullische Ungleichung.

$$(1+a)^n \geq 1 + na \text{ für } a \geq -1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle natürlichen Zahlen n und für alle reellen Zahlen $a \geq -1$. Zum Beweis dieser Formel könnte man zunächst daran denken, die binomische Formel zu benutzen. Es gilt ja

$$(1+a)^n = 1 + na + \text{weitere Summanden}.$$

Wären diese weiteren Summanden nicht negativ, so wäre die Ungleichung schon bewiesen. Dies ist jedoch nur im Fall

$$a \geq 0$$

richtig. Liegt a zwischen -1 und 0, so können negative und positive Summanden auftreten, deren Größenordnung schlecht zu überschauen ist.

Es empfiehlt sich daher, direkt einen Induktionsbeweis zu machen.

Induktionsbeginn. $n = 1$.

$$1 + a \geq 1 + a.$$

Induktionsschritt. Die Ungleichung sei für n schon bewiesen. Wir beweisen sie für $n+1$.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a).$$

Hierbei wurde außer der Induktionsvoraussetzung benutzt, daß $1+a$ nicht negativ ist.

$$(1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a. \qquad \square$$

Wir kommen nun zu den *ganzen Zahlen.*

2.2 Definition. *Eine reelle Zahl a heißt* ***ganz (ganz rational)****, wenn gilt*

$$a \in \mathbb{N} \text{ oder } a = 0 \text{ oder } -a \in \mathbb{N}.$$

Aus den bisher bewiesenen Eigenschaften der natürlichen Zahlen folgert man leicht

2.3 Bemerkung. *Seien a, b ganze Zahlen. Dann sind auch die Zahlen*

$$a + b,\ a - b \textit{ und } a \cdot b$$

ganz.

Bezeichnung. $\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen.

Übungsaufgabe. Seien a, b ganze Zahlen mit $a \cdot b = 1$. Dann gilt

$$a = b = 1 \text{ oder } a = b = -1.$$

2.4 Hilfssatz. *Sei x eine reelle Zahl. Es gibt eine größte ganze Zahl n mit der Eigenschaft*

$$n \leq x.$$

Beweis. Übungsaufgabe. (Man benutze das Vollständigkeitsaxiom.) □

Bezeichnung. Die größte ganze Zahl $\leq x$ wird mit $[x]$ bezeichnet. Offenbar gilt

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

Um zu einem Bereich zu kommen, der auch gegenüber dem Invertierungsprozeß stabil ist, führen wir die *rationalen Zahlen* ein.

2.5 Definition. *Eine reelle Zahl heißt* ***rational****, wenn sie sich in der Form*

$$x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z};\ b \neq 0$$

schreiben läßt.

2.6 Bemerkung. *Seien x, y rationale Zahlen. Dann sind auch die Zahlen*

$$x + y,\ x - y,\ x \cdot y \textit{ sowie } \frac{x}{y} \textit{ (für } y \neq 0)$$

rational.

Bezeichnung. $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob damit alle reellen Zahlen erfaßt sind, ob also jede reelle Zahl rational ist. Dies ist nicht der Fall.

2.7 Bemerkung. *Es gibt keine rationale Zahl x mit*

$$x^2 = 2.$$

Beweis (indirekt). Sei

$$x = \frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \text{ mit } x^2 = 2.$$

Zum Beweis benötigen wir einige Eigenschaften *gerader* Zahlen, auf deren Ableitung wir hier verzichten, die aber nicht schwer aus dem Bisherigen zu gewinnen sind.
Eine ganze Zahl heißt *gerade*, wenn $a/2$ auch ganz ist, also

$$a = 2a_0,\ a_0 \in \mathbb{Z}.$$

Ist dies nicht der Fall, so heißt a *ungerade*.
Eigenschaften.

a) a ungerade $\Longrightarrow a = 2a_0 + 1,\ a_0 \in \mathbb{Z}$.

b) $a^2 = a \cdot a$ gerade $\Longrightarrow a$ gerade.

c) Sei x rational. Es gibt eine Darstellung

$$x = \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,$$

wo a und b nicht beide gerade sind.

Wir gelangen nun zum *Beweis* von 2.7. Sei $x = a/b$ wie in Eigenschaft c) beschrieben. Es gelte

$$x^2 = 2 \quad \text{also} \quad a^2 = 2b^2.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) a ist ungerade. Dann ist auch a^2 ungerade, aber $2b^2$ ist gerade.

2) a ist gerade und b ist ungerade. Schreibt man

$$a = 2a_0,\ a_0 \in \mathbb{Z},$$

so gilt

$$2b^2 = 2 \cdot 2a_0^2 \text{ oder } b^2 = 2a_0^2.$$

Dabei ist b und damit auch b^2 ungerade, $2a_0^2$ ist aber gerade.

Beide Fälle führen also auf einen Widerspruch. □

Die rationalen Zahlen liegen in einem gewissen Sinne *dicht* in den reellen Zahlen.

2.8 Satz. *Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Dann existiert eine rationale Zahl x mit der Eigenschaft*

$$a < x < b.$$

Beweis. Wir wählen eine natürliche Zahl n mit

$$n > \frac{1}{b-a} \qquad \text{(Archimedisches Prinzip)}.$$

Hieraus folgt

$$nb > na + 1 \geq [na] + 1 > na.$$

Die rationale Zahl

$$x = \frac{[na]+1}{n}$$

hat offenbar die gewünschte Eigenschaft. □

Die Menge der rationalen Zahlen ist wegen 2.7 eine echte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen. Die Körper- und Anordnungsaxiome sind wegen 2.6 im Bereich der rationalen Zahlen gültig. Aus diesem Grunde ist es unmöglich, mit Hilfe der Körper- und Anordnungsaxiome allein die Existenz von „$\sqrt{2}$" zu beweisen, worauf wir bereits am Ende des ersten Paragraphen hingewiesen haben.

Wir gehen abschließend noch kurz auf den Begriff der *endlichen Menge* ein. Da es sich um einen elementaren, der Anschauung gut zugänglichen Begriff handelt, soll nur kurz skizziert werden, wie man diesen Begriff präzise faßt.

Der Prototyp einer endlichen Menge ist der Abschnitt

$$A_n := \{1, 2, \ldots, n\} = \{\nu \in \mathbb{N};\ \nu \leq n\}.$$

Eine beliebige, nicht leere Menge M heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß man die Elemente aus M durchnumerieren kann:

$$M = \{m_1, \ldots, m_n\}.$$

Dieses Durchnumerieren ist eine Vorschrift, gemäß welcher jeder natürlichen Zahl ν zwischen 1 und n $(1 \leq \nu \leq n)$ eindeutig ein Element m_ν von M zugeordnet wird, so daß jedes Element $m \in M$ in dieser Numerierung vorkommt.

Man kann dieses Numerieren stets so arrangieren, daß keines der Elemente von M mehrfach erfaßt wird. (Auch dies müßte man streng genommen beweisen.)

$$\nu \neq \mu \Longrightarrow m_\nu \neq m_\mu \qquad (1 \leq \nu < \mu \leq n).$$

Man nennt dann n die Anzahl der Elemente von M.

$$n = \#M = \text{Anzahl der Elemente von} M.$$

Man kann natürlich eine endliche Menge M, wenn sie mehr als ein Element enthält, auf verschiedene Weisen durchnumerieren. wir müßten jetzt eigentlich zeigen, daß die Anzahl n nicht von der speziell gewählten Numerierung abhängt, verzichten aber hierauf.

Konvention. Auch die leere Menge ist endlich; die Anzahl ihrer Elemente ist 0.

Ohne auf die *Beweise* einzugehen, stellen wir noch einige Eigenschaften endlicher Mengen zusammen, die wir häufig benutzen:

1) Sind $M_1, \dots, M_n$ endliche Mengen, so ist auch die Vereinigungsmenge

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n = \left\{ x; \quad x \in M_\nu \text{ für ein } \nu,\ 1 \leq \nu \leq n \right\}$$

endlich.

2) Jede Teilmenge $N \subset M$ einer endlichen Menge M ist endlich.

2.9 Bemerkung. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine endliche, nicht leere Menge von reellen Zahlen. Die Menge M besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

Beweis. Induktion nach $n =$ Anzahl der Elemente von M. □

Hieraus kann man beispielsweise schließen, daß die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen nicht endlich ist, denn es gibt ja keine größte natürliche Zahl.

Eine nach oben beschränkte Menge von natürlichen Zahlen muß aufgrund des Archimedischen Prinzips in einer der Mengen A_n enthalten sein. Sie ist daher wie A_n eine endliche Menge, d.h.

Eine Menge von natürlichen Zahlen ist genau dann endlich, wenn sie nach oben beschränkt ist.

Natürliche Zahlen. Bei einem gründlichen Aufbau des Zahlsystems würde man erst $\mathbb{N}$ über ein geeignetes Axiomensystem einführen (die sogenannten Peanoaxiome) und dann durch eine Konstruktion $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{N}$ gewinnen.

Wir geben kurz an, wie man $\mathbb{N}$ exakt als Teilmenge von $\mathbb{R}$ definieren kann, wenn man sich $\mathbb{R}$ als gegeben denkt, wie wir das hier tun wollen.

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv *, falls $1 \in M$ und falls mit a auch $a+1$ in M enthalten ist. Eine Zahl $n \in \mathbb{R}$ heißt* natürlich *, falls sie jeder induktiven Teilmenge angehört.*

Diese Definition mutet merkwürdig an. Sie hat den Vorteil, exakt zu sein, Pünktchen kommen nicht vor. Man kann nun alle formulierten Eigenschaften der natürlichen Zahlen ableiten. Wir geben nur Beispiele: Da $\{x \in \mathbb{R},\ x \geq 1\}$ induktiv ist, gilt $n \geq 1$ für jede natürliche Zahl. Da die Menge $\{1\} \cup \{n \in \mathbb{N};\ n \geq 2\}$ induktiv ist, gibt es keine natürliche Zahl zwischen 1 und 2 ($:= 1+1$), u.s.w.

Induktive Konstruktion. Sei M eine Menge, $a \in M$ ein festes Element und $f : M \to M$ eine Abbildung (s. §6). Es ist zu zeigen, daß es eine eindeutig bestimmte Folge (a_n) gibt mit $a_1 = a$ und $a_{n+1} = f(a_n)$. Die Existenz dieser Folge ist plausibel,

$$a_1 = a, \quad a_2 = f(a), \quad a_3 = f(f(a)) \ldots .$$

Will man die „Pünktchen“ durch eine exakte Konstruktion ersetzen, so muß man wie folgt vorgehen: Sei $A(n)$ folgende Aussage für $n \in \mathbb{N}$:

Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $F_n : A_n \to M$ mit den Eigenschaften

$$F_n(1) = 1, \quad F_n(k+1) = f(F_n(k)) \text{ für } k < n.$$

Diese Aussage kann man durch Induktion nach n beweisen. Nachdem die Abbildungen F_n definiert sind, setzt man $a_n := F_n(n)$.

3. Konvergente Folgen

3.1 Definition. *Sei M eine Menge. Eine **Folge** von Elementen aus M ist eine Vorschrift, gemäß welcher jeder natürlichen Zahl n eindeutig ein Element $a_n \in M$ zugeordnet wird.*

Der Zahl 1 ist also ein gewisses Element a_1, der Zahl 2 ein Element a_2 zugeordnet, usw.

Schreibweise. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach (a_n).

Wenn man annehmen kann, daß der Leser aus dem Zusammenhang erkennt, wie die Folge aufgebaut ist, so schreibt man einfach

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots .$$

In dieser Vorlesung interessieren uns hauptsächlich Zahlenfolgen, die Menge M ist dabei also die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Beispiele.

a) $a_n = n$ (in der „naiven Schreibweise" ist dies die Folge $1, 2, 3, \ldots$)

b) $a_n = \frac{1}{n}$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

c) $a_n = n^2$ $1, 4, 9, \ldots$

d) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{für ungerade } n \\ -1 & \text{für gerade } n \end{cases}$ oder $a_n = (-1)^{n+1}$.

e) $a_n = \frac{1}{2}$ für alle n $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$

Bevor wir den Begriff der *Konvergenz* einer Folge einführen, erinnern wir noch einmal an das Archimedische Prinzip.

Zu jeder positiven reellen Zahl x existiert eine natürliche Zahl N mit $N > x$.

Es gilt dann sogar

$$n > x \text{ für alle } n \geq N.$$

Diesen Sachverhalt drückt man manchmal auch so aus:

$$\boxed{\text{Die Folge der natürlichen Zahlen wächst über jede Grenze.}}$$

Wir können diese Sprechweise zu einer Definition erheben, indem wir folgende Vereinbarung treffen:

Eine Folge reeller Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ***wächst über jede Grenze****, wenn es zu jeder positiven Zahl x eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft*

$$a_n > x \textit{ für alle } n \geq N$$

gibt.

Wir nehmen vorübergehend an, in der Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ seien alle Glieder von Null verschieden. Dann können wir die reziproke Folge

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = \frac{1}{a_2},\ b_3 = \frac{1}{a_3},\ \ldots$$

bilden.

Offensichtlich sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1) Die Folge

$$|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$$

wächst über jede Grenze.

2) Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft

$$|b_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Denn wenn x positiv ist, so ist auch $\varepsilon = \frac{1}{x}$ positiv und umgekehrt.

3.2 Definition. *Eine Folge reeller Zahlen*

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \dots$$

*heißt eine **Nullfolge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so daß gilt:*

$$|a_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Diese Definition ist selbstverständlich so zu verstehen, daß N von ε abhängen darf. Es ist in der Regel zu erwarten, daß N umso größer gewählt werden muß, je kleiner das ε vorgegeben wird. Wie klein dieses vorgegebene ε jedoch auch immer sein mag, es muß stets ein solches N existieren.

Für den Fall, daß alle Folgenglieder a_n von Null verschieden sind, kann man offenbar sagen:

$$(a_n) \text{ Nullfolge} \iff \left(\frac{1}{|a_n|}\right) \text{ wächst über jede Grenze,}$$

$$(|a_n|) \text{ wächst über jede Grenze} \iff \left(\frac{1}{a_n}\right) \text{ Nullfolge.}$$

Beispielsweise ist

$$1,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{3}, \dots \qquad \left(\text{allgemeines Glied } \frac{1}{n}\right)$$

eine Nullfolge (obwohl kein einziges Glied dieser Folge selbst Null ist).

3.3 Hilfssatz. *Sei*

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \dots$$

eine Nullfolge und

$$b_1,\, b_2,\, b_3, \dots$$

eine Folge, so daß

$$|b_n| \leq |a_n| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Dann ist auch (b_n) eine Nullfolge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl. Nach Voraussetzung existiert eine natürliche Zahl N mit

$$|a_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Es gilt dann entsprechend

$$|b_n| < \varepsilon \text{ für } n \geq N,$$

womit auch (b_n) als Nullfolge erkannt ist. □

Diese einfache Bemerkung zeigt, daß beispielsweise auch

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9}, \dots \qquad \text{(allgemeines Glied } \frac{1}{n^2}\text{)}$$

und

$$1,\ 0, \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5}, \dots \left(\text{allgemeines Glied } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für ungerade } n \\ 0 & \text{für gerade } n \end{cases}\right)$$

Nullfolgen sind, denn sie werden ja, wie man sagt, *majorisiert* durch die Folge $\frac{1}{n}$.

3.4 Hilfssatz. *Sei* $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$ *eine Nullfolge und* C *eine positive reelle Zahl. Dann ist auch die Folge*

$$Ca_1,\ Ca_2,\ Ca_3, \dots$$

eine Nullfolge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Die Zahl ε/C ist dann ebenfalls positiv. Es existiert daher eine natürliche Zahl N, so daß gilt

$$n \geq N \Longrightarrow |Ca_n| = C|a_n| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Es ist also

$$|Ca_n| < \varepsilon \text{ für hinreichend großes} n \ (n \geq N). \qquad \square$$

Wir geben nun ein etwas komplizierteres Beispiel für eine Nullfoge an.

Behauptung. *Sei* $-1 < a < 1$. *Dann ist die Folge*

$$a, a^2, a^3 \dots \qquad \textit{(allgemeines Glied } a^n\textit{)}$$

eine Nullfolge.

Beweis. Gilt $a = 0$, so ist die Behauptung trivial. Mann kann also $a \neq 0$ annehmen, also $0 < |a| < 1$. Hieraus folgt

$$\left|\frac{1}{a}\right| > 1, \text{ also } \left|\frac{1}{a}\right| = 1 + \delta$$

mit einer positiven Zahl $\delta > 0$. Dann folgt aus der Bernoullischen Ungleichung

$$\left|\frac{1}{a^n}\right| = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

oder

$$|a^n| < \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{n}. \qquad \square$$

3.5 Definition. *Eine Folge reeller Zahlen*

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \dots$$

*heißt **konvergent**, wenn es eine Zahl a gibt, so daß die Folge*

$$a_1 - a,\ a_2 - a,\ a_3 - a,\ \dots$$

eine Nullfolge ist.

Mit anderen Worten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl N mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Es ist von der Definition her nicht unmittelbar klar, daß die Zahl a eindeutig bestimmt ist. Dies muß vielmehr bewiesen werden. Es seien also a und b zwei reelle Zahlen, so daß

$$(a_n - a) \text{ und } (a_n - b)$$

Nullfolgen sind. Wir nehmen an, daß $a \neq b$ gilt und führen dies zu einem Widerspruch.

Dazu führen wir die positive Zahl

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b| > 0$$

ein. Es gibt dann natürliche Zahlen N' und N'', so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N'$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \text{ für } n \geq N''$$

gilt. Setzt man

$$N := \max\{N', N''\},$$

so gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon,\ |a_n - b| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt nun

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = |a - b|.$$

Die sich ergebende Ungleichung

$$|a - b| < |a - b|$$

ist aber sicherlich falsch. □

Wegen der Eindeutigkeit von a können wir nun folgende *Sprechweise* vereinbaren:

Wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist, so heißt

a der *Grenzwert (Limes)* der Folge (a_n).

Man sagt auch:

Die Folge (a_n) *konvergiert gegen a*.

In Zeichen:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{oder} \qquad a_n \longrightarrow a \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Halten wir noch einmal fest

3.6 Satz. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beispiele.

a)
$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.

Beweis. Es ist
$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$ □

In den folgenden Beispielen setzen wir die Existenz von n-ten Wurzeln voraus. Diese wird in Kapitel II, §2 bewiesen. Wir setzen also voraus:

Zu jeder positiven Zahl $a > 0$ und zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine eindeutig bestimmte positive Zahl b mit
$$b^n = a.$$

Schreibweise.
$$b = a^{\frac{1}{n}} \qquad \text{oder} \qquad b = \sqrt[n]{a}.$$

b) *Sei $a \geq 1$. Die Folge $(\sqrt[n]{a})$ konvergiert und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Beweis. Wir setzen
$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n.$$

Offenbar ist δ_n nicht negativ,
$$\delta_n \geq 0.$$

Nach der Bernoullischen Ungleichung gilt
$$a = (1 + \delta_n)^n \geq 1 + n\delta_n$$

oder
$$0 \leq \delta_n \leq (a-1)\frac{1}{n}.$$

Daher ist (δ_n) eine Nullfolge. □

Die Folge $\sqrt[n]{n}$ konvergiert gegen 1.

Beweis. Wir schreiben wieder
$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n, \;\; \delta_n \geq 0$$

oder

$$n = (1 + \delta_n)^n.$$

Ein erneuter Versuch mit der BERNOULLIschen Ungleichung führt nicht zum Ziel, wovon sich der Leser überzeugen möge.

Der binomischen Formel entnimmt man die Abschätzung

$$n = (1 + \delta_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$$

oder

$$\delta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \text{ für } n \geq 2.$$

Übungsaufgabe.

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad \text{(und damit auch } \delta_n\text{)}$$

ist eine Nullfolge. □

Abschließend noch ein Beispiel einer Folge, welche nicht konvergiert

$$1, -1, 1, -1, \dots \qquad \text{(allgemeines Glied } (-1)^{n+1}\text{)}.$$

Behauptung. Diese Folge konvergiert nicht.

Beweis (indirekt). Die Folge konvergiere gegen a. Es gibt dann eine $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - (-1)^{n+1}| < \frac{1}{2} \text{ für } n \geq N.$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^{N+2} - (-1)^{N+1}| = |(-1)^{N+2} - a + a - (-1)^{N+1}| \\ &\leq |(-1)^{N+2} - a| + |a - (-1)^{N+1}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch. □

Wenn zwei Folgen

$$(a_n) \text{ und } (b_n)$$

gegeben sind, die bis auf endlich viele Ausnahmeglieder übereinstimmen, wenn es also eine natürliche Zahl n_0 gibt mit

$$a_n = b_n \text{ für } n \geq n_0,$$

so unterscheiden sich die beiden Folgen in bezug auf ihr Konvergenzverhalten nicht, d.h.

$$(a_n) \text{ konvergiert} \iff (b_n) \text{ konvergiert}$$

und gegebenenfalls gilt

$$\lim a_n = \lim b_n.$$

Man kann nämlich das zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ zu konstruierende N von vornherein der Bedingung $N \geq n_0$ unterwerfen.

Diese triviale Eigenschaft von Folgen werden wir häufig verwenden, ohne besonders darauf hinzuweisen.

Permanenzeigenschaften des Grenzwertbegriffs.

3.7 Satz. *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten a bzw. b und sei C eine reelle Zahl. Die Folgen*

$$(a_n + b_n),\ (Ca_n),\ (a_n b_n) \textit{ und } (|a_n|)$$

konvergieren ebenfalls und zwar gegen die Grenzwerte

$$a + b,\ Ca,\ ab \textit{ und } |a|.$$

Es gelten also die Formeln

a) $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

b) $$\lim_{n\to\infty} (Ca_n) = C \lim_{n\to\infty} a_n$$

c) $$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$$

d) $$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon,\ |b_n - b| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

a) Die Abschätzung

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \text{ für } n \geq N$$

zeigt, daß $(a_n + b_n)$ gegen $a + b$ konvergiert.

b) Man beachte 3.4.

c) Wir gehen aus von der Abschätzung

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < \varepsilon(|a_n| + |b|) \text{ für } n \geq N. \end{aligned}$$

Wir sind offenbar fertig, wenn wir zeigen können, daß $|a_n| + |b|$ durch eine von n und ε unabhängige Konstante beschränkt ist. Da aber $|b|$ sowieso nicht von n und ε abhängt, ist eine Konstante C zu suchen mit der Eigenschaft

$$|a_n| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Eigenschaft konvergenter Folgen ist sehr wichtig, so daß wir sie ausdrücklich formulieren.

3.8 Hilfssatz. *Jede konvergente Folge a_1, a_2, $a_3, \dots$ ist beschränkt. Es gibt also eine reelle Zahl C mit*

$$|a_n| \le C \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots .$$

Beweis. Es existiert eine natürliche Zahl N, so daß

$$|a_n - a| < 1 \text{ für } n \ge N$$

gilt. Aus der verschärften Dreiecksunleichung ergibt sich

$$|a_n| < 1 + |a| \text{ für } n \ge N.$$

Man setze nun

$$C = \max\{|a_1|, \ \dots, \ |a_N|, \ 1 + |a|\}. \qquad \square$$

Etwas Vorsicht ist bei der Division von Folgen am Platze, da man vermeiden muß, durch Null zu dividieren.

3.9 Satz. *Sei (a_n) eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a. Wenn alle Folgenglieder a_n und der Grenzwert a von Null verschieden sind, so konvergiert auch die Folge (a_n^{-1}) und zwar gegen a^{-1}.*

Beweis. Es gilt

$$|a_n^{-1} - a^{-1}| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|}.$$

Wir sind fertig, wenn wir eine (von n unabhängige) Zahl $C > 0$ gefunden haben, so daß

$$\frac{1}{|a_n a|} \le C$$

gilt. Hierzu genügt es, eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$|a_n| \ge \delta \text{ für alle } \in \mathbb{N}$$

zu finden, denn dann kann man

$$C := \frac{1}{\delta |a|}$$

setzen.

Zunächst wählen wir die natürliche Zahl N so, daß gilt

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2} \text{ für } n \ge N.$$

Hieraus folgt mit Hilfe der verschärften Dreiecksungleichung

$$|a_n| > \frac{|a|}{2} \text{ für } n \geq N.$$

Man kann

$$\delta = \min\left\{\frac{|a|}{2}, |a_1|, \ldots, |a_N|\right\}$$

wählen. □

Bezeichnung. Ist $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge, so bezeichnen wir die Menge der Folgenglieder mit

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} := \left\{\, a \in \mathbb{R}; \quad a = a_n \text{ für (mindestens) ein } n \,\right\}.$$

Beispiel.

$$\{1, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\} = \{1, 0\}$$
$$\{0, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots\} = \{1, 0\}$$

Es kann also

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$$

gelten, ohne daß die beiden Folgen übereinstimmen.

4. Konvergenzkriterien für Folgen

Wir kennen außer der Definition der Konvergenz nur ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Folge:

Eine Folge ist höchstens dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Wir suchen nun nach weiteren, auch hinreichenden Kriterien für die Konvergenz von Folgen.

4.1 Definition. *Eine Folge (a_n) heißt* ***monoton wachsend (fallend)****, wenn gilt*

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \qquad (a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots)$$

also

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad (a_n \geq a_{n+1}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gilt in dieser Kette nirgendwo das Gleichheitszeichen, so heißt die Folge sogar ***streng monoton****:*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \qquad (a_1 > a_2 > a_3 > \ldots)$$

4.2 Theorem. *Jede monotone und beschränkte Folge* (a_n) *konvergiert. Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_1,\, a_2,\, a_3, \dots\} & \textit{für wachsende Folgen} \\ \inf\{a_1,\, a_2,\, a_3, \dots\} & \textit{für fallende Folgen.} \end{cases}$$

Dieser Satz ist für die Analysis fundamental. Zu seinem *Beweis* braucht man wesentlich das Vollständigkeitsaxiom:

Es genügt, den Beweis für wachsende Folgen zu führen. Aufgrund der Beschränktheit der Folge existiert

$$a = \sup\{a_1,\, a_2,\, a_3, \dots\} \qquad \text{(Vollständigkeitsaxiom)}$$

Nach Definition des Supremums gilt

a) $a \ge a_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

b) Aus $b \ge a_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ folgt $b \ge a$.

Die Zahl a ist die kleinste obere Schranke der Menge der Folgenglieder.

Sei ε eine beliebig vorgegebene reelle Zahl. Da $a - \varepsilon$ keine obere Schranke sein kann, existiert eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft

$$a - \varepsilon < a_N \le a.$$

Wegen der Monotonie folgt sogar

$$a - \varepsilon < a_n \le a \text{ für } n \ge N.$$

Hieraus ergibt sich

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ für } n \ge N.$$

Also gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n. \qquad \square$$

Ein typisches Beispiel für eine beschränkte aber nicht konvergente Folge ist

$$a_n = (-1)^n.$$

Nimmt man jedoch in dieser Folge nur die Glieder mit geradem n, so erhält man eine konvergente Teilfolge, nämlich die konstante Folge

$$1, 1, 1, \dots.$$

Man kann sich nun fragen, ob dies ein allgemeingültiges Phänomen beschränkter Folgen ist, ob man also in einer beschränkten Folge stets konvergente Teilfolgen finden kann.

Wir präzisieren zunächst den Begriff der *Teilfolge*. Gegeben seien

1) eine Folge (a_n) reeller Zahlen,

2) eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots .$$

Man kann dann die Folge

$$a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, a_{\nu_3}, \dots$$

betrachten. Das allgemeine Glied dieser Folge ist

$$b_n = a_{\nu_n}.$$

Es ist wirklich wichtig, daß die Ziffernfolge (ν_n) streng monoton wächst. Dies hat beispielsweise zur Folge, daß

$$\nu_n \geq n,$$

wie man durch Induktion nach n beweist. Eine Folge $\bigl(a_{\nu_n}\bigr)$, die auf diese Weise aus (a_n) entsteht, heißt eine Teilfolge von (a_n).

4.3 Hilfssatz. *Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen und (a_{ν_n}) eine Teilfolge. Wenn (a_n) konvergiert, so trifft dies auch für (a_{ν_n}) zu und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_{\nu_n} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und sei

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Es existiert eine natürliche Zahl N mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Damit erhält man

$$|a_{\nu_n} - a| < \varepsilon \text{ für } n \geq N. \qquad \square$$

4.4 Theorem (Bolzano-Weierstrass). *Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt (mindestens) eine konvergente Teilfolge (a_{ν_n}).*

Der Beweis folgt aus:

4.5 Hilfssatz. *Jede Folge* (a_n) *besitzt eine monotone Teilfolge* (a_{ν_n}).

Beweis von 4.5. Wir wollen eine Fallunterscheidung machen und diskutieren hierzu folgende Eigenschaft (E) einer Folge (a_n).

Bei beliebigem $n \in \mathbb{N}$ *besitzt die Menge der Zahlen*

$$\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

ein Maximum.

Man kann diese Eigenschaft auch so ausdrücken: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine natürliche Zahl

$$\mu_n \in \mathbb{N}; \ \mu_n \geq n,$$

so daß

$$a_{\mu_n} \geq a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

gilt.

1. Fall. Die Eigenschaft (E) ist erfüllt. Wir konstruieren eine monoton fallende Teilfolge.

Man konstruiert induktiv eine Folge $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots$ natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_{\nu_{n+1}} = \max\{a_k; \ k > \nu_n\} \qquad (\nu_0 := 1).$$

Das bedeutet also

$$\begin{array}{lll} a_{\nu_1} & = \max\{a_1, a_2, a_3, \dots\} & \nu_1 \geq 1 \\ a_{\nu_2} & = \max\{a_{\nu_1+1}, a_{\nu_1+2}, a_{\nu_1+3}, \dots\} & \nu_2 \geq \nu_1 + 1 \\ a_{\nu_3} & = \max\{a_{\nu_2+1}, a_{\nu_2+2}, a_{\nu_2+3}, \dots\} & \nu_3 \geq \nu_2 + 1 \\ \dots & \qquad \dots\dots & \end{array}$$

Diese Konstruktion ist aufgrund der Eigenschaft (E) möglich. Es gilt dann offensichtlich

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots \quad \text{und} \quad a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq a_{\nu_3} \geq \dots.$$

2. Fall. Die Eigenschaft (E) ist nicht erfüllt. Wir konstruieren eine monoton wachsende Teilfolge. Nach Voraussetzung muß es ein $N \in \mathbb{N}$ geben, so daß in der Menge

$$\{a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots\}$$

kein maximales Element existiert. Dann gibt es aber für $N' \in \mathbb{N}$ mit $N' > N$ in der Menge

$$\{a_N', a_{N'+1}, a_{N'+2}, \dots\}$$

ebenfalls kein Maximum, denn diese unterscheidet sich von der mit N gebildeten nur um endlich viele Elemente.

Wir setzen nun

$$\nu_1 = N$$

und bestimmen alsdann

$$\nu_2 > \nu_1, \; a_{\nu_2} > a_{\nu_1}.$$

So ein ν_2 muß ja nach Voraussetzung existieren. Man konstruiert so induktiv natürliche Zahlen

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots \text{ mit } a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < a_{\nu_3} < \dots .$$

Damit haben wir in beiden Fällen eine monotone Teilfolge gefunden. Somit ist also Hilfssatz 4.5 und wegen 4.2 dann auch 4.4 bewiesen. □

4.6 Hilfssatz. *Sei (a_n) eine konvergente Folge. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \textit{ für } n, m \geq N.$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert zunächst ein N, so daß

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \geq N.$$

Dabei ist $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Seien nun $n, m \geq N$. Dann gilt

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.7 Definition. *Eine Folge (a_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß gilt*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \textit{ für } n, m \geq N.$$

Man kann also Hilfssatz 4.6 auch so ausdrücken:

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Wir zeigen nun auch die Umkehrung, daß also jede Cauchyfolge konvergiert.

4.8 Satz. *Jede Cauchfolge (a_n) konvergiert.*

Beweis, *1. Schritt*. Jede Cauchyfolge ist beschränkt:
Beweis. Wir bestimmen $N \in \mathbb{N}$ so, daß

$$|a_n - a_m| < 1 \text{ für } n, m \geq N.$$

Die verschärfte Dreiecksungleichung zeigt dann

$$|a_n| < 1 + |a_N| \text{ für } n \geq N$$

(es wurde speziell $m = N$ gewählt). Setzt man

$$C := \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

so gilt ersichtlich

$$-C \leq a_n \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2. Schritt. (a_n) konvergiert.

Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS existiert zunächst eine konvergente Teilfolge

$$a_{\nu_1},\, a_{\nu_2},\, a_{\nu_3}, \dots .$$

Ihr Grenzwert sei a. Wir zeigen, daß schon die ganze Folge (a_n) gegen a konvergiert. Hierzu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir bestimmen dazu $N \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften

a) $|a - a_{\nu_n}| < \varepsilon$ für $n \geq N$

b) $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N$.

Für beliebiges $n \geq N$ gilt dann

$$|a - a_n| = |a - a_{\nu_n} + a_{\nu_n} - a_n| \leq |a - a_{\nu_n}| + |a_{\nu_n} - a_n| < 2\varepsilon. \qquad \square$$

Die Bedeutung des CAUCHY-Kriteriums liegt darin:

Es liefert eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Folge, in der der hypothetische Grenzwert nicht auftritt!

Seine praktische Bedeutung sollte man allerdings nicht überschätzen. Man sollte sich vor Augen halten, daß das CAUCHY-Kriterium eine einfache Folge des Satzes von BOLZANO-WEIERSTRASS ist.

Ungleichungen und Konvergenz

4.9 Hilfssatz. *Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen, so daß*

$$a_n \leq b_n \text{ für alle } n$$

gilt. Dann gilt

$$\lim a_n \leq \lim b_n.$$

Beweis. Sei $c_n := b_n - a_n$. Die Folge (c_n) besteht aus lauter nicht negativen Gliedern und wir müssen zeigen, daß dann auch ihr Grenzwert $c := a - b$ nicht negativ ist.

Wir schließen indirekt, nehmen also an, daß c negativ ist, also $c < 0$. Aus den Abschätzungen

$$0 < -c \leq c_n - c \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

ergibt sich dann, daß die konstante Folge

$$-c, -c, -c, \dots$$

eine Nullfolge ist. Dies impliziert aber $c = 0$. Widerspruch. $\square$

4.10 Folgerung. *Wenn eine konvergente Folge* (a_n) *durch eine Konstante* C *(nach oben oder nach unten) beschränkt wird, so trifft dies auch für den Grenzwert zu.*

Also etwa

$$a_n \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim a_n \leq C.$$

Beweis. Man wende 4.9 an auf die konstante Folge

$$b_1 = C, \ b_2 = C, \ \ldots .$$

Das Intervallschachtelungsprinzip

Seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Das sogenannte *abgeschlossene Intervall* $[a, b]$ besteht aus allen

$$x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \leq x \leq b.$$

Im Falle $a = b$ degeneriert $[a, b]$ und besteht aus dem einzigen Punkt a.

Unter einer *Intervallschachtelung* versteht man eine absteigende Kette von Intervallen

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots .$$

Sie wird also definiert durch zwei Folgen (a_n), (b_n), die den folgenden Bedingungen genügen müssen

1) $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$

2) $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$

3) $a_n \leq b_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4.11 Satz (Intervallschachtelungsprinzip).
Es sei eine Intervallschachtelung

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$$

gegeben. Es existiert dann ein allen Intervallen gemeinsamer Punkt x*. Genauer gilt*

$$x \in [a_n, b_n] \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow x \in [a, b]$$

mit $a := \lim a_n, \ b := \lim b_n$.

Zusatz. Der Punkt x *ist offenbar genau dann eindeutig bestimmt, wenn* $a = b$ *gilt, wenn also* $(b_n - a_n)$ *eine Nullfolge ist.*

Beweis. Wir müssen zunächst zeigen, daß die Folgen (a_n) und (b_n) überhaupt konvergieren. Wegen der Monotonie folgt aber die Konvergenz aus der Beschränktheit.

Die Ungleichungen

$$a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_1$$

zeigen, daß gilt:

$$a_n \le b_1 \text{ für alle } n \text{ und } b_n \ge a_1 \text{ für alle } n.$$

Aus 4.2 und 4.9 folgt

$$a = \lim a_n = \sup\{a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots\}, \quad b = \lim b_n = \inf\{b_1,\, b_2,\, b_3, \ldots\}, \quad a \le b.$$

Nach Definition von Supremum und Infimum gilt

$$x \ge a \Longleftrightarrow x \ge a_n \text{ für alle } n, \qquad x \le b \Longleftrightarrow x \le b_n \text{ für alle } n. \qquad \square$$

In dem besonders interessanten Fall $a = b$ kann man noch einige weitere Konsequenzen ziehen.

Setzt man

$$a = b = a_n + R_n = b_n + S_n$$

mit den sogenannten *Restgliedern* R_n und S_n, so folgt aus der Ungleichung

$$a_n \le a = b \le b_n$$

die *Restgliedabschätzung* $|R_n|,\ |S_n| \le |b_n - a_n|$.

Abschließend bemerken wir noch, daß man im Falle $a = b$ die beiden Folgen (a_n) und (b_n) zu einer einzigen konvergenten Folge $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ zusammenfassen kann.

Beispiel.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ;\text{und } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Die Ungleichung $a_n \le b_n$ ist evident.

Behauptung. Die Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ wächst monoton.

Beweis. Die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \ge \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist äquivalent zu

$$\left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \ge 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Die linke Seite ist aber gleich

$$\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \ge 1 - \frac{1}{n+1}$$

(nach der BERNOULLIschen Ungleichung).

Übungsaufgabe. Die Folge (b_n) ist monoton fallend.

Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren daher gegen gewisse Grenzwerte a und b. Dividiert man die beiden Folgen durcheinander, so zeigt sich $a = b$. Der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Folgen wird nach EULER mit

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

bezeichnet. Es ist $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$.

5. Unendliche Reihen

Gegeben sei eine Zahlenfolge $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots$. Man kann der Folge (a_n) eine neue Folge (S_n) zuordnen, nämlich

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots \qquad (\text{allgemein } S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Die Folge (S_n) heißt auch die der Folge (a_n) zugeordnete *Reihe*. Eine Reihe ist also nichts anderes als eine auf spezielle Weise gewonnene Folge.

Man nennt a_n das *allgemeine Glied* der Reihe und S_n die n-te Partialsumme.

Bezeichnung. Wenn die der Folge der (a_n) zugeordnete Reihe (S_n) konvergiert, so schreibt man

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Dies ist also nichts anderes als $\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$.

Sprechweise. Die etwas schwerfällige Ausdrucksweise

„Die der Folge (a_n) zugeordnete Reihe konvergiert“

wird meistens ersetzt durch

„Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergiert“.

Dies ist natürlich nicht ganz exakt, da das Symbol

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

jetzt zweierlei Bedeutung hat:

Auf der einen Seite bezeichnet es (im Falle der Konvergenz) eine bestimmte Zahl S und auf der anderen Seite ist es ein Synonym für die Folge (S_n). Es wird jedoch aus dem Zusammenhang immer klar sein, in welchem Sinne das Summensymbol gebraucht wird.

Beispiel. Sei

$$a_n := a^{n-1},\ a \text{ eine feste reelle Zahl.}$$

In diesem Zusammenhang vereinbaren wir

$$0^0 = 1.$$

Behauptung. Die sogenannte *geometrische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$$

konvergiert dann und nur dann, wenn gilt $|a| < 1$. Der Reihenwert ist dann

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots = \frac{1}{1-a} \qquad (|a| < 1)}$$

Beweis. Falls $a \neq 1$ ist, gilt

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Diese Folge konvergiert dann und nur dann, wenn (a^n) konvergiert. Diese Folge haben wir untersucht und dabei festgestellt, daß sie genau für $-1 < |a| \leq 1$ konvergiert.

Im Falle $a = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn die Folge der Partialsummen

$$1 + a + \ldots + a^{n-1} = n$$

ist in diesem Fall unbeschränkt. □

Wir erhalten für die Grenzwerte von Reihen gewisse Rechenregeln, die sich aus den entsprechenden Rechenregeln für Folgen ergeben. Wenn die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

konvergieren, so konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} (Ca_n) \qquad (C \text{ beliebig reell})$$

und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (Ca_n) = C \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ist (a_n) eine konvergente Folge, so ist offensichtlich $a_{n+1} - a_n$ eine Nullfolge. Wendet man dies auf die Folge der Partialsummen (S_n) an, so folgt:

5.1 Satz. *Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so ist die Folge (a_n) eine Nullfolge.*

Wir formulieren das CAUCHY-Kriterium für Reihen.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|S_n - S_m| < \varepsilon \text{ für } n, m \geq N.$$

Wegen $|S_n - S_m| = |S_m - S_n|$ kann man sich immer auf den Fall $m > n$ beschränken. Dann gilt aber

$$|S_n - S_m| = |a_{n+1} + \cdots + a_m|.$$

Damit erhalten wir

Die unendliche Reihe $\sum a_\nu$ konvergiert dann und nur dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon \text{ für } m > n \geq N.$$

Diese Ungleichung gilt wohlgemerkt für alle Paare

$$(n, m), \ m > n \geq N.$$

Wir ziehen eine wichtige Folgerung aus dem CAUCHY-Kriterium.

Beachtet man die Ungleichung

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_m|,$$

so folgt

5.2 Theorem. *Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert, wenn die aus den Absolutbeträgen gebildete Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

konvergiert.

Wir wollen für diesen wichtigen Satz einen zweiten *Beweis* geben, der das CAUCHY-Kriterium nicht benutzt.

Sei

$$a'_n := \begin{cases} a_n, & \text{falls } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$a''_n := \begin{cases} -a_n, & \text{falls } a_n \leq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$a_n = a'_n - a''_n.$$

Es genügt daher zu zeigen, daß die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a''_n$$

konvergieren. Die Folge der Partialsummen

$$A'_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n \text{ sowie } A''_n = a''_1 + a''_2 + \cdots + a''_n$$

sind monoton wachsend! Wir müssen also wegen des fundamentalen Kriteriums für die Konvergenz monotoner Folgen (4.2) nur die Beschränktheit der Folgen (A'_n) und (A''_n) zeigen. Es gilt jedoch

$$A'_n, A''_n \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$$

und die Folge auf der rechten Seite ist beschränkt, da sie nach Voraussetzung konvergiert. □

Sprechweise. Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert.

Wir haben also gezeigt:

Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz der Reihe selbst.

Die absolute Konvergenz einer Reihe ist viel einfacher zu untersuchen als die Konvergenz selbst. Das liegt daran, daß die Folge

$$|a_1|,\ |a_1| + |a_2|,\ |a_1| + |a_2| + |a_3|, \ldots$$

offenbar monoton wachsend ist. Eine monoton wachsende Folge konvergiert aber dann und nur dann, wenn sie beschränkt ist. Wir sehen also

5.3 Satz. *Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert dann und nur dann absolut, wenn es eine Zahl C gibt mit*

$$\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \leq C \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt das wichtige *Majorantenkriterium* für unendliche Reihen.

Eine Reihe

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

heißt *Majorante* für die Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

wenn

$$|a_n| \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt. (Insbesondere ist dann kein b_n negativ.)

5.4 Theorem (Majorantenkriterium). *Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut, wenn sie eine konvergente Majorante hat.*

Das Quotientenkriterium.

Eine unendliche Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

heißt mit der *geometrischen Reihe vergleichbar*, wenn es Zahlen

$$C > 0 \text{ und } 0 \leq q < 1$$

gibt, so daß gilt:

$$|a_n| \leq Cq^n \text{ für alle } n \text{ (es genügt: bis auf endliche viele Ausnahmen).}$$

Da die Reihe

$$1 + q + q^2 + \ldots$$

für $|q| < 1$ konvergiert, folgt aus dem Majorantenkriterium die Konvergenz der Ausgangsreihe.

Ein Spezialfall des Majorantenkriteriums ist das

5.5 Satz (Quotientenkriterium). *Sei*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

eine unendliche Reihe, deren Glieder alle von Null verschieden sind. Eine hinreichende Bedingung für die absolute Konvergenz dieser Reihe ist:

Es existiert eine Zahl $q,\ 0 \leq q < 1$, mit der Eigenschaft

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \textit{ für alle } n.$$

Aus der Voraussetzung folgt nämlich

$$|a_n| \leq |a_0| q^n,$$

so daß die Reihe also mit der geometrischen vergleichbar ist; letztere ist demnach bis auf den konstanten Faktor $|a_0|$ eine Majorante der gegebenen Reihe. □

Ein Konvergenzkriterium für nicht notwendig absolut konvergente Reihen:

5.6 Satz (Leibniz). *Gegeben sei eine monoton fallende Nullfolge*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \ (\textit{insbesondere } a_n \geq 0 \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}).$$

Die ***alternierende Reihe***

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

konvergiert.

Beweis. Sei

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} a_\nu = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \pm \dots$$

$$A_n := S_{2n}, \qquad B_n := S_{2n+1}.$$

Behauptung.

1) Die Folge (A_n) ist monoton wachsend.

2) Die Folge (B_n) fällt monoton.

3) $A_n \leq B_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$.

4) $(A_n - B_n)$ ist eine Nullfolge.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip ist 5.6 hiermit bewiesen. Ferner gilt

5) Ist $S := \lim S_n$, dann ist $|S - S_n| \leq a_{n+1}$.

Beweis der Behauptung. Alle Punkte sind unmittelbar klar; beispielsweise gilt

$$A_{n+1} - A_n = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0 \text{ (nach Voraussetzung).} \qquad \square$$

Beispiel. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

konvergiert.

Dies ist gleichzeitig ein Beispiel für eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, denn die sogenannte *harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

konvergiert nicht.

Beweis. Sei

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Wir betrachten einen Teilabschnitt der harmonischen Reihe, nämlich

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} = \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Jeder der in diesem Teilabschnitt auftretenden Summanden ist größer oder gleich $\frac{1}{2^{n+1}}$. Die Anzahl der Summanden ist 2^n. Wir erhalten

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \\
S_4 &= S_2 + (S_4 - S_2) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
S_8 &= S_4 + (S_8 - S_4) \geq (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Durch Induktion nach n beweist man nun

$$S_{2^n} \geq \frac{n}{2}.$$

Die Folge der Partialsummen ist also unbeschränkt. □

Sei a_0, a_1, $a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen. Für $x \in \mathbb{R}$ können wir die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

bilden. Eine solche nennt man eine *Potenzreihe*.

(Wir haben bisher nur Reihen betrachtet, bei denen die Summation mit $n = 1$ beginnt. Man definiert allgemein

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+n_0-1}.$$

Dabei sei n_0 eine ganze Zahl, und jeder ganzen Zahl $n \geq n_0$ sei eine reelle Zahl a_n zugeordnet.)

Wir werden uns später mit der Frage befassen, für welche x eine solche Potenzreihe konvergiert. Wir behandeln hier nur den Spezialfall, daß diese Reihe für alle reellen x konvergiert. Dann ist die Folge

$$(a_n x^n)$$

für jedes reelle x eine Nullfolge. Interessanterweise gilt hiervon auch die Umkehrung

5.7 Satz. *Sei a_1, a_2, $a_3, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen, so daß für jedes reelle x die Folge*

$$(a_n x^n)$$

eine Nullfolge ist. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Mit x ist auch $2x$ eine reelle Zahl, die Folge

$$(a_n (2x)^n)$$

ist also eine Nullfolge. Sie ist daher beschränkt

$$|a_n (2x)^n| \leq C \Longrightarrow |a_n x^n| \leq \frac{C}{2^n}.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Majorantenkriterium. $\square$

Beispiel.

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Wir zeigen, daß die Folge

$$\frac{x^n}{n!}$$

für jedes reelle x gegen 0 konvergiert. Sei also x eine feste reelle Zahl. Wir wählen eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft

$$N \geq [2|x|] + 1.$$

Dann gilt

$$x^n \leq \frac{N^n}{2^n} \text{ für alle } n$$

und

$$n! \geq (N+1) \cdot \ldots \cdot (2N) \geq N^{n-N} \text{ für } n \geq 2N.$$

Damit ergibt sich also

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| le \frac{N^N}{2^n} \text{ für } n \geq 2N.$$

5.8 Satz. *Die Reihe*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert für alle x.

Übungsaufgabe.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (= \mathrm{e}).$$

6. Abbildungen und Abzählbarkeit

Seien X und Y zwei Mengen. Unter einer Abbildung f von X nach Y, in Zeichen

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

versteht man eine Vorschrift, gemäß welcher jedem Element $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes Element $y \in Y$ zugeordnet wird. Man schreibt meistens

$$y = f(x)$$

und nennt $f(x)$ das Bild von x unter der Abbildung f.

Zwei Abbildungen

$$f : X \longrightarrow Y \text{ und } f' : X' \longrightarrow Y'$$

sind definitionsgemäß genau dann gleich, wenn gilt

$$X = X' \text{ und } Y = Y' \text{ sowie } f(x) = f'(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Beispiele für Abbildungen.

a) Sei X eine Teilmenge von Y ($X \subset Y$). Die sogenannte *kanonische Injektion* von X in Y ist definiert durch

$$\iota : X \longrightarrow Y, \ \iota(x) = x \qquad \text{für alle } x \in X.$$

In dem Spezialfall $X = Y$ ist ι die *identische Selbstabbildung* von X. Diese wird auch mit id_X bezeichnet. Also

$$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X, \ \mathrm{id}_X(x) = x \text{ für alle } x \in X.$$

b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen einer Menge X ist nichts anderes als eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow X.$$

(Man schreibt gewöhnlich a_n anstelle von $a(n)$.)

c) Ein n-*Tupel* von Elementen in einer Menge X ist eine Abbildung

$$a : A_n \longrightarrow X.$$

Dabei ist

$$A_n = \{1, \dots, n\} = \{x \in \mathbb{N}; \ x \leq n\}.$$

Schreibweise.

$$a = (a_1, \dots, a_n).$$

Die Menge aller n-Tupel von Elementen aus X wird mit X^n bezeichnet. Die Menge X kann mit X^1 identifiziert werden, denn eine Abbildung von $A_1 = \{1\}$ in X ist nichts weiter als die Fixierung eines Elements aus X (das Bild von 1). Gemäß des Gleichheitsbegriffs von Abbildungen sind zwei n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_n)$ genau dann gleich, wenn

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots,\ a_n = b_n$$

gilt, also

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_\nu = b_\nu \text{ für } 1 \le \nu \le n.$$

Den Begriff des n-Tupels kann man auf verschiedene Weise verallgemeinern. Seien beispielsweise zwei Mengen X und Y gegeben. Man kann dann die Menge der Paare

$$\{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\}$$

betrachten. Diese bilden wieder eine Menge $X \times Y$, das sogenannte *kartesische Produkt* von X und Y.

Die Gleichheit in $X \times Y$ ist definiert durch

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ und } y = y'.$$

Im Spezialfall $X = Y$ gilt offenbar

$$X^2 = X \times X.$$

d) Eine *Komposition* in einer Menge X ist eine Abbildung

$$\perp\colon X \times X \longrightarrow X.$$

(Man schreibt meistens $a \perp b$ anstelle von $\perp(a, b)$.)

e) Die Abbildungen, die in dieser Vorlesung hauptsächlich untersucht werden, sind die reellen Funktionen einer Variablen. Das sind Abbildungen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, der sogenannte *Definitionsbereich* von f, ist.

Beispiel. $D = \mathbb{R}^{\bullet} := \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}.$$

6.1 Definition. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt*

1) ***injektiv (eineindeutig)****, wenn verschiedenen Elementen von X verschiedene Elemente von Y entsprechen, also*

$$x, x' \in X,\ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

(oder, was dasselbe bedeutet

$$f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x').$$

2) ***surjektiv (eine Abbildung auf)****, wenn jedes Element von Y als Bild mindestens eines Elements von X vorkommt, also*

$$y \in Y \Longrightarrow \textit{es gibt (mindestens) ein } x \in X \textit{ mit } y = f(x).$$

3) ***bijektiv (eineindeutig auf, umkehrbar eindeutig)****, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.*

Wir testen die Beispiele a), b) und e) auf die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv.

a) Die kanonische Injektion einer Teilmenge X in die Menge Y

$$\iota : X \longrightarrow Y,\ \iota(x) = x.$$

Diese Abbildung ist injektiv. Sie ist dann und nur dann auch surjektiv und damit bijektiv, wenn $X = Y$ und somit $\iota = \mathrm{id}_X$ gilt. Die Identität id_X ist der Prototyp einer bijektiven Abbildung.

b) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, also eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann injektiv sein, nämlich dann, wenn alle Folgenglieder verschieden sind, zum Beispiel

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots \qquad \left(a_n = \frac{1}{n}\right).$$

Sie braucht natürlich nicht injektiv zu sein, etwa

$$1, -1, 1, -1, \ldots \qquad (a_n = (-1)^{n+1}).$$

Schwieriger ist die Frage, ob a surjektiv sein kann, ob es also eine Folge

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$$

geben kann, in der jede reelle Zahl (mindestens) einmal auftritt. Wir werden noch zeigen, daß eine solche Folge nicht existiert.

e) Einige Funktionen:

$$f : \mathbb{R}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Diese Funktion ist eineindeutig, aber nicht surjektiv, denn man kann nicht 0 in der Form $\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, schreiben.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Diese Funktion ist weder eineindeutig, denn es gilt ja

$$(-x)^2 = x^2,$$

noch surjektiv, denn die negativen Zahlen können nicht als Quadrat geschrieben werden.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3.$$

Wir werden zeigen, daß diese Abbildung bijektiv ist (Eindeutigkeit und Existenz der dritten Wurzel).

Zusammensetzung von Abbildungen

Seien drei Mengen X, Y, Z gegeben, sowie zwei Abbildungen

$$f : X \longrightarrow Y \text{ sowie } g : Y \longrightarrow Z.$$

Man kann dann die Abbildung

$$h : X \longrightarrow Z$$

betrachten, die durch

$$h(x) = g(f(x))$$

definiert ist. Diese Definition ist wirklich sinnvoll, denn ist $x \in X$, so kann man $y = f(x)$ betrachten. Dieses ist ein Element von Y und damit ist $g(y)$ definiert. Dieses Element kann man $h(x)$ nennen

$$h(x) = g(y) = g(f(x)).$$

Schreibweise.

$$h = g \circ f.$$

Beispiel. Sei f die Komposition

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ (a, b) \longmapsto a - b$$

und sei g die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x^2.$$

Dann ist h die Komposition

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ (a, b) \longmapsto (a - b)^2.$$

6.2 Bemerkung. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Wenn f und g beide injektiv (surjektiv, bijektiv) sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv (surjektiv, bijektiv).*

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$ eine Teilmenge. Unter der *Bildmenge* $f(A)$ von A unter f versteht man die Menge aller Elemente $y \in Y$, die sich in der Form

$$y = f(x) \text{ für (mindestens) ein } x \in A$$

schreiben lassen:

$$f(A) := \bigl\{\, y \in Y; \quad y = f(x) \text{ für ein } x \in A \,\bigr\}.$$

Man kann also sagen:

f ist surjektiv genau dann, wenn $f(X) = Y$ gilt. Allgemein nennt man $f(X)$ das *Bild* der Abbildung f und manchmal Y das *Ziel* von f. Bild und Ziel fallen nur bei surjektiven Abbildungen zusammen.

Man kann auch das *Urbild* einer Teilmenge $B \subset Y$ betrachten. Es besteht aus allen $x \in X$ mit der Eigenschaft $f(x) \in B$.

Schreibweise.

$$f^{-1}(B) := \{x \in X;\ f(x) \in B\}$$

Beispiel.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

Dann ist $\qquad f^{-1}(\text{Menge der negativen Zahlen}) = \emptyset \quad \text{(leere Menge)}.$

Die Menge $f^{-1}(B)$ kann aus sehr vielen Elementen bestehen, selbst wenn B nur aus einem einzigen Element b besteht, also

$$B = \{b\},\ b \in Y.$$

Etwa in unserem Beispiel $f(x) = x^2$ gilt

$$f^{-1}(\{4\}) = \{2, -2\}.$$

Wenn jedoch f eine bijektive Abbildung ist, so besteht die Menge $f^{-1}(\{b\})$ aus genau einem Element. Dieses bezeichnen wir mit $f^{-1}(b)$,also

$$f^{-1}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}.$$

Im Fall einer bijektiven Abbildung und nur in diesem erhalten wir so eine Abbildung

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X,$$

die dadurch definiert ist, daß sie jedem Element $b \in Y$ das Element $f^{-1}(b) \in X$ zuordnet. Man nennt diese Abbildung die *Umkehrabbildung* von f.

Beispiel. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3.$$

Die Abbildung ist bijektiv (wie noch gezeigt wird), die Umkehrabbildung ist

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Wir halten noch einmal fest:

Umkehrabbildungen kann man nur von bijektiven Abbildungen bilden.

6.3 Hilfssatz. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist dann und nur dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit den Eigenschaften*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \textit{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y \,.$$

Es gilt dann $g = f^{-1}$.

Mächtigkeit und Abzählbarkeit.

6.4 Definition. *Zwei Mengen X, Y heißen **gleichmächtig**, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.*
In Zeichen: $X \sim Y$.

Offenbar gelten die Eigenschaften einer sogenannten *”Aquivalenzrelation*:

1) $X \sim X$ (Reflexivität)
2) $X \sim Y \Longleftrightarrow Y \sim X$ (Symmetrie)
3) $X \sim Y,\ Y \sim Z \Longrightarrow X \sim Z$ (Transitivität)

6.5 Definition. *Eine Menge X heißt **abzählbar**, wenn sie mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.*

Es gibt dann also eine bijektive Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow X.$$

Mit anderen Worten ist daher eine Menge X genau dann abzählbar, wenn man ihre Elemente in einer Folge

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots$$

anordnen kann, so daß jedes Element von X in dieser Folge vorkommt (Surjektivität von a) und zwar nur einmal (Injektivität).

6.6 Bemerkung. *Zwei endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie gleich viele Elemente enthalten.*

Eine Menge X enthält ja definitionsgemäß genau dann n Elemente, wenn gilt

$$X \sim A_n = \{1, \ldots, n\}.$$

Der Mächtigkeitsbegriff verallgemeinert also einen Aspekt des Anzahlbegriffs auf unendliche Mengen, soweit es sich nämlich um die Frage handelt, ob zwei Mengen „gleich groß“ sind.

Es besteht jedoch ein charakteristischer Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Mengen.

Ist $Y \subset X$ eine Teilmenge der endlichen Menge X und sind beide Mengen gleichmächtig, so gilt

$$Y = X.$$

(Auf den Beweis dieser Tatsache haben wir verzichtet, man könnte ihn aber relativ leicht mit Induktion nach der Anzahl der Elemente von X führen.)

Man kann diesen Sachverhalt auch so ausdrücken:

Wenn die Menge X echt in der endlichen Menge Y enthalten ist, d.h.

$$X \subset Y, \quad X \neq Y$$

so kann X nicht gleich viele Elemente wie Y enthalten, die Mengen X und Y sind dann nicht gleichmächtig.

Im Unendlichen ist dies anders, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_2$ die Teilmenge der geraden Zahlen. Diese beiden Mengen sind gleichmächtig, denn man hat eine Bijektion

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_2, \quad f(n) = 2n.$$

Der folgende Satz soll zeigen, daß die abzählbaren Mengen in gewissem Sinne die kleinsten unendlichen Mengen sind.

6.7 Satz. *Sei X eine abzählbare Menge und Y eine beliebige unendliche Menge. Die Menge Y ist auch abzählbar, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

1. *Es existiert eine injektive Abbildung*

$$\iota : Y \longrightarrow X.$$

2. *Es existiert eine surjektive Abbildung*

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Beweisskizze. Zunächst kann man o.B.d.A (lies: „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“) annehmen, daß $X = \mathbb{N}$ ist.

1. Die Abzählung von Y kann wie folgt vorgenommen werden

$$\begin{aligned} y_1 :&\ \iota(y_1) = \min \iota(Y) \\ y_2 :&\ \iota(y_2) = \min \left(\iota(Y) - \{\iota(y_1)\}\right) \\ y_3 :&\ \iota(y_3) = \min \left(\iota(Y) - \{\iota(y_1), \iota(y_2)\}\right) \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

(Für zwei Mengen A, B definiert man $A - B := \{x \in A;\ x \notin B\}$.)

2. Wir führen den zweiten Fall auf den ersten zurück, konstruieren also eine injektive Abbildung

$$\iota : Y \longrightarrow \mathbb{N}$$

mit Hilfe der Abbildung f. Man setze etwa

$$\iota(y) := \min\left(f^{-1}\{y\}\right). \qquad \square$$

Man nennt eine Menge *höchstens abzählbar*, wenn sie abzählbar oder endlich ist.

Dann kann man Satz 6.7 im wesentlichen so zusammenfassen:

1. *Jede Teilmenge einer höchstens abzählbaren Menge ist höchstens abzählbar.*
2. *Dasselbe gilt für das Bild einer höchstens abzählbaren Menge bei einer Abbildung.*

Beispiele abzählbarer und überabzählbarer (= nicht abzählbarer) Mengen.

a) Die Menge der ganzen rationalen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist abzählbar.

Beweis. Man hat die Anordnung

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots .$$

b) Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Die Abzählbarkeit wird aus folgendem Schema ersichtlich:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & \dots \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \dots & & \dots \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & \dots & & \dots \\
 & \nearrow & & \nearrow & \dots & & \dots & & \dots \\
(3,1) & & (3,2) & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & \nearrow & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
(4,1) & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots
\end{array}$$

Wir schreiben die ersten Glieder an:

$$(1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (3,1),\ (2,2),\ (1,3),\ \dots .$$

Diese Abzählung beruht offenbar darauf, daß man sukzessive die Paare der Quersumme $2, 3, \dots$ zusammenfaßt:

$$\begin{array}{ll}
\text{Quersumme 2:} & (1,1) \\
\text{Quersumme 3:} & (2,1),\ (1,2) \\
\text{Quersumme 4:} & (3,1),\ (2,2),\ (1,3) \\
\dots\dots &
\end{array}$$

c) Eine unwesentliche Verallgemeinerung von 2) besagt: Seien X und Y zwei höchstens abzählbare Mengen. Dann ist auch $X \times Y$ höchstens abzählbar.

d) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. Zunächst ist die Menge

$$X = \{(a, b);\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

abzählbar, denn dies ist eine (unendliche) Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Man hat eine surjektive Abbildung

$$f : X \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad f(a, b) = \frac{a}{b}. \qquad \square$$

e) Die Menge X bestehe aus allen Folgen

$$a = (a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots),$$

wobei als Folgenglieder nur die Zahlen 0 und 1 vorkommen mögen, also beispielsweise

$$(0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, \ldots).$$

Wir zeigen, daß diese Menge überabzählbar ist.

Beweis (indirekt; CANTOR*sches Diagonalverfahren).*
Wir nehmen an, wir hätten eine Abzählung dieser Folgen gefunden

$$a^{(1)},\ a^{(2)},\ a^{(3)},\ \ldots$$

mit dem allgemeinen Glied

$$a^{(n)} = (a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ a_3^{(n)},\ \ldots).$$

Es müßte also so sein, daß jede Folge $a \in X$ in dieser Abzählung vorkommt, daß also gilt

$$a = a^{(k)} \text{ für ein geeignetes } k.$$

Wir werden nun aber eine Folge a konstruieren, für die das nicht der Fall ist. Das ist dann ein Widerspruch zur Annahme der Abzählbarkeit.

Wir definieren hierzu

$$a_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_n^{(n)} = 0, \\ 0, & \text{falls } a_n^{(n)} = 1. \end{cases}$$

Man erhält so eine Folge

$$a = (a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots),$$

die nach dem Gesichtspunkt

$$a_n \neq a_n^{(n)} \qquad \text{(für jedes } n)$$

konstruiert wurde. Dann gilt aber insbesondere

$$a \neq a^{(n)} \qquad \text{(für jedes } n). \qquad \square$$

f) Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Wir konstruieren eine injektive Abbildung

$$\iota : X \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei X die Folgenmenge aus e) ist. Nach Satz 6.7 kann dann $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein.

$$\iota(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$$

Das ist also die reelle Zahl mit der Dezimalbruchentwicklung

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Dezimalbruchentwicklung (die wir allerdings nicht bewiesen haben!), ist diese Abbildung injektiv.

7. Umordnungssätze für unendliche Reihen

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Frage, inwieweit Kommutativitäts-, Assoziativitäts- und Distributivitätsgesetze für unendliche Reihen gültig sind.

Wir formulieren zunächst das Kommutativitätsgesetz für endliche Summen.

Sei

$$(a_1, \dots, a_n)$$

ein n-Tupel von reellen Zahlen und

$$(a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_n})$$

eine Umordnung dieses n-Tupels. Das soll folgendes bedeuten:

Es ist eine bijektive Abbildung

$$\nu : A_n \longrightarrow A_n$$

gegeben, also ein n-Tupel

$$\nu_1, \dots, \nu_n,$$

in dem jede natürliche Zahl zwischen 1 und n genau einmal vorkommt.

Beispiel. $n = 2: \quad (\nu_1, \nu_2) = (2, 1).$

Das bewirkt die Umordnung

$$(a_1, a_2) \longmapsto (a_2, a_1).$$

Aus den Körperaxiomen kann man nun mit vollständiger Induktion nach n beweisen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \ldots + a_{\nu_n}.$$

Auf die Reihenfolge kommt es eben bei der Addition nicht an.

Sei nun

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

eine unendliche Reihe und

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \ldots$$

eine Umordnung dieser Reihe. In der Folge

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3, \ldots$$

kommt also jede natürliche Zahl genau einmal vor, präziser,

$$\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

ist eine bijektive Abbildung.

Problem. Die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergiere gegen a. Konvergiert dann auch die umgeordnete Reihe

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \ldots$$

und vielleicht gegen denselben Wert a?

7.1 Theorem (Kleiner Umordnungssatz).
Die Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

konvergiere ***absolut*** *und habe den Wert a. Dann konvergiert auch jede Umordnung*

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \ldots$$

derselben absolut und zwar gegen denselben Wert a.

Beweis.

1) Absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe.

Wir benutzen das Kriterium 5.3. Nach Voraussetzung existiert eine Zahl C, so daß gilt:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \le C \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$|a_{\nu_1}| + |a_{\nu_2}| + \ldots + |a_{\nu_n}| \le C \text{ für jedes } n \in \mathbb{N},$$

denn diese Summe wird ja nach oben abgeschätzt durch

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_N| \text{ mit } N = \max\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}.$$

2) Der Wert der umgeordneten Reihe ist auch a.

Wir geben uns $\varepsilon > 0$ vor. Da die Reihe absolut konvergiert, existiert eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| - \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \right| < \varepsilon \text{ für } n \ge N,$$

also

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| < \varepsilon \text{ für } n \ge N.$$

Wir wählen die natürliche Zahl M so groß, daß die Zahlen $1, 2, \ldots, N$ alle unter den Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_M$ vorkommen:

$$A_N = \{1, \ldots, N\} \subset \{\nu_1, \ldots, \nu_M\}.$$

Sei nun $m \ge M$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{m} a_{\nu_j} = \sum_{j=1}^{N} a_j + S.$$

S besteht dabei aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Indices alle größer als N sind.

Hieraus schließt man mittels der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{j=1}^{m} a_{\nu_j} - a \right| < \left| \sum_{j=1}^{N} a_j \right| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Wir erhalten also

$$\left|\sum_{j=1}^{m} a_{\nu_j} - a\right| < 2\varepsilon \text{ für } m \geq M. \qquad \square$$

Wenn man nicht die absolute Konvergenz voraussetzt, ist der kleine Umordnungssatz falsch. Wir begnügen uns damit, ein Gegenbeispiel flüchtig zu skizzieren und zwar nehmen wir eine Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1) Die Zahlen mit ungeradem Index

$$a_1 > a_3 > a_5 > \ldots$$

   sind alle positiv.

2) Die Teilreihe

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \ldots$$

   konvergiert nicht.

3) Die Zahlen mit geradem Index

$$a_2 < a_4 < a_6 < \ldots$$

   sind alle negativ.

Man könnte also etwa die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$

nehmen.

Wenn n irgendeine ungerade natürliche Zahl ist, so konvergiert die Reihe

$$a_n + a_{n+2} + a_{n+4} + \ldots$$

auch nicht. Wegen 5.3 gibt es daher zu jedem $C \in \mathbb{R}$ eine ungerade Zahl $N \geq n$ mit der Eigenschaft

$$a_n + a_{n+2} + \ldots + a_N > C.$$

Dazu bestimmen wir sukzessive ungerade natürliche Zahlen

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots,$$

so daß gilt

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + \ldots + a_{n_1} + a_2 &> 1 \\ a_{n_1+2} + a_3 + \ldots + a_{n_2} + a_4 &> 1 \\ a_{n_2+2} + a_3 + \ldots + a_{n_3} + a_6 &> 1 \\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Umordnung

$$a_1 + \ldots + a_{n_1} + a_2 + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2} + a_4 + a_{n_2+2} + \ldots + a_{n_3} + a_6 + a_{n_3+2} + \ldots$$

konvergiert offenbar nicht. □

Der Umordnungssatz ermöglicht eine Verallgemeinerung des Begriffs der absoluten Konvergenz. Diese Verallgemeinerung ist zwar nicht wesentlich, aber für das folgende doch sehr praktisch.

Sei S eine beliebige abzählbare Menge und sei

$$a : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Abbildung. Der typische Fall, den wir vor Augen haben, ist der Fall $S = \mathbb{N}$, also der Fall einer Folge (a_n). Um diesen Bezug zu betonen, schreiben wir

$$a_s \text{ anstelle von } a(s)$$

und manchmal

$$a = (a_s)_{s \in S}$$

und nennen die Abbildung a eine *Schar* von reellen Zahlen, *parametrisiert* durch S.

Wir wollen den Ausdruck

$$\sum_{s \in S} a_s$$

definieren. Im Falle $S = \mathbb{N}$ soll dies nichts anderes ergeben als

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Hierzu betrachten wir eine bijektive Abbildung

$$\nu : \mathbb{N} \longrightarrow S,$$

ordnen also die Elemente von S in einer Folge an

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots .$$

Wir können nun versuchen zu definieren

$$\sum_{s\in S} a_s = a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \dots .$$

Diese Definition ist aber nur dann sinnvoll, wenn der Ausdruck

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \dots$$

nicht von der gewählten speziellen Anordnung

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$$

abhängt. Dies ist offenbar dann gewährleistet, wenn die Reihe

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \dots$$

für irgendeine beliebige (und dann aber auch für alle) Anordnungen absolut konvergiert (Satz 7.1). Dies führt auf folgende

7.2 Definition. *Eine Schar* $(a_s)_{s\in S}$ *reeller Zahlen heißt* ***summierbar****, wenn es eine Anordnung*

$$\nu : \mathbb{N} \longrightarrow S$$

gibt, so daß die Reihe

$$a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + a_{\nu_3} + \dots$$

absolut konvergiert. Ist a *der Wert dieser Reihe, so schreibt man auch*

$$a = \sum_{s\in S} a_s.$$

Anmerkung. Anstelle von „die Schar (a_s) ist summierbar“ sagt man häufig auch „die Reihe $\sum a_s$ konvergiert absolut“.

Beispiele.

a) $S = \mathbb{Z}$

Wir gehen aus von einer Schar

$$a : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R},\ n \longmapsto a_n.$$

Man schreibt häufig

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \text{ anstelle von } \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n.$$

Diese Reihe konvergiert dann und nur dann absolut, wenn

$$a_0 + a_1 + a_{-1} + a_2 + a_{-2} + a_3 + a_{-3} + \dots$$

absolut konvergiert.

Nach 5.3 konvergieren dann insbesondere die Teilreihen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \text{ und } a_{-1} + a_{-2} + a_{-3} + \dots$$

absolut und umgekehrt folgt aus deren absoluter Konvergenz die Summierbarkeit von

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

b) Sei $\quad S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$

Man hat also eine Schar

$$(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

von reellen Zahlen, parametrisiert durch Paare von natürlichen Zahlen. Man könnte so etwas eine *Doppelfolge* nennen. Sie ist übersichtlich in einem quadratischen Schema anzuordnen.

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Ergänzung. Man kann natürlich

$$\sum_{s\in S} a_s$$

in naheliegender Weise auch definieren, wenn

$$(a_s)_{s\in S}$$

eine durch eine *endliche Menge* S parametrisierte Schar von Zahlen ist. Wir lassen auch den Fall $S = \emptyset$ zu und definieren in diesem Fall

$$\sum_{s\in\emptyset} a_s = 0.$$

Da bei endlichen Scharen keinerlei Konvergenzschwierigkeiten vorhanden sind, treffen wir noch die

Vereinbarung. Alle Scharen (a_s) reeller Zahlen, die durch endliche Mengen S parametrisiert werden, sind summierbar.

Bevor wir den *großen Umordnungssatz*, der ein Kommutativitäts- und Assoziativitätsgesetz für unendliche Reihen beinhaltet, formulieren können, müssen wir kurz noch den Begriff der Zerlegung einer (abzählbaren) Menge S erläutern.
Sei also S eine abzählbare Menge. Eine Zerlegung von S ist eine Folge

$$S_1,\, S_2,\, S_3, \dots$$

von Teilmengen von S, so daß jedes Element von S in genau einer der Teilmengen S_n enthalten ist, d.h

1) $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots := \{x \in S; \quad x \in S_n$ für mindestens ein $n\}$

2) $S_n \cap S_m = \emptyset$ für $n \neq m$.

7.3 Satz (Großer Umordnungssatz). *Es sei eine Zerlegung*

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots$$

einer abzählbaren Menge gegeben. Sei außerdem

$$(a_s)_{s \in S}$$

eine durch S parametrisierte ***summierbare*** *Schar reeller Zahlen. Dann gilt*

1) *Die Teilscharen*

$$(a_s)_{s \in S_n}$$

sind summierbar, die Zahlen

$$A_n = \sum_{s \in S_n} a_s \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

also wohldefiniert.

2) *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

ist absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{s \in S} a_s = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{s \in S_n} a_s \right).$$

Ergänzung. *Aus der Summierbarkeit der Scharen*

$$(|a_s|_{s \in S_n}) \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots$$

und der absoluten Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n,\ B_n = \sum_{s \in S_n} |a_s|$$

folgt die Summierbarkeit von $(a_s)_{s \in S}$.

Zum *Beweis* benötigen wir folgende beiden Kriterien für summierbare Scharen, welche sich unmittelbar aus bekannten Resultaten über Folgen und Reihen ergeben.

a) Eine Schar $(a_s)_{s\in S}$ ist genau dann summierbar, wenn es eine Zahl C gibt, so daß

$$\sum_{s\in T} |a_s| \leq C$$

für jede *endliche* Teilmenge T von S gilt. In diesem Fall ist

$$\sum_{s\in S} |a_s| \leq C.$$

Folgerung. Ist $(a_s)_{s\in S}$ summierbar und ist $S_0 \subset S$ eine Teilmenge, so ist auch die Teilschar $(a_s)_{s\in S_0}$ summierbar und es gilt

$$\sum_{s\in S_0} |a_s| \leq \sum_{s\in S} |a_s|.$$

b) Wenn eine Schar $(a_s)_{s\in S}$ summierbar ist, so existiert zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $T \subset S$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{s\in S-T} |a_s| < \varepsilon$$

Wir beweisen nun den großen Umordnungssatz. $(a_s)_{s\in S}$ ist nach Voraussetzung summierbar. Sei

$$A = \sum_{s\in S} a_s, \quad A_n = \sum_{s\in S_n} a_s \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Es gilt

$$A - (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \sum_{s\in S-(S_1\cup\ldots\cup S_n)} a_s.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine endliche Teilmenge $T \subset S$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{s\in S-T} |a_s| < \varepsilon.$$

Jedes Element der menge T muß in einem S_n enthalten sein. Wählt man daher nur N genügend groß, so gilt

$$T \subset S_1 \cup \ldots \cup S_N$$

und wir erhalten

$$|A-(A_1+A_2+\cdots+A_n)| \leq \sum_{s\in S-T} |a_s| \text{ für } n \geq N.$$

Hieraus folgt die Konvergenz der Reihe $A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$, sowie die Formel

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots,$$

welche es zu beweisen galt. Wir haben jedoch noch nicht die absolute Konvergenz der Reihe $A_1+A_2+A_3+\cdots$ erhalten. Diese ergibt sich, wenn man obigen Beweis auf die Schar $(|a_s|)_{s\in S}$ anstelle von $(a_s)_{s\in S}$ anwendet. □

Wir beweisen noch die Ergänzung zu 7.3. Sei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{s\in S_n}|a_s|\right) = C.$$

Behauptung. Ist $T \subset S$ eine endliche Teilmenge, so gilt

$$\sum_{s\in T}|a_s| \leq C$$

(und $(a_s)_{s\in S}$ ist summierbar).

Beweis. Sei

$$T_n := T \cap S_n.$$

Dann gilt

$$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \ldots.$$

Da die Menge T endlich ist, folgt

$$T = T_1 \cup \ldots \cup T_N, \; N \text{genügend groß.}$$

Den Umordnungssatz für endliche Scharen setzen wir als bewiesen voraus:

$$\sum_{s\in T}|a_s| = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{s\in T_n}|a_s|\right).$$

Die rechte Seite ist nicht größer als

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{s\in S_n}|a_s|\right) = C.$$

□

Wir diskutieren nun den Spezialfall einer *Doppelreihe*. Die Indexmenge ist hier $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; ihre Elemente denken wir uns in einem quadratischen Schema angeordnet:

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Wir geben nun einige Zerlegungen dieser Menge an.

a)
$$S_n = \{(a,b) \in S \mid b = n\}$$

Dies ist die n-te Spalte in dem obigen Schema und es ist klar, daß man hierdurch eine Zerlegung von S gewonnen hat.

b)
$$S_n = \{(a,b) \in S \mid a = n\} \qquad \text{(Zeilenzerlegung)}$$

c)
$$S_n = \{(a,b) \in S \mid a + b = n\} \qquad \text{(Diagonalzerlegung)}$$

Die Mengen S_n sind in diesem Fall endlich.

Sei nun eine Doppelfolge

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ also } a = (a_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

gegeben. Die absolute Konvergenz von

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{n,m}$$

bedeutet nichts anderes als die absolute Konvergenz von

$$a_{11} + a_{21} + a_{12} + a_{31} + a_{22} + a_{13} + \dots$$

(vergleiche den Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ im letzten Paragraphen). Dann ergibt sich aus dem großen Umordnungssatz

$$\begin{aligned} \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{n,m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} a_{\nu,\mu} \right), \end{aligned}$$

falls die Reihe auf der linken Seite absolut konvergiert. Man nennt diesen Spezialfall des großen Umordnungssatzes auch den CAUCHY*schen Doppelreihensatz*.

Distributivgesetz für unendliche Reihen.

7.4 Theorem. *Seien* $(a_s)_{s\in S}$, $(b_t)_{t\in T}$ *zwei summierbare Scharen reeller Zahlen. Dann ist auch die Schar*

$$(a_s \cdot b_t)_{(s,t)\in S\times T}$$

summierbar, und es gilt

$$\left(\sum_{s\in S} a_s\right)\cdot\left(\sum_{t\in T} b_t\right) = \sum_{(s,t)\in S\times T} (a_s \cdot b_t).$$

Der *Beweis* ergibt sich aus dem großen Umordnungssatz. □

Als Anwendung des Distributivgesetzes beschäftigen wir uns abschließend mit dem *Ausmultiplizieren von Potenzreihen*.

Gegeben seien zwei Folgen reeller Zahlen

$$a_0,\, a_1,\, a_2, \dots \text{ und } b_0,\, b_1,\, b_2, \dots .$$

Die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

mögen für alle x aus einer gewissen Menge $D \subset \mathbb{R}$ absolut konvergieren. Aus dem Doppelreihensatz folgt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (\textit{Cauchy-Produkt})$$

mit

$$c_n = \sum_{\nu+\mu=n} a_\nu b_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}.$$

Als Anwendung konstruieren wir eine Potenzreihe, die für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert und die zu einer Lösung der „Funktionalgleichung“

$$P(x+y) = P(x)P(y) \text{ für alle} x, y \in \mathbb{R}$$

führt. Dabei bezeichne

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den Wert der Potenzreihe an der Stelle x.

Das Problem ist sicher dann gelöst, wenn wir die Koeffizienten folgenden Bedingungen unterwerfen:

1) $(a_n x^n)$ ist eine Nullfolge für jedes $x \in \mathbb{R}$.

2) Es gilt $\sum_{\nu+\mu=n} a_\nu x^\nu b_\mu y^\mu = a_n (x+y)^n$.

Die binomische Formel zeigt, daß man

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

wählen kann.

7.5 Theorem. *Die Reihe*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots.$$

konvergiert für alle x absolut. Sie genügt der Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Aus der Funktionalgleichung folgert man unmittelbar zwei weitere wichtige Beziehungen:

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1.$$

Hieraus ergibt sich, daß $\exp(x)$ stets von Null verschieden ist, und weiterhin folgt noch

$$\exp(nx) = \exp(x)^n \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere gilt

$$\exp(n) = \mathrm{e}^n, \;\; \mathrm{e} = \exp(1) \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Kapitel II. Stetige Funktionen

1. Der Begriff der Stetigkeit

1.1 Definition. *Eine Funktion f einer Veränderlichen ist eine Abbildung*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei ist D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Bezeichnung. Man nennt D den *Definitionsbereich* der Funktion f und das *Bild* von f

$$f(D) := \left\{ b \in \mathbb{R}; \quad b = f(a) \text{ für ein } a \in D \right\}$$

den *Wertevorrat* von f.

Beispiele.

a) $\quad D = \mathbb{R}^\bullet := \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{(Wertevorrat: } \mathbb{R}^\bullet\text{).}$$

b) Die *konstante Funktion* mit dem Wert a.
$D \subset \mathbb{R}$ beliebig, aber nicht leer,

$$f(x) = a \text{ für } x \in D \qquad \text{(Wertevorrat: } \{a\}\text{).}$$

c) Eine Folge reeller Zahlen ist nichts anderes als eine Funktion, deren Definitionsbereich $\mathbb{N}$ ist.

1.2 Definition. *Eine Menge D von reellen Zahlen heißt* ***Intervall****, falls mit je zwei Punkten*

$$a, b \in D, \ a < b,$$

auch jeder zwischen a und b liegende Punkt in D enthalten ist, d.h.

$$a < x < b \Longrightarrow x \in D.$$

Es gibt verschiedene Typen von Intervallen, die wir der Reihe nach aufzählen.

I. Die endlichen Intervalle

Seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen.

a) *Das abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x;\ a \leq x \leq b\} \qquad \text{(also: } a, b \in [a, b]\text{)}.$$

b) *Das offene Intervall*

$$(a, b) := \{x;\ a < x < b\} \qquad \text{(also: } a, b \notin (a, b)\text{)}.$$

a) *Die halboffenen Intervalle*

$$[a, b) := \{x;\ a \leq x < b\} \qquad \text{(also: } a \in [a, b),\ b \notin [a, b)\text{)}.$$
$$(a, b] := \{x;\ a < x \leq b\} \qquad \text{(also: } a \notin (a, b],\ b \in (a, b]\text{)}.$$

II. Die unendlichen Intervalle

a) *Rechte Halbgeraden*

$$[a, \infty) := \{x;\ a \leq x\}$$
$$(a, \infty) := \{x;\ a < x\}$$

b) *Linke Halbgeraden*

$$(-\infty, b) := \{x;\ x \leq b\}$$
$$(-\infty, b) := \{x;\ x < b\}$$

a) *Die reelle Gerade*

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}.$$

Der Punkt a bzw. b heißt der *linke* bzw. *rechte* Randpunkt von D. Hierbei ist allerdings der degenerierte Fall $a = b$ auszuschließen. In diesem Falle gilt

$$[a, a] = \{a\} \text{ sowie } (a, a) = \emptyset.$$

1.3 Satz. *In obiger Liste kommen alle Intervalle im Sinne der Definition 1.2 vor*

Der Beweis beruht auf dem Vollständigkeitsaxiom und benutzt Fallunterscheidungen. Wir behandeln nur kurz einen Fall. Das Intervall D sei nach unten, nicht aber nach oben beschränkt. Sei $a = \inf D$. Aus der Definition eines Intervalls folgt leicht $(a, \infty) \subset D$. Danach überlegt man sich, daß D gleich (a, ∞) oder gleich $[a, \infty)$ sein muß. $\square$

1.4 Hilfssatz. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$ ein Punkt aus D. Folgende beiden Aussagen sind gleichbedeutend*

1) *Sei $a_1, a_2, a_3, \dots$ eine Folge von Punkten aus D, die gegen a konvergiert. Dann gilt*
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

2) *Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine positive Zahl $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:*
$$|f(x) - f(a)| \le \varepsilon, \text{ falls } |x - a| \le \delta \text{ und } x \in D.$$

Beweis. 1) $\Longrightarrow$ 2). Wir schließen indirekt, nehmen also an, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, welches die geforderte Eigenschaft *nicht* besitzt. Zu jedem $\delta > 0$ existiert dann ein $x \in D$ mit
$$|x - a| < \delta \text{ aber } |f(x) - f(a)| \ge \varepsilon.$$

Wir nutzen dies speziell für $\delta = 1/n$ aus und finden eine Folge (a_n) in D mit
$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x) - f(a)| \ge \varepsilon.$$

Es gilt dann also $a_n \to a$ und wegen 1) auch $f(a_n) \to f(a)$. Widerspruch!

2) $\Longrightarrow$ 1). Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen δ wie in 2) und bestimmen dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit
$$|a_n - a| < \delta \text{ für } n \ge N.$$

Dann gilt
$$|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon \text{ für } n \ge N. \qquad \square$$

Man kann die Bedingung 2) grob etwa folgendermaßen aussprechen:

Die Funktionswerte $f(x)$ liegen beliebig nahe bei $f(a)$, wenn nur x genügend nahe bei a liegt.

1.5 Definition. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche auf einem Intervall $D \subset \mathbb{R}$ definiert ist und sei $a \in D$. Dann heißt die Funktion f **stetig in** a, wenn die in Hilfssatz 1.4 formulierten Bedingungen erfüllt sind. f heißt **stetig** (schlechthin), wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches stetig ist.*

Beispiele stetiger Funktionen

1) Die konstante Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = a \text{ für } x \in \mathbb{R},$$
ist stetig.

2) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = x,$$

ist stetig.

3) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = x^3,$$

ist stetig.

Der *Beweis* ergibt sich aus der Charakterisierung der Stetigkeit durch Folgen (1.4, 1) und der Permanenzeigenschaften für konvergente Folgen:

$$a_n \longrightarrow a \Longrightarrow a_n^3 \longrightarrow a^3.$$

Es sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen, den Beweis mit Hilfe der ε-δ-*Definition* (1.4, 2) durchzuführen.

4) Sei $D := \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$. Dann ist die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) := \frac{1}{x},$$

stetig. (Auch auf dem Intervall $D' := \{x \in \mathbb{R};\ x < 0\}$ ist die Funktion natürlich stetig.)

5) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = |x|,$$

ist stetig.

Der Begriff der Stetigkeit ist eng mit dem Konvergenzbegriff verwandt, wie bereits aus der Definition über Folgen hervorgeht. Noch deutlicher wird dieser Zusammenhang, wenn man *Grenzwerte für Funktionen* einführt.

1.6 Definition. *Sei D ein Intervall, welches nicht nur aus einem Punkt besteht und sei $a \in D$. Außerdem sei eine Funktion*

$$f : D - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{oder} \quad f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Der Grenzwert von f für x gegen a existiert, wenn sich f in a hinein stetig fortsetzen läßt. Das möge bedeuten, daß es eine stetige Funktion

$$\tilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit der Eigenschaft

$$\tilde{f}(x) = f(x) \ \textit{für} \ x \in D, \ x \neq a.$$

Die Funktion f kann also, muß aber nicht, auch in dem Punkt a definiert sein. Auf den Wert $f(a)$ kommt es aber nicht an! Dies wird von anderen Autoren anders behandelt. Beispielsweise fordert Forster im Falle $f : D \to \mathbb{R}$ zusätzlich, daß $\tilde{f}(a) = f(a)$.

So wie hier der Grenzwertbegriff $\lim_{x\to a} f(x)$ *erklärt wurde, kommt es auf* $f(a)$ *nicht an, sollte* $f(a)$ *definiert sein.*

1.7 Bemerkung. *Die Voraussetzungen seien wie in Definition 1.6. Die stetige Fortsetzung* $\tilde{f}$ *ist, so sie überhaupt existiert, eindeutig bestimmt.*

Beweis. Da D ein Intervall ist, welches nicht nur aus einem Punkt besteht, findet man eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ mit

$$a_n \neq a,\ a \in D \text{ und } a_n \longrightarrow a \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Es gilt notwendigerweise

$$\tilde{f}(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n). \qquad \square$$

Bezeichnung. Sei $b = \tilde{f}(a)$. Dann schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ oder } f(x) \longrightarrow b \text{ für } x \longrightarrow a.$$

Natürlich kann man den Begriff des Grenzwerts direkt einführen, ohne auf die Stetigkeit zurückzugreifen, etwa:

Die Funktion $f(x)$ *konvergiert für* $x \to a$ *gegen* b*, falls zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit der Eigenschaft:*

$$x \neq a,\ x \in D,\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| \leq \varepsilon.$$

Eine weitere Alternative wäre

1.8 Bemerkung. *Die Voraussetzungen seien wie in 1.6. Die Funktion* f *konvergiert genau dann, wenn folgendes gilt:*

Ist $a_1, a_2, a_3, \dots$ *eine Folge aus* $D - \{a\}$*, welche gegen* a *konvergiert, so konvergiert auch die Folge* $(f(a_n))$.

Zum *Beweis* muß man nur zeigen, daß der Grenzwert $\lim f(a_n)$ nicht von der Wahl der gegen a konvergierenden Folge abhängt, denn dann kann man (unabhängig von der Wahl dieser Folge) definieren:

$$\tilde{f}(a) := \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Seien also $a_1,\ a_2,\ a_3,\dots$ und $b_1,\ b_2,\ b_3,\dots$ zwei Folgen aus $D-\{a\}$, welche beide gegen a konvergieren. Offensichtlich konvergiert dann die Folge

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$$

ebenfalls gegen a. Nach Voraussetzung konvergiert dann

$$f(a_1), f(b_1), f(a_2), f(b_2), f(a_3), f(b_3), \dots$$

Die Teilfolgen $(f(a_n))$ und $(f(b_n))$ haben dann den gleichen Grenzwert!

□

Beispiel für Konvergenz von Funktionen

Sei $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, d.h. eine Funktion mit beschränktem Wertevorrat:

$$|h(x)|\le C \text{ für alle } x\in\mathbb{R},\ C \text{ geeignet.}$$

Wir bilden die Funktion

$$f:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\quad\mathbb{R},\quad f(x)\ = x\cdot h\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aus I.3.3 und I.3.4 folgt dann $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

Seien

$$f,g:D\longrightarrow\mathbb{R}$$

zwei Funktionen mit demselben Definitionsbereich D. Dann sind die Funktionen

$$f+g,\ f\cdot g,\ cf\ (c\in\mathbb{R}) \text{ und } 1/f$$

definiert; die letzte allerdings nur, wenn $f(x)$ für alle $x\in D$ von Null verschieden ist. Man hat

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x),\\ (f\cdot g)(x) &:= f(x)\cdot g(x),\\ (cf)(x) &:= c\,f(x),\\ (1/f)(x) &:= \frac{1}{f(x)}.\end{aligned}$$

Anmerkungen.

1) Die Funktion $1/f$ hat nichts mit der im nächsten Abschnitt eingeführten Umkehrfunktion f^{-1} zu tun.

2) Die Menge aller Funktionen

$$f:D\longrightarrow\mathbb{R}$$

bildet insbesondere einen *Vektorraum über* $\mathbb{R}$. Diesen bezeichnet man gelegentlich mit $\mathbb{R}^D$. Für $D:=\{1,\dots,n\}$ erhält man so den $\mathbb{R}^n$, denn die Funktionen sind dann nichts anderes als n-Tupel von reellen Zahlen.

Die nun folgenden Stabilitätseigenschaften stetiger Funktionen ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften konvergenter Folgen. Es sei dem Leser empfohlen, neue Beweise zu finden, welche auf der ε-δ-Definition beruhen und von Folgen keinen Gebrauch machen.

1.9 Bemerkung. *Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf dem Intervall D. Wenn f und g im Punkt $a \in D$ stetig sind, so gilt dies auch für die Funktionen*

$$f + g,\ f \cdot g,\ cf\ (c \in \mathbb{R})\ \textit{und}\ 1/f,$$

letzteres natürlich nur, falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt.

Es ergeben sich so unter gewissen Voraussetzungen Permanenzeigenschaften für die Konvergenz von Funktionen (die Formulierung dieser Voraussetzungen möge dem Leser überlassen bleiben):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),\\ \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),\\ \lim_{x\to a}(1/f)(x) &= \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}.\end{aligned}$$

Ineinandersetzen von Funktionen.

Gegeben seien zwei Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : D' \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Annahme. $f(D) \subset D'$.
Man kann dann die Funktion

$$h : D \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) := g\left(f(x)\right),$$

betrachten. Diese bezeichnet man mit*)

$$h = g \circ f.$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} f :&\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= e^x,\\ g :&\quad \mathbb{R}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= \tfrac{1}{x},\\ h = g\circ f :&\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & h(x) &= \tfrac{1}{e^x}.\end{aligned}$$

*) Diese Definition weicht von der in der Mengentheorie üblichen Definition der Zusammensetzungen von Abbildungen $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ ab, wo gefordert wird, daß das Ziel Y von f gleich dem Definitionsbereich von g ist. Man könnte volle Konsistenz erreichen, wenn man anstelle f die Abbildung $f_0 : D \to D'$, $f_0(x) = f(x)$, einführt.

1.10 Bemerkung. *Es seien zwei Funktionen*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf den Intervallen D, D' gegeben und es gelte $f(D) \subset D'$. Sei $a \in D$ ein Punkt und $b = f(a) \in D'$. Wenn die Funktion f in a und die Funktion g in b stetig sind, so ist die Zusammensetzung $g \circ f$ in a stetig.

Man kann kurz sagen:

Stetigkeit bleibt beim Ineinandersetzen von Funktionen erhalten.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es existiert $\delta' > 0$ mit

$$|x - b| < \delta',\ x \in D' \Longrightarrow |g(x) - g(b)| < \varepsilon.$$

Wir bestimmen $\delta > 0$ so, daß

$$|x - a| < \delta,\ x \in D \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \delta'.$$

Es ist hieraus unmittelbar klar, daß

$$|x - a| < \delta,\ x \in D \Longrightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$ □

2. Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen

Im folgenden wird eine einfache Eigenschaft stetiger Funktionen nützlich sein. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Es gelte $f(x_0) > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|x - x_0| < \delta,\ x \in D \Longrightarrow f(x) > 0.$$

Wenn also eine Funktion f in einem Punkt x_0 positiv und stetig ist, so ist sie in „hinreichender Nähe“ von x_0 positiv.

Beweis. Man setze

$$\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$$

und bestimme $\delta > 0$ so, daß

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Also

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}.$$

Aus der linken Seite dieser Ungleichung folgt dann die Behauptung. □

Der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

2.1 Theorem. *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall D und seien $a < b$ zwei Punkte aus D, so daß $f(a)$ und $f(b)$ von 0 verschieden sind und* ***verschiedene*** *Vorzeichen haben.*

$$(\, f(a) < 0,\ f(b) > 0 \ \textit{oder}\ f(a) > 0,\ f(b) < 0\,)$$

Dann existiert eine Nullstelle ξ von f zwischen a und b:

$$a < \xi < b,\ f(\xi) = 0.$$

Beweis. O.B.d.A.: $f(a) > 0,\ f(b) < 0$.
Wir betrachten die Menge

$$M := \big\{\, x \in [a, b]; \quad f(x) \geq 0,\ x < b \,\big\}.$$

Diese Menge ist nicht leer ($a \in M$) und nach oben beschränkt (durch b), so daß man das Supremum betrachten kann:

$$\xi := \sup M.$$

Behauptung. $\quad f(\xi) = 0.$
Dies beweisen wir indirekt.
a) Sei $f(\xi) > 0$. Dann muß $\xi < b$ gelten. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$f(x) > 0 \text{ für alle } x \in D,\ |x - \xi| > \delta.$$

Wir können $\delta < b - \xi$ wählen. Dann folgt

$$\xi + \frac{\delta}{2} \in M.$$

Das kann aber nicht sein, denn ξ ist obere Schranke von M.
b) Sei $f(\xi) < 0$. Es existiert dann $\delta > 0$ mit

$$f(x) > 0 \text{ für alle } x \in D,\ |x - \xi| < \delta.$$

Dies ist aber nicht verträglich damit, daß ξ die *kleinste* obere Schranke von M ist. □

Man kann den Zwischenwertsatz sofort etwas verallgemeinern:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, D ein Intervall und seien $a < b$ zwei Punkte aus D. Wenn y_0 zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt (d.h. $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ oder $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$), so existiert eine Zwischenstelle

$$\xi \in D,\ a \leq \xi \leq b,$$

mit der Eigenschaft

$$f(\xi) = y_0.$$

Zum *Beweis* braucht man den Zwischenwertsatz nur auf die Funktion

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := f(x) - y_0$$

anzuwenden.

2.2 Folgerung. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D ein Intervall, so ist auch der Wertevorrat $f(D)$ ein Intervall.*

Monotone Funktionen.

Man nennt eine Funktion
$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

a) *(streng) monoton wachsend*, wenn für alle $a, b \in D$ gilt
$$a < b \Longrightarrow f(a) \le f(b) \qquad (f(a) < f(b)),$$

b) *(streng) monoton fallend*, wenn für alle $a, b \in D$ gilt
$$a < b \Longrightarrow f(a) \ge f(b) \qquad (f(a) > f(b)),$$

c) *(streng) monoton* schlechthin, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Offenbar ist eine Funktion genau dann streng monoton, wenn für jedes Tripel
$$a < b < c, \quad a, b, c \in D,$$
die Werte
$$f(b) - f(a) \text{ und } f(c) - f(b)$$
von Null verschieden sind und gleiches Vorzeichen haben.

2.3 Folgerung. *Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall D ist dann und nur dann eineindeutig, wenn sie streng monoton ist.*

Beweis.

a) trivialer Fall: Wenn f streng monoton ist, so ist f offensichtlich eineindeutig.

b) Sei f eineindeutig. Wir schließen indirekt, nehmen also an es gebe ein Tripel $a < b < c,\ a, b, c \in D$, so daß
$$f(a) - f(b) \text{ und } f(c) - f(b)$$
verschiedenes Vorzeichen haben. O.B.d.A. gelte
$$f(b) < f(a) \text{ und } f(b) < f(c).$$
Wir wählen einen beliebigen Wert y_0 mit
$$f(b) < y_0 < f(a) \text{ und } f(b) < y_0 < f(c).$$
Nach dem Zwischenwertsatz existieren Zwischenstellen ξ, ξ' mit
$$a < \xi < b \text{ und } b < \xi' < c$$
mit
$$f(\xi) = f(\xi') = y_0.$$
Das ist ein Widerspruch zur Eineindeutigkeit von f. $\square$

2.4 Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion auf dem Intervall D. Wenn der Wertevorrat $f(D)$ auch ein Intervall ist, so ist f stetig.*

Beweis. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß f streng monoton wachsend ist. Sei dann $x_0 \in D$. Wir wollen zunächts einmal annehmen, daß x_0 kein Randpunkt von D ist. Dann ist wegen der strengen Monotonie auch $f(x_0)$ kein Randpunkt von $f(D)$, so daß für genügend kleines $\varepsilon > 0$ gilt

$$[f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon] \subset f(D).$$

Gesucht ist $\delta > 0$, so daß für $x \in D$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Nun ist aber $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ gleichbedeutend mit

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Sei $y_1 := f(x_0) - \varepsilon \in f(D)$ und $y_2 := f(x_0) + \varepsilon \in f(D)$ und seien x_1, x_2 die eindeutig bestimmten Punkte x_1, x_2 in D mit

$$f(x_1) = y_1 \text{ und } f(x_2) = y_2.$$

Dann setzen wir

$$\delta := \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}.$$

Aus

$$|x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

folgt dann $x_1 < x < x_2$ und wegen der strengen Monotonie

$$f(x_0) - \varepsilon = y_1 = f(x_1) < f(x) < f(x_2) = y_2 = f(x_0) + \varepsilon.$$

Wenn x_0 ein Randpunkt ist, so schließt man ähnlich (einseitig!). □

Anmerkung. Der Satz ist auch dann richtig, wenn man statt der strengen nur die einfache Monotonie voraussetzt.

Stetigkeit und Monotonie sind ***lokale*** *Eigenschaften einer Funktion.*

Wir wollen dies präzisieren.

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl und sei $\varepsilon > 0$. Unter der *ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$* von a versteht man das Intervall

$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

also die Menge aller Zahlen x mit

$$|x - a| < \varepsilon.$$

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subset \mathbb{R}$ und $D_0 \subset D$ ein Teil von D. Die Einschränkung von f auf D_0 ist die Funktion

$$f_0 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R},\ f_0(x) := f(x) \text{ für } x \in D_0.$$

Schreibweise.

$$f|D_0 := f_0.$$

Die Eigenschaft der Stetigkeit ist im folgenden Sinne eine *lokale* Eigenschaft:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, D ein Intervall und $a \in D$. Die Funktion f ist genau dann stetig in a, wenn es eine ε-Umgebung $U = U_\varepsilon(a)$ von a gibt, so daß die Einschränkung von f auf $U \cap D$ stetig in a ist.

Etwas vage ausgedrückt:

Ob eine Funktion f stetig in a ist, hängt nur von dem Verhalten von f „in der Nähe von a" ab.

Der Beweis dieser Behauptung ist fast trivial und kann dem Leser überlassen bleiben. Weniger auf der Hand (wenn auch anschaulich klar) liegt:

Die Eigenschaft der Monotonie ist im folgenden Sinne eine *lokale* Eigenschaft:

*Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, D ein Intervall. Die Funktion f ist genau dann (streng) monoton wachsend, wenn sie **lokal (streng) monoton wachsend** ist, wenn es also zu jedem Punkt $a \in D$ eine ε-Umgebung $U = U_\varepsilon(a)$ von a gibt, so daß die Einschränkung von f auf $U \cap D$ (streng) monoton wachsend ist.*

(Man kann „wachsend" durch „fallend" ersetzen).

Wir führen den *Beweis* für *strenge* Monotonie. Die Funktion f sei also lokal streng monoton wachsend. Wir zeigen, daß f überhaupt streng monoton wachsend ist. Dies geschieht wiederum indirekt; wir nehmen also an, daß Punkte $a, b \in D$ mit

$$a < b \text{ aber } f(a) \geq f(b)$$

existieren. Sei

$$M := \{x \in [a, b];\ f(a) < f(x)\}.$$

Die Menge M ist nicht leer, da f in einer δ-Umgebung von a streng monoton wachsend ist. Sie ist durch b nach oben beschränkt. Wir können daher wieder

$$\xi := \sup M$$

betrachten. Es gilt

$$a < \xi \leq b.$$

Nun nutzen wir aus, daß f in einer δ'-Umgebung von ξ streng monoton wachsend ist und folgern hieraus zunächst

$$\xi \in M$$

und dann

$$\xi < b$$

da $b \notin M$ nach Voraussetzung. Wir nutzen nun nocheinmal aus, daß f in einer δ'-Umgebung von ξ streng monoton wachsend ist und schließen

$$\xi + \frac{\delta'}{2} \in M,$$

wenn wir δ' so klein wählen, daß $\delta' < b - \xi$ gilt. Widerspruch! □

Aus 2.3 folgt nun:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine ***stetige*** *Funktion auf einem* ***Intervall****. Die Eineindeutigkeit von f ist eine lokale Eigenschaft.*

Die Umkehrfunktion.

Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},$$

eine eineindeutige Funktion, $f(D)$ ihr Wertevorrat. Zu jedem Element $b \in f(D)$ existiert also ein und nur ein Punkt

$$a \in D \text{ mit } f(a) = b.$$

Ordnet man jedem Punkt $b \in f(D)$ diesen Punkt a zu, so erhält man eine neue Funktion

$$g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sie hat die Eigenschaft

$$f(a) = b \Longleftrightarrow a = g(b).$$

Man nennt g die *Umkehrfunktion* von f. Offensichtlich ist g ebenfalls eineindeutig. Die Umkehrfunktion von g ist f.

Wir halten fest:

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertevorrat der Ausgangsfunktion.
Der Wertevorrat der Umkehrfunktion ist der Definitionsbereich der Ausgangsfunktion.

*Bezeichnung *).*

$$f^{-1} : \text{Umkehrfunktion von } f$$

(Sie kann nur bei *eineindeutigem* f gebildet werden!) Die Umkehrfunkion f^{-1} ist etwas völlig anderes als die reziproke Funktion $1/f$.

Wir zeigen nun als Anwendung von 2.4, daß die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion auf einem Intervall wieder stetig ist.

**)* Auch hier weichen wir vom in der Mengenlehre üblichen Begriff der Umkehrabbildung einer Abbildung $f : X \to Y$ ab, wo gefordert wird, daß f bijektive ist.

2.5 Theorem. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige und eineindeutige Funktion auf dem Intervall D. Die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion ebenfalls streng monoton ist. Der Rest ergibt sich dann aus 2.4, denn der Wertevorrat von f^{-1} ist das Intervall D. □

Beispiel. Sei n eine natürliche Zahl,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) := x^n.$$

Behauptung. Der Wertevorrat von f ist

$$f(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis. Wir beschränken uns darauf zu beweisen:
Sei $y_0 > 0$. Es existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$y_0 = x_0^n \qquad \text{(Existenz der } n\text{-ten Wurzel).}$$

Nach dem *Zwischenwertsatz* genügt es, Zahlen a und b mit der Eigenschaft

$$a^n \leq y_0 \leq b^n$$

zu konstruieren. Deren Existenz ist aber klar (man wähle etwa

$$a = \frac{1}{k} \text{ sowie } b = k$$

für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$.) □

Die Funktion f ist offenbar streng monoton, wenn n ungerade ist. Wir können daher die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden.

Bezeichnung.

$$f^{-1}(x) := \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Die definierende Eigenschaft dieser Funktion ist

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bei *ungeradem* n erhalten wir also folgendes *Ergebnis*:
Bei ungeradem n ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = x^n,$$

stetig und streng monoton wachsend; ihr Wertevorrat ist $\mathbb{R}$.
Ihre Umkehrfunktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[n]{x}$$

ist daher also auf ganz $\mathbb{R}$ *definiert, ebenfalls stetig und streng monoton wachsend und hat den Wertevorrat* $\mathbb{R}$.

Bei *geradem* n kann man nicht so ohne weiteres eine Umkehrfunktion bilden, denn die Funktion

$$f(x) = x^n$$

ist dann nicht eineindeutig. Es gilt ja

$$x^n = (-x)^n.$$

Deshalb schränken wir den Definitionsbereich zunächst einmal ein

$$f_0 := f|D \text{ wobei } D := \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}.$$

Die Funktion f_0 ist streng monoton wachsend und hat den gleichen Wertevorrat wie f, nämlich ebenfalls D.

Man kann daher die Umkehrfunktion

$$f_0^{-1} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

betrachten.

Bezeichnung.

$$f_0^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \text{ für } x \geq 0.$$

Bei *geradem* n erhalten wir also folgendes *Ergebnis*:

Bei geradem n *ist die Funktion*

$$f : \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n,$$

stetig und streng monoton wachsend; ihr Wertevorrat ist gleich dem Definitionsbereich.

Ihre Umkehrfunktion

$$g : \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt[n]{x},$$

ist auf ganz $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$ *definiert, ebenfalls stetig und streng monoton wachsend und hat den Wertevorrat* $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$.

Nach unserer Definition ist also der Ausdruck $\sqrt[n]{x}$ bei geradem $n \in \mathbb{N}$ nur für $x \geq 0$ definiert und es gilt

$$\sqrt[n]{x} \geq 0 \text{ für } x \geq 0.$$

Die Funktion

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \text{ für } x > 0$$

läßt sich jedoch auch auf ganz andere Weise gewinnen. Dies soll im folgenden geschehen.

Behauptung. *Die Funktion (I.7.5)*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

ist streng monoton wachsend, stetig und hat als Wertevorrat die Menge $\mathbb{R}_+$ *der positiven reellen Zahlen.*

Beweis. 1) exp *ist streng monoton.*

Wenn $0 \le a < b$ gilt, dann ist sicher $\exp(a) < \exp(b)$, denn die Reihe $\exp(b)$ majorisiert die Reihe $\exp(a)$. Das Verhalten für negative x wird geklärt durch die Formel

$$\exp(-x) = \exp(x)^{-1}.$$

2) exp *ist stetig.*

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Es existiert dann ein $\delta > 0$ mit

$$\frac{\delta}{1-\delta} \cdot \exp(x_0) < \varepsilon \qquad \Big(\text{beachte: } \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0\Big).$$

Aus $|x - x_0| < \delta$ folgt

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(x_0)| &= \exp(x_0) |\exp(x - x_0) - 1| \\ &= \exp(x_0) \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \Big| \le \exp(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta^n}{n!}. \end{aligned}$$

Wenn $\delta < 1$ gewählt wurde, was wir annehmen können, so folgt hieraus

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \le \exp(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n = \exp(x_0) \frac{\delta}{1-\delta} < \varepsilon.$$

3) *Der Wertevorrat von* exp *ist* $\mathbb{R}_+$.

Für positive x ist $\exp(x)$ positiv, da dann alle Reihenglieder positiv sind. Wenn x hingegen negativ ist, so gilt

$$\exp(-x) \exp(x) = 1,$$

also auch $\exp(x) > 0$.

Sei nun umgekehrt $y_0 \in \mathbb{R}_+$. wir suchen $x_0 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\exp(x_0) = y_0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz genügt es, Zahlen a und b zu finden, so daß gilt

$$\exp(a) \leq y_0 \leq \exp(b).$$

Die Existenz solcher Zahlen ist gesichert; man kann beispielsweise

$$a = -k \text{ sowie } b = k$$

für genügend großes $k \in \mathbb{N}$ wählen, denn es gilt

$$\lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0. \qquad \square$$

Die Umkehrfunktion von exp ist der sogenannte natürliche *Logarithmus*. Sein Definitionsbereich ist der Wertevorrat von exp, also $\mathbb{R}_+$:

$$\log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Wir erhalten also folgendes *Ergebnis*:

Die Umkehrfunktion von exp*, der* ***Logarithmus****, ist definiert auf* $\mathbb{R}_+$ *und hat als Wertevorrat* $\mathbb{R}$*. Der Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend. Er genügt der* ***Funktionalgleichung***

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \textit{ für alle } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Bezeichnung. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a > 0$. Wir definieren

$$a^b := \exp(b \log a).$$

Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = a^x = \exp(x \log a),\ a > 0$$

heißt *Exponentialfunktion zu Basis a*.

Diese Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß in den Fällen, in denen a^b bereits definiert wurde, nichts Neues herauskommt, wovon sich der Leser überzeugen möge. Zum Beispiel gilt

$$\mathrm{e}^x = \exp(x \log \mathrm{e}) = \exp(x),$$

denn es gilt $\log \mathrm{e} = 1$.

Rechenregeln.

1)	a^{b+c}	$= a^b a^c$	(sofern $a > 0$)
2)	$a^c b^c$	$= (ab)^c$	(sofern $a, b > 0$)
3)	$(a^b)^c$	$= a^{bc}$	(sofern $a > 0$)

Diese Rechenregeln folgen unmittelbar aus der Definition und den beiden Formeln

$$\log(ab) = \log a + \log b \text{ sowie } \log a^b = b \log a \quad (a > 0),$$

welche wiederum durch Anwenden von exp bewiesen werden.

Ein weiterer fundamentaler und anschaulich klarer Satz der reellen Analysis ist das

2.6 Theorem. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ a < b,$$

eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$*. Der Wertevorrat von* f *besitzt ein Maximum und ein Minimum.*

Es existiert also beispielsweise ein Punkt $\xi \in [a, b]$ mit der Eigenschaft

$$f(\xi) \geq f(x) \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Nach dem Zwischenwertsatz ist der Wertevorrat von f ein Intervall. Die Funktion f nimmt also auch alle zwischen dem Maximum und Minimum liegenden Werte an. Es gilt also:

Der Wertevorrat einer auf einem abgeschlossenen Intervall definierten stetigen Funktion ist selbst ein abgeschlossenes Intervall.

Insbesondere ist eine solche Funktion also *beschränkt*, d.h. es existiert eine Konstante C, so daß gilt

$$|f(x)| \leq C \text{ für alle } x \in [a, b].$$

(Man wähle etwa $C = \max\{|\min f(x)|, |\max f(x)|\}$.)

Nun zum *Beweis von Theorem 2.6*.

1) f *ist beschränkt*

Wir zeigen dies indirekt, nehmen also an, f sei unbeschränkt. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit

$$f(x_n) \geq n.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass existiert eine konvergente Teilfolge

$$x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, x_{\nu_3}, \ldots .$$

Der Grenzwert dieser Folge sei x^*. Es gilt dann nach I.4.10

$$a \leq x^* \leq b.$$

Da f stetig ist hat man

$$f(x^*) = \lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_{\nu_n})$$

und die Folge $(f(x_{\nu_n}))$ muß beschränkt sein. Das ist ein Widerspruch zur Konstruktion von x_n.

2) f *besitzt ein Maximum (und ein Minimum).*

Sei

$$\beta = \sup\{f(x);\ x \in [a, b]\}.$$

Wir müssen zeigen, daß β im Wertevorrat von f liegt. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man die Funktion

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) := \frac{1}{|f(x) - \beta|}$$

betrachten und diese wäre stetig in $[a, b]$. Nach dem ersten Schritt wäre dann g in $[a, b]$ beschränkt; dies steht aber im Widerspruch zur Definition des Supremums.

Im Falle des Infimums schließt man ebenso. □

3. Folgen und Reihen von Funktionen

3.1 Definition. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen*

$$f_n : D \to \mathbb{R} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

*heißt **punktweise konvergent** gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ für jedes } x \in D.$$

Schreibweise.

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ oder } f_n \longrightarrow f \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Von einem naiven Standpunkt aus könnte man vermuten, daß die Grenzfunktion stetig ist, wenn alle Funktionen f_n stetig sind. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall.

Gegenbeispiel.

$$D = [0, 1],\ f_n(x) = x^n.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion f ist unstetig an der Stelle $x = 1$!

Die Tatsache, daß die Stetigkeit von Funktionen bei Grenzübergängen zerstört werden kann, ist oft ärgerlich. Es gibt aber einen etwas engeren Konvergenzbegriff — die *gleichmäßige Konvergenz* — der diese unangenehme Eigenschaft nicht hat.

Wir führen zunächst den Begriff der *Norm* einer beschränkten Funktion ein. Wir erinnern dran, daß man eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ *beschränkt* nennt, wenn der Wertevorrat $f(D)$ beschränkt ist, wenn es also eine Konstante C gibt mit der Eigenschaft

$$|f(x)| \le C \text{ für alle } x \in D.$$

Die *Norm* $\|f\|$ ist dann die kleinste obere Schranke C mit dieser Eigenschaft.

3.2 Definition. *Die* ***(Supremums-)Norm*** *einer beschränkten Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \neq \emptyset,$$

ist definiert durch die Formel

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in D\}.$$

Für eine beschränkte Funktion gilt also:
Die beiden Ungleichungen

a) $|f(x)| \leq C$ *für alle* $x \in D$,
b) $\|f\| \leq C$,

sind gleichbedeutend.
Insbesondere gilt

$$|f(x)| \leq \|f\| \text{ für alle } x \in D.$$

Im allgemeinen braucht $\|f\|$ nicht im Wertevorrat von f zu liegen, nur unter speziellen Voraussetzungen ist dies der Fall, z.B. für stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall.

3.3 Bemerkung. *Seien*

$$f, g : D \to \mathbb{R}$$

zwei beschränkte Funktionen, c eine reelle Zahl. Dann gilt

1) $\|f\| \geq 0$ *und* $\|f\| = 0$ *nur, wenn* $f(x) = 0$ *für alle* $x \in D$.
2) $\|cf\| = |c|\,\|f\|$.
3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.
4) $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Beweis. (Nur für 3))
Für jedes $x \in D$ gilt

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|\,.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung. □

3.4 Definition. *Eine Folge von Funktionen*

$$f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots : D \to \mathbb{R}$$

heißt ***gleichmäßig konvergent*** *gegen* $f : D \to \mathbb{R}$*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind*

1) *Die Funktionen* $f - f_n$ *sind beschränkt*).*

2) *Die Folge der Zahlen*

$$\|f - f_1\|\,,\ \|f - f_2\|\,,\ \|f - f_3\|\,,\ \ldots$$

ist eine Nullfolge.

**)* Wenn man will, kann diese Bedingung abschwächen. Es genügte zu fordern, daß $f - f_n$ für alle n bis auf endlich viele Ausnahmen beschränkt ist

Anders ausgedrückt existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N, so daß gilt:

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Anmerkung. Wenn eine Folge von Funktionen (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, so konvergiert sie auch punktweise gegen f.

Beweis. Man beachte die Ungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|. \qquad \square$$

3.5 Theorem. *Gegeben sei eine Folge von Funktionen, die im Punkt x_0 stetig seien. Konvergiert die Folge gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, so ist auch die Grenzfunktion f stetig in x_0.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so, daß gilt

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } n \geq N.$$

Dann werde $\delta > 0$ so bestimmt, daß für $x \in D$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f - f_N\| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \|f_N - f\| < \varepsilon. \qquad \square \end{aligned}$$

Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ist so wichtig, daß wir den *Unterschied* zur punktweisen Konvergenz noch einmal herausarbeiten wollen.

Die *punktweise Konvergenz* der Folge

$$f_1, f_2, f_3, \ldots : D \to \mathbb{R}$$

gegen $f : D \to \mathbb{R}$ bedeutet:

Zu jedem $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \textit{ für } n \geq N.$$

Im allgemeinen muß man erwarten, daß N von ε *und* x_0 abhängt; deshalb schreibt man auch häufig $N = N(x_0, \varepsilon)$.

Machen wir uns diese Abhängigkeit an einem Beispiel klar:

$$D = (0,1) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}, \quad f_n : D \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$$

Wir wissen bereits

$$f_n \longrightarrow 0 \qquad \text{(Nullfunktion).}$$

(Achtung: Das Zeichen $\longrightarrow$ bedeutet *punktweise Konvergenz*!)
Den Beweis hierfür wollen wir nocheinmal analysieren:
Sei $x \in D$, also $0 < x < 1$. Wir schreiben

$$\frac{1}{x} = 1 + t \text{ mit } t = \frac{1}{x} - 1 > 0.$$

Dann gilt

$$x^n = \frac{1}{(1+t)^n} < \frac{1}{1+nt} < \frac{1}{nt} < \varepsilon$$

sofern nur

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon t}$$

ist. Man kann also

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon t}\right] + 1$$

wählen und sieht, daß N bei der Wahl, die wir getroffen haben, sowohl von t (und damit von x), als auch von ε abhängt.
Was bedeutet nun die *gleichmäßige Konvergenz* von (f_n) gegen f? Zu jedem $\varepsilon > 0$ muß ein $N \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\|f_n - f\| > \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Insbesondere gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon \text{ für } n \geq N \text{ \underline{und alle $x \in D$}}.$$

Umgekehrt folgt aus

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \in D$$

auch

$$\|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

Die Bedingung 2) in Definition 3.4 ist also äquivalent zu:
*Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine (nur von ε, **nicht** aber von x abhängige) natürliche Zahl N, so daß gilt*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon \textit{ für } n \geq N \textbf{\textit{ und alle }} x \in D.$$

Wir wollen nun ein weiteres Beispiel für eine Folge von Funktionen betrachten, die nicht gleichmäßig konvergiert:

Es sei $D = [0,1]$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 2 - nx & \text{für } \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{2}{n} < x \le 1. \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind alle stetig. Sie nehmen ihr Maximum im Punkt $\frac{1}{n}$ an. Es gilt

$$\|f_n\| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Behauptung. Sei $x \in D$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Beweis.

a) Der Fall $x = 0$ ist trivial, denn es gilt $f_n(0) = 0$ für alle n.

b) Sei $0 < x \le 1$. Wählt man die natürliche Zahl N so, daß

$$N \ge \frac{2}{x} \iff x \ge \frac{2}{N}$$

gilt, so folgt

$$f_n(x) = 0 \text{ für } n \ge N,$$

also insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Die Folge der Funktionen f_n konvergiert also (punktweise!) gegen Null (eine stetige Funktion!), aber sie konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, da sonst $\|f\|_n$ eine Nullfolge sein müßte.

Die gleichmäßige Konvergenz ist also eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung dafür, daß die Grenzfunktion einer Folge von stetigen Funktionen wieder stetig ist.

Die gleichmäßige Konvergenz steht auch im Zusammenhang mit der Frage, wann man Grenzprozesse vertauschen oder koppeln darf. Beispielsweise gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \text{ für } 0 \le x > 1,$$

insbesondere also

$$\lim_{x\to 1}(\lim_{n\to\infty} x^n) = 0.$$

Andererseits gilt

$$\lim_{x\to 1} x^n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 1} x^n) = 1.$$

Man darf also zwei Grenzübergänge i.a. nicht vertauschen. Dieses Phänomen kann jedoch nicht auftreten, wenn gleichmäßige Konvergenzen vorliegen. Genauer gilt:

3.6 Satz. *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in D$ und*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : D \to \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, so daß

$$\lim_{x \to a} f_n(x)$$

für alle n existiert. Dann existiert auch

$$\lim_{x \to a} f(x) \ \textit{mit}\ f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

und es gilt (wegen 3.5)

$$\lim_{x \to a} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to a} f_n(x)).$$

Für Reihen von Funktionen gelten einige Besonderheiten, auf die wir jetzt eingehen wollen.

Eine Reihe von Funktionen

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$

heißt *punktweise (gleichmäßig) konvergent*, wenn dies für die Folge (F_n) der Partialsummen

$$F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

zutrifft. Für die gleichmäßige Konvergenz gilt hier jedoch ein besonders einfaches Kriterium.

3.7 Satz. *Sei*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von beschränkten Funktionen. Die Reihe der Funktionen

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$

konvergiert gleichmäßig, wenn die Reihe der Normen

$$\|f_1\| + \|f_2\| + \|f_3\| + \ldots$$

konvergiert.

Der *Beweis* ist völlig analog zu I.5.2. Man muß nur den Betrag durch die Normen ersetzen. □

3.8 Folgerung. *Eine Reihe von Funktionen*

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots, \ f_n : D \to \mathbb{R}$$

konvergiert gleichmäßig, wenn es eine von $x \in D$ unabhängige Majorante

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

gibt. ($|f_n(x)| \le a_n$ für alle $x \in D,\ n \in \mathbb{N}$.)

Die Existenz einer solchen Majorante impliziert natürlich für jedes x auch die absolute Konvergenz von

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots .$$

Dieses *Majorantenkriterium* garantiert also die *absolute* und die *gleichmäßige* Konvergenz der Reihe.

Man kann dieses Kriterium natürlich auch für summierbare Scharen formulieren. Eine Schar $(f_s)_{s\in S}$ von Funktionen (mit gemeinsamem Definitionsbereich D) heißt *punktweise summierbar*, wenn die Schar

$$(f_s(x))_{s\in S}$$

für jedes x in D summierbar ist. Die durch

$$f(x) = \sum_{s\in S} f_s(x)$$

definierte Grenzfunktion wird dann auch mit

$$f = \sum_{s\in S} f_s$$

bezeichnet.

Eine summierbare Schar $(a_s)_{s\in S}$ von reellen Zahlen heißt eine *Majorante* von (f_s), wenn gilt

$$|f_s(x)| \le a_s \text{ für alle} s \in S \text{und} x \in D.$$

Existiert eine solche Majorante, so konvergiert die Reihe

$$f_{s_1} + f_{s_2} + f_{s_3} + \ldots$$

bei jeder Anordnung von S absolut und gleichmäßig. Daher ist also die Summe

$$f = \sum_{s\in S} f_s$$

derartiger *stetiger* Funktionen wieder stetig.

4. Potenzreihen

Es sei eine Folge

$$a_0,\, a_1,\, a_2, \dots$$

von reellen Zahlen gegeben. Dann soll das Verhalten der sogenannten *Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

untersucht werden. Dabei stellen sich folgende Fragen:

1) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe (absolut) konvergent?

2) In welchen Bereichen $D \subset \mathbb{R}$ ist sie sogar gleichmäßig konvergent?

Zur Beantwortung dieser Fragen sei zunächst

$$x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \neq 0,$$

ein Punkt, für den die Folge $(a_n x_0^n)$ beschränkt ist, d.h. es gebe eine Konstante C mit der Eigenschaft

$$|a_n x_0^n| \le C \text{ für alle } n\ \in \mathbb{N}.$$

Unter dieser Voraussetzung zeigen wir die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ für } |x| < |x_0|.$$

Dazu führen wir den Quotienten

$$r = \frac{|x|}{|x_0|} \qquad (0 \le r < 1)$$

ein. Dann gilt

$$|a_n x^n| = r^n |a_n x_0^n| \le C r^n.$$

Wir haben somit eine konvergente Majorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} C r^n \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

gefunden.

Aus der Beschränktheit von $(a_n x_0^n)$ ergeben sich also gewisse Konsequenzen für die Konvergenz der Potenzreihe. Wir führen daher die Menge

$$B := \left\{\, x \in \mathbb{R};\quad (a_n x^n) \text{ ist beschränkt} \,\right\}$$

ein. Zu jedem $x \in B$ existiert also eine Konstante $C = C_x$, so daß

$$|a_n x^n| \le C_x \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

gilt. Dabei darf C_x (wie die Schreibweise bereits andeutet) zwar von x abhängen, nicht jedoch von n. Offenbar gilt

$$x \in B \Longrightarrow [-|x|, |x|] \subset B.$$

Mit anderen Worten: B ist ein zum Nullpunkt symmetrisches Intervall:

$$B = (-r, r)\ (r > 0) \text{ oder } B = [-r, r]\ (r \ge 0) \text{ oder } B = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

In den beiden ersten Fällen gilt dabei

$$r = \sup\big\{\, x \in \mathbb{R}; \quad (a_n x^n) \text{ßist beschränkt} \,\big\}.$$

An dieser Stelle erweist es sich als zweckmäßig, die folgenden Bezeichnungen einzuführen:

Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nicht leere Menge reeller Zahlen. Dann sei

$$\operatorname{Sup} M = \begin{cases} \sup M & \text{falls } M \text{ nach oben beschränkt ist,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem vereinbaren wir

$$x < \infty \text{ für beliebiges } x \in \mathbb{R}.$$

Die Schreibweise $\operatorname{Sup} M = \infty$ bringt also einfach zum Ausdruck, daß es zu jeder reellen Zahl x ein Element $a \in M$ gibt, das größer als x ist.

Wir können also sagen

$$r = \operatorname{Sup} B,$$

gleichgültig, ob B ein endliches oder ein unendliches Intervall ist. Dieses r nennen wir dann den *Konvergenzradius* der Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots .$$

Die Berechtigung dieser Sprechweise zeigt

4.1 Theorem. *Gegeben sei eine Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

mit dem Konvergenzradius r. Dann konvergiert die Reihe ***absolut*** *für $|x| < r$; sie konvergiert nicht für $|x| > r$ (falls $r < \infty$).*

Ist δ eine beliebige Zahl zwischen 0 und r (also $0 \le \delta < r$), so konvergiert die Reihe in dem Intervall $[-\delta, \delta]$ ***gleichmäßig****.*

Beweis. 1) Sei $|x| > r$. Dann ist die Folge $(a_n x^n)$ unbeschränkt. Wenn aber die Reihe $\sum a_n x^n$ konvergiert, so ist $(a_n x^n)$ eine Nullfolge und somit insbesondere beschränkt.

2) Sei nun δ gegeben:

$$0 \le \delta < r.$$

Wir zeigen die absolute und gleichmäßige Konvergenz in dem Bereich $[-\delta, \delta]$. Damit ist dann insbesondere die absolute Konvergenz für alle x mit $|x| < r$ bewiesen, denn jedes solche x ist in einem Intervall $[-\delta, \delta]$ enthalten, wenn man nur δ nahe genug bei r wählt.

Sei nun

$$x_0 := \frac{\delta + r}{2}.$$

Dann gilt jedenfalls

$$\delta < x_0 < r.$$

Nach Voraussetzung ist die Folge $(a_n x_0^n)$ beschränkt, etwa durch die Konstante C. Dann hat man die Abschätzungen

$$|x| < \delta \Longrightarrow |a_n x^n| \le |a_n| \delta^n \le C \left(\frac{\delta}{x_0} \right)^n .$$

damit hat man auf $[-\delta, \delta]$ eine von x unabhängige Majorante gefunden (wegen $(\delta/x_0) < 1$) und somit sowohl absolute, als auch gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen. □

4.2 Folgerung. *Eine Potenzreihe stellt im Inneren ihres Konvergenzintervalls eine stetige Funktion dar.*

Beweis. Die Reihe konvergiert in einer ε-Umgebung jedes Punktes x mit $|x| < r$ gleichmäßig. □

Über die Randpunkte des Konvergenzintervalls macht 4.2 keine Aussage. Es gibt hier auch keine allgemeingültigen Aussagen, wie die folgenden *Beispiele* illustrieren mögen.

1) Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Wir wissen aus früheren Untersuchungen, daß der Konvergenzradius 1 ist. Immerhin ist die Folge (x^n) in den Endpunkten noch beschränkt; sie ist jedoch keine Nullfolge, so daß die Reihe weder für $x = 1$ noch für $x = -1$ konvergiert.

2) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Es wird sich zeigen, daß der Konvergenzradius dieser Reihe ebenfalls 1 ist und daß für $|x| < 1$ gilt:

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Das allgemeine Reihenglied $\frac{1}{n}x^n$ ist sowohl für $x = 1$ als auch für $x = -1$ eine Nullfolge (insbesondere also beschränkt). Nach I.5.6 konvergiert die Reihe für $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{(Leibnizsche Reihe)},$$

sie konvergiert nicht für $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{(harmonische Reihe)}.$$

Da man auch keine gleichmäßige Konvergenz in dem Bereich

$$[-1, -1+a] \qquad (a > 0 \text{ geeignet})$$

zur Verfügung hat, ist auch gar nicht klar, daß gilt:

$$-\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Dies wird sich erst aus dem Abelschen Grenzwertsatz (s. IV.2.1) ergeben.

4.3 Hilfssatz. *Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hat dann und nur dann einen positiven (d.h. von Null verschiedenen) Konvergenzradius, wenn die Folge

$$\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$$

beschränkt ist.

Beweis.

1) Wenn der Konvergenzradius positiv ist, dann existiert eine Zahl $x_0 \neq 0$, so daß die Folge $(a_n x_0^n)$ beschränkt ist, d.h.

$$|a_n x_0^n| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (C \text{ geeignet})$$

Aus dieser Ungleichung folgt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{C}}{|x_0|}.$$

Die Folge $(\sqrt[n]{C})$ ist konvergent (gegen 1) und damit beschränkt.
2) Die Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ sei beschränkt, etwa durch $C > 0$. Es gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq C \Longrightarrow \bigl(a_n C^{-n}\bigr) \text{ ist beschränkt.}$$

Also ist

$$r > \frac{1}{C} > 0. \qquad \square$$

Wir wollen noch eine Formel ableiten, mit der man den Konvergenzradius r aus der Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ bestimmen kann. Dazu eine Vorbereitung.
Sei

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \ldots$$

eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn es eine gegen a konvergente Teilfolge gibt. Aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstrass existiert mindestens ein Häufungspunkt. Die Menge M aller Häufungspunkte ist — wie die Folge selbst — beschränkt. Wir können daher

$$\sup M \text{ und } \inf M$$

betrachten. Man kann leicht zeigen, daß $\sup M$ selbst ein Häufungspukt ist, es gilt also $\sup M = \max M$.
Bezeichnung.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup M \qquad \text{(Limes superior)}$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \inf M \qquad \text{(Limes inferior)}$$

Wenn die Folge (a_n) konvergiert, so stimmen Limes superior und Limes inferior mit dem Grenzwert der Folge überein (I.4.3). (Umgekehrt folgt aus der Übereinstimmung von $\liminf$ und $\limsup$ die Konvergenz der Folge). Lediglich für die Zwecke des folgenden Satzes definieren wir für eine Folge (a_n) nicht negativer reeller Zahlen

$$\operatorname{Lim\,sup}_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \limsup_{n\to\infty} a_n & \text{falls } (a_n) \text{ beschränkt,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem vereinbaren wir

$$\frac{1}{0} = \infty \text{ und } \frac{1}{\infty} = 0$$

Dann gilt:

4.4 Satz. *Der Konvergenzradius r der Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ergibt sich zu

$$r = \frac{1}{\operatorname{Lim\,sup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Beispiel. Der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

ist 1, denn es ist

$$\limsup \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Wir verzichten auf den Beweis von Satz 4.4, da man in der Praxis den Konvergenzradius auch durch 4.1 bestimmen kann.

Beispiel. Die Folge nx^n ist genau dann beschränkt, wenn $|x| < 1$ gilt. Daher ist $r = 1$.

5. Winkelfunktionen

An dieser Stelle ist es nützlich, *komplexe Zahlen* zur Verfügung zu haben, und wir wollen diese axiomatisch einführen. Einen Existenzbeweis geben wir nicht.

0) *Die komplexen Zahlen sind die Elemente einer Menge $\mathbb{C}$.*

1) *Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl, also*

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

2) *Auf $\mathbb{C}$ sind zwei Kompositionen definiert, eine* ***Addition*** *und eine* ***Multiplikation****, so daß gilt:*

   a) *Für reelle Zahlen ist dies die gewohnte Addition und Multiplikation reeller Zahlen.*

   Man bezeichnet daher die Addition wieder mit „+“ und die Multiplikation wieder mit „·“.

   b) *Für $\mathbb{C}$ sind die Körperaxiome erfüllt.*

3) *In $\mathbb{C}$ existiert ein Element* i *mit*

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$z = x + \mathrm{i}\, y, \;\; x, y \textit{reell.}$$

Man nennt x den ***Realteil*** *und y den Imaginärteil* ***Imaginärteil*** *von z*

$$x = \operatorname{Re} z, \;\; y = \operatorname{Im} z.$$

Man kann 3) auch so ausdrücken: Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \;\; (x, y) \mapsto x + \mathrm{i}\, y$$

ist bijektiv; jede komplexe Zahl entspricht also umkehrbar eindeutig einem Punkt der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Der Addition von komplexen Zahlen entspricht hierbei die vektorielle Addition

$$z + z' = (x + \mathrm{i}\, y) + (x' + \mathrm{i}\, y') = (x + x') + \mathrm{i}\,(y + y').$$

Etwas komplizierter ist das Multiplizieren und Invertieren geometrisch zu veranschaulichen. Es gilt

$$z \cdot z' = (x + \mathrm{i}\, y) \cdot (x' + \mathrm{i}\, y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}\,(xy' + x'y).$$

Nützlich für das Rechnen mit komplexen Zahlen ist der Übergang zum *konjugiert komplexen*

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y, \text{wenn } z = x + \mathrm{i}\, y.$$

Übungsaufgabe. Für alle komplexen Zahlen z, z' gilt

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \bar{z}'.$$

Offenbar ist eine komplexe Zahl dann und nur dann reell, wenn gilt

$$z = \bar{z}.$$

Wichtig ist auch die Bildung

$$z\bar{z} = x^2 + y^2.$$

Offenbar ist diese Zahl nie negativ und verschwindet dann und nur dann, wenn z verschwindet.

Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist durch

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

definiert. (In der Ebene ist das der *euklidische Abstand* vom Nullpunkt).
Es gelten die Rechenregeln:

$$|zz'| = |z||z'|, \qquad |z + z'| \le |z| + |z'| \quad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

Vereinbarung. Sei

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \dots$$

eine Folge komplexer Zahlen. Die Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

konvergiert, wenn die beiden Reihen

$$R = \operatorname{Re} a_1 + \operatorname{Re} a_2 + \operatorname{Re} a_3 + \cdots$$

$$S = \operatorname{Im} a_1 + \operatorname{Im} a_2 + \operatorname{Im} a_3 + \cdots$$

konvergieren und wir setzen in diesem Falle

$$R + \mathrm{i}\, S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Offenbar gilt immer

$$|\operatorname{Re} a| \le |a| \text{ und } |\operatorname{Im} a| \le |a|.$$

Hieraus folgt:

Sei

$$a_1,\, a_2,\, a_3, \dots$$

eine Folge komplexer Zahlen. Wenn die Reihe

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

konvergiert, dann konvergiert auch

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Wie im Reellen folgt also auch im Komplexen aus der absoluten Konvergenz die (einfache) Konvergenz.

Beispiele

1) Die Reihe

$$1 + z + z^2 + \dots$$

konvergiert für $|z| < 1$.

2) Die Exponentialreihe

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für beliebige komplexe z, denn es gilt

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!}$$

und die Konvergenz für reelle Zahlen haben wir bewiesen.

5.1 Satz. *Die Reihe*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert für beliebige komplexe z. Es gilt

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Es bleibt nur noch die *Funktionalgleichung*

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

zu beweisen. Diese folgt — wie im Reellen — aus dem CAUCHYschen Multiplikationssatz

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu+\mu=n} a_\nu b_\mu,$$

welcher für absolut konvergente Reihen gültig ist. Diesen Multiplikationssatz kann man wie im Reellen beweisen, man kann ihn aber auch aufs Reelle zurückführen:

Seien

$$a_n = a'_n + \mathrm{i}\, \tilde{a}_n \text{ und } b_n = b'_n + \mathrm{i}\, \tilde{b}_n$$

die Zerlegungen von a_n bzw. b_n in Real- und Imaginärteil. Es gilt

$$\Bigl(\sum a_n\Bigr)\Bigl(\sum b_n\Bigr) = \Bigl(\sum a'_n + \mathrm{i} \sum \tilde{a}_n\Bigr)\Bigl(\sum b'_n + \mathrm{i} \sum \tilde{b}_n\Bigr)$$
$$= \sum a'_n \sum b'_n - \sum \tilde{a}_n \sum \tilde{b}_n + \mathrm{i}\Bigl(\sum a'_n \sum \tilde{b}_n - \sum \tilde{a}_n \sum b'_n\Bigr).$$

Man wende nun viermal den *reellen* Multiplikationssatz an und erhält dann den gewünschten komplexen Multiplikationssatz, wenn man die Formel

$$a_\nu b_\mu = (a'_\nu b'_\mu - \tilde{a}_\nu \tilde{b}_\mu) + \mathrm{i}\,(a'_\nu \tilde{b}_\mu + \tilde{a}_\nu b'_\mu)$$

benutzt.

Schreibweise. $\quad \mathrm{e}^z = \exp(z)$.

Sei $z = x + \mathrm{i}\, y$ die Zerlegung von z in Real- und Imaginärteil. Aus der Funktionalgleichung folgt

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}.$$

Wir erhalten

$$\operatorname{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}) \text{ sowie } \operatorname{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}).$$

Wir bestimmen nun den Real- und Imaginärteil von

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \text{ für } y \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben wieder x anstelle von y, also untersuchen wir

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n x^n}{n!}.$$

Wir berechnen die ersten Potenzen von i:

$$\mathrm{i}^0 = 1,\ \mathrm{i}^1 = \mathrm{i},\ \mathrm{i}^2 = -1,\ \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i},\ \underline{\mathrm{i}^4 = 1},\ \mathrm{i}^5 = \mathrm{i},\ \ldots$$

Hieraus liest man ab (und beweist es durch vollständige Induktion):

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\mathrm{i}^n) &= 0, \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ \mathrm{Im}(\mathrm{i}^n) &= 0, \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n} x^{2n}}{(2n)!}, \\ \mathrm{i}\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\mathrm{i}^{2n} = (\mathrm{i}^2)^n = (-1)^n \text{ und } \mathrm{i}^{2n+1} = (\mathrm{i}^2)^n \cdot \mathrm{i} = (-1)^n \cdot \mathrm{i}.$$

Somit ergeben sich als endgültige Formeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \\ \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

und diese Reihen konvergieren für alle x.

5.2 Definition.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x := \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \textbf{\textit{(Cosinus),}} \\ \sin x := \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \textbf{\textit{(Sinus),}} \end{aligned}}$$

Es gilt also

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Die Funktionen cos und sin sind (auf $\mathbb{R}$) stetig (4.2)!
Wir schreiben nun die Bedingung

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

auf cos und sin um:

$$\cos(x+y) + i \sin(x+y) = [\cos x + i \sin x]\,[\cos y + i \sin y].$$

Durch Ausmultiplizieren und Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man die sogenannten *Additionstheoreme*

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}}$$

Auf den Additionstheoremen und den Reihenentwicklungen aufbauend wollen wir nun die üblichen Eigenschaften des Sinus und Cosinus ableiten; die bisherigen Überlegungen spielen dabei keine Rolle mehr, sie dienen nur zur Motivierung.
Setzt man im Additionstheorem $x = y$ und beachtet man noch

$$\cos(-x) = \cos x \text{ und } \sin(-x) = -\sin x,$$

so folgt

$$\cos^2 x + \sin^2 x = e^{ix}e^{i(-x)} = e^0 = 1.$$

Wir stellen nun die Eigenschaften zusammen, die wir benötigen, um die beiden Funktionen genauer zu untersuchen. Diese sind

a) Die Additionstheoreme

b) $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$.

c) $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$.

Außerdem benötigen wir noch eine Abschätzung:

d) $\cos 2 < 0$.

e) Es gibt eine positive Zahl $\delta > 0$, so daß

$$\sin x > 0 \text{ für } 0 < x < \delta.$$

Beweis von d) und e).
d) Es gilt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} + R$$

mit dem Restglied

$$R = -\frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} \mp \dots .$$

Wir schätzen dieses Restglied ab. Offenbar gilt

$$\frac{2^n}{n!} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für } n \ge 9$$

und daher

$$|R| \le \sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \le \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^9 .$$

Wir erhalten also

$$\cos 2 = -\frac{131}{315} + R < -\frac{1}{3} + |R| < 0,$$

denn das Restglied ist dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{3}$.
e) Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \mp \dots .$$

Hieraus folgt (Potenzreihen sind stetig!)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

und deshalb

$$\frac{\sin x}{x} > 0 \text{ für } |x| < \delta \qquad (\delta \text{ genügend klein}).$$

Für positive $x,\ 0 < x < \delta$, erhält man nun

$$\sin x > 0. \qquad \square$$

Behauptung. *Es gibt eine positive Zahl $x_0 > 0$, so daß gilt*

$$\cos x_0 = 0, \ \textit{aber} \ \ \cos x > 0 \textit{ für } 0 \le x < x_0.$$

Mit anderen Worten: x_0 ist die kleinste positive Nullstelle von cos.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz ist die Menge N aller positiven Nullstellen von cos nicht leer, denn

$$\cos 0 > 0 \text{ und } \cos 2 < 0.$$

Wir definieren

$$x_0 := \inf N.$$

Es ist klar, daß auch x_0 eine Nullstelle von cos ist (d.h. es gilt sogar $x_0 = \min N$). Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man zumindest eine Folge $a_n \in N$ konstruieren, die gegen x_0 konvergiert. Aus *Stetigkeitsgründen* gilt dann

$$\cos x_0 = \lim_{n\to\infty} \cos a_n = 0. \qquad \square$$

Bezeichnung.

$$\pi := 2x_0.$$

Wir wissen also

$$0 < \pi < 4$$

und

$$\cos x > 0 \text{ für } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Wir erhalten dann aus der Beziehung

$$\cos^2 + \sin^2 = 1,$$

daß

$$\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$$

sein muß. Wir müssen uns nun überlegen, daß tatsächlich das +-Zeichen gilt. Dazu benutzen wir das Additionstheorem

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\frac{\pi}{2}\sin(-x) = \pm\sin x.$$

Für kleine positive x $(0 < x < \delta)$ im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ ist sowohl $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ (wegen der Behauptung), als auch (wegen e)) $\sin x$ positiv. In obiger Gleichung muß also das +-Zeichen gelten.

Wir erhalten also

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Man beweist nun leicht

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+\pi) &= -\cos x\\ \cos(x+2\pi) &= \cos x\\ \sin(x+2\pi) &= \sin x\end{aligned}}$$

Die Funktionen cos und sin sind also *periodische Funktionen*, die durch die einfache Transformation

$$x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$$

ineinander übergeführt werden können. Wir zeigen noch, daß $\cos x$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fällt. Dazu benötigen wir folgende Formel, die leicht aus dem Additionstheorem abzuleiten ist (*Übungsaufgabe*!):

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y.$$

Hierin setzen wir

$$u := x + y \text{ und } v := x - y,$$

so daß wir erhalten

$$\cos v - \cos u = 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

Es sei nun

$$\frac{\pi}{2} > u > v \geq 0.$$

Dann ist

$$\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2} \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big].$$

Da mit x auch $\frac{\pi}{2} - x$ in diesem Intervall enthalten ist, ist dort also $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ positiv und wir erhalten

$$\cos v > \cos u,$$

und somit ist tatsächlich cos streng fallend.

Wir führen nun eine neue Funktion ein, den *Tangens*:

$$\tan : \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to \mathbb{R},\ \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Es gilt offenbar

$$\tan(-x) = -\tan(x),$$

also insbesondere

$$\tan 0 = 0.$$

Außerdem ist

$$\tan x > 0 \text{ für } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

tan ist offensichtlich streng monoton wachsend. Wir wollen zeigen, daß der Wertevorrat von tan die gesamte reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ ist. Nach dem Zwischenwertsatz genügt es zu zeigen, daß tan beliebig große Werte annimmt. das ist aber klar, denn es gilt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \text{ und } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

Wir können nun die Umkehrfunktion von tan, den sogenannten *Arcus-Tangens* einführen. Sein Definitionsbereich ist der Wertevorrat von tan.

$$\begin{gathered} \arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \arctan x = y \Longleftrightarrow y = \tan x. \end{gathered}$$

Der Wertevorrat von arctan ist $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Abschließend noch eine kritische Bemerkung zu den bisherigen Methoden.

Die Rolle von π konnte bisher noch nicht klar herausgearbeitet werden, insbesondere können π zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht „berechnen“. Weiterhin ist es mit den bisherigen Methoden kaum möglich, für arctan, ähnlich wie für sin oder cos, eine Reihenentwicklung anzugeben.

Durch Integral- und Differentialrechnung bekommen wir ein sehr wirksames Instrument in die Hand, Funktionen zu untersuchen.

Kapitel III. Differential- und Integralrechnung

1. Integralrechnung (Regelfunktionen)

Der Ausgangspunkt der *Integralrechnung* ist die Frage nach einer Fläche, die zwischen einer gegebenen Funktion —genauer ihrem *Graphen*— und der x-Achse liegt.

Ist also beispielsweise

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \text{ für } x \in [a, b]$$

gegeben, so soll

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

ein Maß für die Punktmenge

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

sein. Dabei sollen gewisse Eigenschaften erfüllt sein, die von der Anschauung her motiviert werden. Wir diskutieren nun diese Eigenschaften und gelangen dann zu einer strengen *Definition des Integrals*.

Natürlich soll, wenn die Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

konstant ist, also wenn

$$f(x) = c \text{ für alle } a \leq x \leq b$$

gilt, folgendes gelten:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) \cdot c.$$

Etwas allgemeiner als die konstanten Funktionen sind die *Treppenfunktionen*.

1.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt ***Treppenfunktion****, wenn es „Stützstellen“*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

gibt, so daß f in den offenen Intervallen

$$(a_\nu, a_{\nu+1}) \text{ für } 0 \le \nu < n$$

konstant ist.

In den Stützstellen selbst wird nichts gefordert; dort kann die Funktion beliebige Werte annehmen. Sie sind die einzigen möglichen *Unstetigkeitsstellen*. Allerdings ist auch zugelassen, daß überflüssige Stützstellen auftreten, d.h. die Funktion kann unter Umständen in einem Intervall

$$(a_\nu, a_{\nu+2})$$

konstant sein. Die Stützstelle $a_{\nu+1}$ wäre dann überflüssig.

1.2 Bemerkung. *Wenn*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion ist, so sind auch

$$cf \text{ für jedes } c \in \mathbb{R} \text{ und } |f|$$

Treppenfunktionen.

Die Stützstellen einer Treppenfunktion definieren eine sogenannte *Unterteilung*

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$. Eine weitere Unterteilung

$$a = a'_0 < a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_{n'} = b$$

heißt *Verfeinerung* der ersten, wenn jedes a_ν unter den a'_ν vorkommt, wenn also gilt

$$\{a_0, \ldots, a_n\} \subset \{a'_0, a'_1, \ldots, a'_{n'}\}.$$

Es ist evident, daß zu zwei Unterteilungen

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

und

$$a = a'_0 < a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_{n'} = b$$

stets eine *gemeinsame Verfeinerung*

$$a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 < \ldots < \tilde{a}_{\tilde{n}} = b$$

existiert.

Auf dieser einfachen Beobachtung beruht

1.3 Bemerkung. *Seien*
$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei Treppenfunktionen. Dann sind die Funktionen
$$f + g \text{ und } f \cdot g$$
auch Treppenfunktionen.

Wir führen nun das *Integral für Treppenfunktionen* ein:
Sei
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Treppenfunktion mit den Stützstellen
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$
Die Funktion ist also in den Intervallen $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ konstant und nimmt dort einen gewissen Wert c_ν an $(0 < \nu \le n)$. Es liegt nun nahe, das Integral für eine solche Treppenfunktion durch den Ausdruck
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1}) c_\nu$$
zu definieren.

Dabei ist allerdings eine gewisse Vorsicht am Platze. Da wir überflüssige Stützstellen zugelassen haben, ist es nicht von vorneherein klar (wenn auch evident), daß dieses Integral unabhängig von der Wahl der Stützstellen ist. Wir sprechen daher von *wesentlichen Stützstellen*, wenn sämtliche Stützstellen im Inneren von $[a, b]$ (d.h. $a_1, \ldots, a_{n-1}$) auch tatsächlich Unstetigkeitsstellen sind. Diese wesentlichen Stützstellen sind dann durch die Funktion f eindeutig bestimmt und die folgende „vorsichtige" Definition enthält keinerlei Zweideutigkeiten mehr:

Sei
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Treppenfunktion mit den wesentlichen Stützstellen
$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b.$$
Dann sei
$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1}) c_\nu.$$

Jetzt überlegt man sich jedoch nachträglich: Wenn

$$a = a'_0 < a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_{n'} = b$$

eine weitere Unterteilung ist, so daß f in den Intervallen $(a'_{\nu-1}, a'_\nu)$ einen konstanten Wert c'_ν annimmt, so gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu - a_{\nu-1})c_\nu = \sum_{\nu=1}^{n'} (a'_\nu - a'_{\nu-1})c'_\nu. \qquad (*)$$

Erst diese Tatsache (die natürlich sehr evident ist), rechtfertigt die ursprüngliche Definition des Integrals für Treppenfunktionen.

Wir wollen den *Beweis* für die Formel $(*)$ wenigstens skizzieren. Zunächst beachte man, daß die Unterteilung

$$a = a'_0 < a'_1 < a'_2 < \ldots < a'_{n'} = b$$

eine Verfeinerung von

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

ist, da in der letzteren nur die wesentlichen Stützstellen von f auftreten.

Mittels Induktion nach n kann man die Behauptung auf den Fall $n = 1$ reduzieren. Die Funktion f ist dann konstant in (a, b), der Wert sei c. Dann gilt

$$c'_1 = \ldots = c'_{n'} = c.$$

Die behauptete Formel lautet dann

$$(b - a)c = c \sum_{\nu=1}^{n'} (a'_\nu - a'_{\nu-1}). \qquad \square$$

Es erscheint nun naheliegend, das Integral für eine beliebige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch einen Grenzprozeß zu definieren, also eine Folge von Treppenfunktionen

$$f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots$$

zu konstruieren, die gegen f *punktweise* konvergiert und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

zu definieren.

Daß dies nicht so ohne weiteres möglich ist, zeigt folgendes *Beispiel*. Wir definieren eine Folge von Treppenfunktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ n & \text{für } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} \le x < 1. \end{cases}$$

Die wesentlichen Stützstellen sind

$$0 < \frac{1}{n} < 1.$$

In den Stützstellen selbst ist die Funktion Null. Es gilt

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1.$$

Andererseits konvergiert (f_n) punktweise gegen 0. Es gilt daher

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Schon bei Treppenfunktionen bekommt man also Schwierigkeiten bei der Vertauschung von Grenzübergängen!

Die Folge (f_n) des Beipiels konvergiert allerdings *nicht gleichmäßig* gegen f, so daß man immer noch hoffen kann, daß solche Pathologien nicht auftreten, wenn man sich auf *gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen* beschränkt. Erfreulicherweise ist dies tatsächlich der Fall und man hat einen weiteren Hinweis auf die große Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz.

Wir werden jetzt also versuchen, zu einem vernünftigen Integralbegriff zu gelangen, indem wir eine gegebene Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren. Dies ist allerdings nicht für alle Funktionen möglich, aber doch für eine ausreichend große Klasse von Funktionen und nur für solche definieren wir ein Integral.

1.4 Definition. *Eine Funktion*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt ***Regelfunktion****, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die ***gleichmäßig*** *gegen f konvergiert.*

Wir wollen nun

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

definieren. Dazu ist zweierlei zu beweisen:

1) Die Zahlfolge

$$\int_a^b f_n(x)\,dx$$

konvergiert überhaupt.

2) Wenn

$$g_1,\, g_2,\, g_3, \ldots : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine weitere Folge von Treppenfunktionen ist, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx.$$

1.5 Hilfssatz. *Sei*

$$f_1,\, f_2,\, f_3, \ldots : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig konvergente Folge von Treppenfunktionen. Dann konvergiert auch die Zahlfolge

$$\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Beweis. Wir benötigen die für Treppenfunktionen g und h trivialen Formeln

$$\int_a^b (g \pm h)(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx \pm \int_a^b h(x)\,dx.$$

sowie die (ebenfalls triviale) Abschätzung

$$\left|\int_a^b g(x)\,dx\right| \le \|g\|\,(b-a).$$

Wir zeigen nun die Konvergenz von

$$\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

mit Hilfe des CAUCHY-Kriteriums. Sei

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Es gilt die Abschätzung

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f_m(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]\,dx\right|$$
$$\le (b-a)\,\|f_n - f_m\| \le (b-a)\,(\|f_n - f\| + \|f - f_n\|) < 2(b-a)\varepsilon,$$

sofern nur $n, m > N(\varepsilon)$. □

1.6 Hilfssatz. *Seien*

$$(f_n), (g_n) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei gleichmäßig konvergente Folgen von Treppenfunktionen, die gegen die gemeinsame Grenzfunktion

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$$

konvergieren. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx.$$

Beweis. Die Folge

$$f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3, \ldots$$

konvergiert ebenfalls gleichmäßig gegen f. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz 1.5 konvergiert dann die Folge

$$\int_a^b f_1(x)\,dx,\ \int_a^b g_1(x)\,dx,\ \int_a^b f_2(x)\,dx,\ \int_a^b g_2(x)\,dx, \ldots$$

gegen einen gewissen Grenzwert a. Die beiden Teilfolgen

$$\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\int_a^b g_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

müssen dann gegen denselben Grenzwert a konvergieren. □

Die Hilfssätze 1.5 und 1.6 geben die Rechtfertigung für folgende

1.7 Definition. *Sei*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Regelfunktion. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

wobei (f_n) *irgendeine Folge von Treppenfunktionen ist, die gegen* f *gleichmäßig konvergiert.*

Wir untersuchen als nächstes die Permanenzeigenschaften des „Regelintegrals“ und widmen uns dann der Frage, wie umfangreich die Klasse der Regelfunktionen eigentlich ist.

1.8 Bemerkung. *Eine Regelfunktion ist stets beschränkt.*

Beweis. Da eine Treppenfunktion (trivialerweise) beschränkt ist, muß man sich lediglich klarmachen, daß ein gleichmäßiger Limes beschränkter Funktionen wieder beschränkt ist:

$$\begin{aligned} \|f - f_n\| < \varepsilon &\Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ für alle } x \\ &\Longrightarrow |f(x)| < |f_n(x)| + \varepsilon \leq \|f_n\| + \varepsilon. \end{aligned} \qquad \square$$

1.9 Bemerkung. *Seien*

$$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Regelfunktionen und $c \in \mathbb{R}$*. Dann sind auch*

$$f + g,\ \ f \cdot g,\ \ cf \ \ \textit{und}\ |f|$$

Regelfunktionen und es gilt

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b (cf)(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Sind (f_n) und (g_n) Folgen von Funktionen, die gleichmäßig gegen f und g konvergieren, so konvergieren die Folgen $(f_n + g_n)$ und $(f_n \cdot g_n)$ ebenfalls gleichmäßig und zwar

$$f_n + g_n \longrightarrow f + g \text{ und } f_n \cdot g_n \longrightarrow f \cdot g.$$

Der Beweis dieser Tatsache erfolgt wörtlich wie im analogen Fall gewöhnlicher Folgen. Man braucht nur $|\cdot|$ durch $\|\cdot\|$ zu ersetzen. $\square$

1.10 Hilfssatz. *Sei*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Regelfunktion und sei

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a,b].$$

Dann ist auch

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Folgerung. *Sind f und g Regelfunktionen auf $[a,b]$ und gilt*

$$f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a,b]$$

so folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis von Hilfssatz 1.10. Wir wählen eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Funktionen

$$|f_n| : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

sind offenbar ebenfalls Treppenfunktionen und konvergieren gleichmäßig gegen $|f| = f$. Für Treppenfunktionen ist der Hilfssatz aber trivial. Es gilt daher

$$\int_a^b |f_n(x)|\; dx \geq 0 \text{ für allen } \in \mathbb{N}$$

und deshalb auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)|\; dx = \int_a^b f(x)\,dx \geq 0. \qquad \square$$

1.11 Hilfssatz. *Seien $a < b < c$ und sei*

$$f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann gilt:

f ist genau dann eine Regelfunktion, wenn die Einschränkungen von f auf $[a,b]$ und $[b,c]$ Regelfunktionen sind. In diesem Fall ist

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Beweis. Man muß nur beachten, daß diese Formel für Treppenfunktionen trivial ist. □

In Anbetracht dieses Hilfssatzes erweist es sich als nützlich, folgende zusätzliche Definitionen zu treffen:

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \text{ für } a < b \text{ sowie } \int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

Man kann dann nämlich die Formel aus Hilfssatz 1.11 auch so schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0,$$

wobei man auf die Voraussetzung $a < b < c$ sogar verzichten kann.

Man sollte stets beachten, daß man eine Regelfunktion in endlich vielen Punkten beliebig abändern kann, ohne daß die Eigenschaft „Regelfunktion" zerstört wird und ohne daß der Wert des Integrals sich ändert.

Für Treppenfunktionen ist das klar und es folgt daher auch für beliebige Regelfunktionen.

Wir beweisen nun das wichtige

1.12 Theorem. *Sei f_1, f_2, $f_3, \dots$ eine Folge von Regelfunktionen auf $[a, b]$, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist auch f eine Regelfunktion und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Wenn die f_n Treppenfunktionen sind, so ist dies genau die Definition. Man drückt das Theorem manchmal auch einfach so aus:

Das Regelintegral ist stabil gegenüber gleichmäßiger Approximation.

Vor dem Beweis geben wir eine sehr einfache Charakterisierung von Regelfunktionen an. Dabei handelt es sich lediglich um eine Umformulierung der Definition.

Anmerkung. Eine Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist genau dann eine Regelfunktion, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

Beweis von 1.12. 1. Teil: Wir zeigen, daß f eine Regelfunktion ist. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung ist

$$\|f_n - f\| < \varepsilon,$$

falls n hinreichend groß ist. Wir halten ein solches n fest und wählen dann eine Treppenfunktion g, so daß

$$\|f_n - g\| < \varepsilon$$

gilt. Hieraus folgt dann

$$\|f - g\| = \|(f - f_n) + (f_n - g)\| \le \|f - f_n\| + \|f_n - g\| < 2\varepsilon.$$

Die Funktion f kann also durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximiert werden.

2. Teil. Es gilt für hinreichend große n:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx &= \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx \\ &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx < (b - a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \qquad \square$$

Nun, da wir gezeigt haben, daß das Regelintegral ein „vernünftiges“ Verhalten (wie von der Anschauung gefordert) zeigt, können wir untersuchen, welche Funktionen eigentlich Regelfunktionen sind.

1.13 Theorem. *Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.*

Hieraus folgt dann natürlich, daß eine Funktion bereits dann eine Regelfunktion ist, wenn es eine Einteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

gibt, so daß f nur in den offenen Intervallen $(a_\nu, a_{\nu+1})$ monoton ist (wegen 1.11).

Eine Funktion, die keine Regelfunktion ist, muß demnach wild oszillieren. Wir werden am Schluß dieses Paragraphen Beispiele für derart pathologische Funktionen geben.

Beweis von 1.13.

1. Teil. f sei monoton wachsend. Dann ist der Wertevorrat von f in dem Intervall $[f(a), f(b)]$ enthalten. Wir teilen dieses intervall in n gleiche Teile ein.

$$f(a) = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = f(b)$$
$$\text{mit } c_\nu := f(a) + \frac{\nu}{n}(f(b) - f(a)) \text{ für } 0 \leq \nu \leq n.$$

Außerdem setzen wir

$$\begin{aligned}&B_\nu := [c_{\nu-1}, c_\nu] \text{ für } 1 \leq \nu \leq n \text{ und}\\&A_\nu := f^{-1}(B_\nu) = \left\{\, x \in [a,b]; \quad c_{\nu-1} \leq f(x) \leq c_\nu \,\right\}.\end{aligned}$$

Aus der Monotonie von f folgert man leicht, daß A_ν ein (möglicherweise leeres) Intervall ist. Wir interessieren hierbei uns nur für die „echten“ Intervalle, also für solche, die mehr als einen Punkt enthalten. Diese bezeichnen wir mit

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \ldots, A_{\nu_k} \qquad\qquad (1 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_k \leq n).$$

Offenbar stoßen diese Intervalle aneinander an, d.h. es gibt eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a - 2 < \ldots < a_k = b,$$

so daß

$$(a_{j-1}, a_j) \subset A_{\nu_j} \subset [a_{j-1}, a_j] \qquad (1 \leq j \leq k)$$

gilt. Ob einer oder beide Randpunkte zu A_{ν_j} gehören oder nicht, kann man nicht sagen. Das ist von Funktion zu Funktion verschieden; es spielt jedoch für den Beweis auch keine Rolle.

Wir wählen nun noch irgendeinen Punkt

$$x_j \in (a_{j-1}, a_j),$$

(etwa den Mittelpunkt) und definieren nun

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x_j) & \text{füe } x \in (a_{j-1}, a_j) \quad (j = 1, \ldots, k) \\ f(a_j) & \text{für } x = a_j \quad (j = 0, 1, \ldots, k) \end{cases}$$

Dies ist eine Treppenfunktion. Wir schätzen $f(x) - f_n(x)$ ab. Nach Konstruktion ist das Bild eines Intervalls A_ν enthalten in einem Intervall der Länge

$$\frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

Hieraus folgt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{f(b) - f(a)}{n} \text{ für alle } x \in [a, b]$$

und daher

$$\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}(f(b) - f(a)).$$

Damit ist gezeigt, daß die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. $\square$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß jede *stetige* Funktion eine Regelfunktion ist. Als Vorbereitung dient *der Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit.*

Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, } D \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall.}$$

Zu jedem Punkt $a \in D$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann definitionsgemäß ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$x \in D, \ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Gemäß dieser Definition ist damit zu rechnen, daß δ sowohl von ε als auch von a abhängt. Man kann sich nun fragen, ob die Abhängigkeit von a tatsächlich besteht oder ob man nicht δ so wählen kann, daß es nur noch von ε abhängt.

Übungsaufgabe. Dies ist *nicht* möglich für die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad \text{auf} \quad D := \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}.$$

Umso bemerkenswerter ist:

1.14 Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit.
Sei $D = [a, b]$, $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf D. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für } |x - y| < \delta,\ x, y \in D.$$

Beweis (indirekt). Es existiere also ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß obige Aussage falsch ist. Dann findet man zu jedem $\delta > 0$ ein Punktepaar

$$x, y \in D,\ |x - y| < \delta \text{ aber } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Wir nutzen dies speziell aus für

$$\delta := \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

und finden so Folgen (x_n) und (y_n) in D mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0.$$

Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS existiert eine konvergente Teilfolge (x_{n_ν}) von x_n. Nochmalige Anwendung dieses Satzes ergibt die Existenz einer konvergenten Teilfolge von (y_{n_ν}).

Auf diesem Wege finden wir zwei *konvergente* Folgen —wir bezeichnen sie mit (a_n), (b_n)— in D mit

$$|a_n - b_n| \longrightarrow 0 \text{ aber } |f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon_0.$$

Da D ein abgeschlossenes Intervall ist, muß der gemeinsame Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

in D enthalten sein. Aus der Stetigkeit von f folgt dann

$$0 = |f(a) - f(a)| = \lim_{n\to\infty} |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

1.15 Theorem. *Jede stetige Funktion*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ a < b,$$

ist eine Regelfunktion.

Beweis. Wir unterteilen das Intervall $[a,b]$ in n gleiche Teile

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b, \quad a_\nu = a + \frac{\nu}{n}(b-a),$$

und definieren die Treppenfunktion $f_n(x)$ so, daß sie in $[a_{\nu-1}, a_\nu)$ den konstanten Wert $f(a_{\nu-1})$ annimmt. In dem Eckpunkt a_n soll sie den Wert $f(a_n)$ annehmen. Wir werden zeigen, daß (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Dazu benutzen wir den *Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit*:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle $x, y \in [a,b]$ gilt

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wir bestimmen nun (bei gegebenem $\varepsilon > 0$) die natürliche Zahl N so groß, daß gilt

$$\frac{b-a}{N} < \delta.$$

Für $n \geq N$ gilt dann

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(a_{\nu-1})| < \varepsilon \text{ für } x \in [a_{\nu-1}, a_\nu),$$

denn in diesem Intervall gilt ja $|x - a_{\nu-1}| < \delta$. Wir erhalten

$$\|f - f_n\| \leq \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$ □

Funktionen, die keine Regelfunktionen sind.

Die Konstruktion der folgenden Beispiele beruht auf folgendem

1.16 Kriterium. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (a < b)$$

eine Regelfunktion und sei $x_0 \in [a, b]$ *ein beliebiger Punkt. Dann existieren die einseitigen Grenzwerte*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad (\textit{falls } x_0 \neq b) \textit{ und } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad (\textit{falls } x_0 \neq a).$$

(Schränkt man die Funktion f auf $[a, x_0]$ ein und setzt man

$$f_1 = f|[a, x_0],$$

so ist definitionsgemäß

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x).$$

Man darf also x_0 nur von links her approximieren. Analog definiert man

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) \text{ mit } f_2 = f|[x_0, b].)$$

Beweis des Kriteriums. Für Treppenfunktionen ist es klar; man beachte dann II.3.6. □

Tatsächlich ist dieses Kriterium auch hinreichend dafür, daß f eine Regelfunktion ist (siehe Dieudonné, Foundations of Analysis).

1. Beispiel. (Dirichlet)

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \text{ rational} \\ 1 & \text{für } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Hier existieren die einseitigen Grenzwerte nicht ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$!), die Funktion f ist daher keine Regelfunktion.

2. Beispiel.

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig mit Ausnahme im Nullpunkt; sie läßt sich aber nicht in endlich viele Monotoniestücke einteilen und ist in der Tat auch keine Regelfunktion. Man überlegt sich nämlich leicht, daß

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$$

nicht existiert*).

Berechnung einiger Integrale.

Sei α eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^\alpha$$

auf einem Intervall $[a, b],\ 0 < a < b$. Wir versuchen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

mittels einer geschickte Approximation durch Treppenfunktionen zu berechnen. Man wählt hierbei zweckmäßigerweise eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b,$$

so daß die Quotienten

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \qquad (1 \le \nu \le n)$$

konstant (etwa $= q$) sind. Man ermittelt hierzu

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} > 1$$

und setzt

$$a_\nu = a \cdot q^\nu \text{ für } 0 \le \nu \le n.$$

Wir betrachten nun die Treppenfunktionen

$$f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} f(a_{\nu-1}) & \text{für } x \in [a_{\nu-1}, a_\nu) \quad (1 \le \nu \le n), \\ f(b) & \text{für } x = b. \end{cases}$$

*) Diese Funktion ist allerdings noch integrierbar im Riemannschen Sinne Dies wird manchmal als Nachteil des Regelintegrals empfunden. Es ist jedoch kein echter Nachteil, da das Integral auch im Rahmen des Regelintegrals als uneigentliches Integral existiert.

Offenbar konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_n(x)\,dx &= \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu - a_{\nu-1})f(a_{\nu-1}) = \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu - a_{\nu-1})a_{\nu-1}^{\alpha} \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} a(q^\nu - q^{\nu-1})a^\alpha q^{\alpha(\nu-1)} = \sum_{\nu=1}^{n} a^{\alpha+1}(q-1)q^{(\nu-1)(\alpha+1)} \\
&\overset{(*)}{=} a^{\alpha+1}(q-1)\frac{q^{n(\alpha+1)}-1}{q^{\alpha+1}-1} \qquad \text{(geometrische Summe)} \\
&= a^{\alpha+1}\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha+1} - 1\right) \qquad \text{(beachte } q^n = \tfrac{b}{a}\text{)} \\
&= (b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der mit $(*)$ bezeichneten Gleichung $\alpha \neq -1$ vorausgesetzt, so daß also die Formel auch nur für $\alpha \neq -1$ Gültigkeit besitzt.
Setzt man jetzt voraus, daß α sogar eine *natürliche Zahl* ist, so gilt

$$\frac{q-1}{q^{\alpha+1}-1} = \frac{1}{1+q+q^2+\ldots+q^\alpha}.$$

Wir nehmen nun den Grenzübergang $n \to \infty$ vor. Wie wir wissen geht dann

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \longrightarrow 1.$$

Hieraus folgt

$$\int_a^b x^\alpha\,dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{N}.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion

$$\sin : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und versuchen

$$\int_a^b \sin x\,dx \qquad (a < b)$$

zu berechnen. Wir legen eine *äquidistante Teilung* in n Intervalle der Länge

$$\Delta := \frac{b-a}{n}$$

und den Teilpunkten

$$a_\nu = a + \nu\Delta \text{ für } 0 \le \nu \le n$$

zugrunde und versuchen, $f(x) = \sin x$ durch eine Folge von Treppenfunktionen (f_n) zu approximieren.

Dazu definieren wir

$$f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) := \begin{cases} \sin a_{\nu-1} & \text{für } a_{\nu-1} \le x < a_\nu \ (1 \le \nu < n) \\ \sin b & \text{für } x = a_n = b. \end{cases}$$

Offensichtlich konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen $f = \sin$.

Wir erhalten weiterhin

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \Delta \sum_{n=1}^{n} \sin a_{\nu-1} = \Delta \sum_{n=1}^{n} \sin(a + (\nu-1)\Delta).$$

Die rechte Seite schreiben wir in der Form

$$\frac{\Delta}{2\sin\frac{\Delta}{2}} \sum_{\nu=1}^{n} 2\sin\frac{\Delta}{2}\sin(a + (\nu-1)\Delta).$$

Auf den unter dem Summenzeichen stehenden Ausdruck wenden wir die folgende sich leicht aus den Additionstheoremen ergebende Formel an:

$$2\sin\alpha\sin\beta = [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

Unter Beachtung von

$$a + \Big(n - \frac{1}{2}\Big)\Delta = b - \frac{\delta}{2}$$

folgt dann durch Addition (sogenannte *Teleskopsumme*)

$$\frac{\Delta}{2\sin\frac{\Delta}{2}} \sum_{\nu=1}^{n} 2\sin\frac{\Delta}{2}\sin(a + (\nu-1)\Delta) = \frac{\Delta}{2\sin\frac{\Delta}{2}}\Big[\cos\Big(a - \frac{\Delta}{2}\Big) - \cos\Big(b - \frac{\Delta}{2}\Big)\Big].$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt dann, wenn man noch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$$

beachtet, daß gilt

$$\int_a^b \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \cos a - \cos b.$$

Jetzt berechnen wir das Integral von sin noch mit einer völlig anderen Methode und benutzen hierbei 1.12, d.h. die Stabilität des Regelintegrals gegenüber gleichmäßiger Konvergenz.

Diesen Satz formulieren wir zunächst auf Reihen um. Gegeben sei also eine Reihe

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$

von Regelfunktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, die gleichmäßig gegen F konvergiere, also

$$F_n \longrightarrow F \text{ glm. mit } F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Nach 1.12 gilt dann

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b f_1(x)\,dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\,dx \right].$$

(Nach 1.9 darf man Integration mit endlicher Summation vertauschen!) Man erhält also

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Man darf also auch „unendliche“ Summation mit Integration vertauschen, sofern gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Sei beispielsweise eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit dem Konvergenzradius r gegeben. Seien weiterhin $a < b$ zwei reelle Zahlen, welche in $(-r, r)$ enthalten seien. Dann gilt (man vergleiche das obige Beispiel!)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Wendet man dies auf die Sinusreihe an, so erhält man einen neuen Beweis für die Formel

$$\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.$$

Integration bei variabler oberer Grenze.

Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ a < b$$

eine Regelfunktion. Sei $x \in [a, b]$. Dann ist auch die Einschränkung von f auf $[a, x]$ eine Regelfunktion. Das Integral dieser eingeschränkten Funktion bezeichnen wir mit

$$\int\limits_a^x f(t)\, dt.$$

Dann überlegt man sich leicht den folgenden

1.17 Hilfssatz. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Regelfunktion. Die Funktion

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ F(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$$

ist stetig.

Uneigentliche Integrale.

Es sei $D = [a, b)$ ein (nicht leeres) *halboffenes* Intervall und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion auf D, die in b nicht definiert zu sein braucht. Man kann dann versuchen, ein Integral

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx$$

durch einen Grenzübergang zu definieren

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b} \int\limits_a^x f(t)\, dt \qquad (t \in [a, b)).$$

Wir wollen dabei den Fall $b = \infty$ nicht ausschließen und müssen daher kurz den Grenzprozeß $\lim_{t \to \infty}$, der bisher für Funktionen noch nicht behandelt wurde, erläutern.

1.18 Definition. *Sei D ein nach oben unbeschränktes Intervall (also eine rechte Halbgerade) und*

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine Funktion. Sei b eine Zahl. Wir sagen, der **Grenzwert von** $F(x)$ **für** $x \to \infty$ **existiert und ist gleich** b*

$$\big(\lim_{x\to\infty} F(x) = b\big),$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine (hinreichend große) Zahl C gibt, so daß gilt

$$|F(x) - b| < \varepsilon \textit{ für } x > C.$$

Diese scheinbare Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffs für Funktionen subsumiert sich dem alten:

Betrachtet man auf dem Intervall

$$D_0 := \Big\{\, x > 0;\ \frac{1}{x} \in D \,\Big\}$$

die Funktion

$$G : D_0 \longrightarrow \mathbb{R},\ G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right),$$

so gilt offensichtlich

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} G(x) = b.$$

Insbesondere gelten für den soeben eingeführten Grenzwertbegriff die üblichen Rechenregeln. Es erübrigt sich, sie einzeln aufzuzählen oder gar zu beweisen.

Wenn der Definitionsbereich D ein *nach unten unbeschränktes* Intervall ist, so kann man in entsprechender Weise einen Grenzübergang $x \to -\infty$ vornehmen.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = b \Longleftrightarrow |F(x) - b| < \varepsilon \text{ für } x < -C$$

mit einem hinreichend großen $C = C(\varepsilon)$.

Kehren wir nun wieder zu unserem Integrationsproblem zurück.

1.19 Definition. *Sei*

$$f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die folgenden Bedingungen genügt:

a) *Die Einschränkung von f auf jedes abgeschlossene Teilintervall von $[a, b)$ ist eine Regelfunktion.*

b) *Der Grenzwert*

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt \qquad (x \in [a,b))$$

existiert.

Dann definiert man das ***uneigentliche Integral***

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt \qquad (x \in [a,b)).$$

Es ist nützlich zu wissen, daß das gewöhnliche Regelintegral als Spezialfall des uneigentlichen Integrals aufgefaßt werden kann. Ist nämlich

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Regelfunktion, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\, dt \qquad (x \in [a,b)).$$

Dies folgt aus 1.17.

Wenn eine Funktion f auf einem Intervall $(a,b]$ definiert ist, das links offen ist, so definiert man in völliger Analogie zu oben das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\, dt \qquad (x \in [a,b)).$$

Die Voraussetzung für die Existenz dieses uneigentlichen Integrals sind

a) $f|[x,b]$ ist Regelfunktion für alle $x \in (a,b]$.
b) Obiger Grenzwert existiert.

Interessant ist auch der Fall, das daß Integral nach beiden Seiten uneigentlich ist, d.h. f ist eine Funktion auf einem offenen Intervall $(a,b) \neq \emptyset$. Man geht dann einfach so vor:

Man wählt eine beliebige Stützstelle $\xi \in (a,b)$ und definiert

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x \to a} \int_x^\xi f(t)\, dt + \lim_{x' \to b} \int_\xi^{x'} f(t)\, dt,$$

d.h. man führt die zweiseitige uneigentliche Integration auf die einseitige uneigentliche Integration zurück. Zu fordern ist, daß die beiden uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren. Dies hängt *nicht* von der Wahl von ξ ab.

Absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale

1.20 Definition. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem (nicht notwendig abgeschlossenen) Intervall heißt absolut integrierbar, falls ihre Einschränkung auf jedes abgeschlossen Teilintervall eine Regelfunktion ist und falls $|f|$ uneigentlich integrierbar ist.*

Wie im Fall unendlicher Reihen gilt:

1.21 Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem nicht notwendig abgeschlossenen Intervall, deren Einschränkung auf jedes abgeschlossene Intervall eine Regelfunktion ist. Genau dann ist f absolut integrierbar, wenn es eine gemeinsame obere Schranke für die Integrale*

$$\int_a^b |f(x)|\,dx, \ \ a < b, \ \ a, b \in D,$$

gibt.

Beweis. Wenn die Funktion f nirgends negativ ist, so ist dies leicht zu beweisen. Das uneigentliche Integral ist dann gleich

$$\sup\left\{\int_a^b f(x)\,dx; \quad a < b, \ \ a, b \in D\right\}.$$

Allgemein betrachten wir die Zerlegung

$$f_+ := \frac{1}{2}(|f| + f) \text{ sowie } f_- := \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Diese Funktionen sind nirgends negativ und es gilt

$$f = f_+ - f_-. \qquad \square$$

Eine einfache Anwendung ist folgendes Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale:

1.22 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ D = (a, b), \ \ a < b,$$

eine Funktion, deren Einschränkung auf ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall von D Regelfunktion sei. Weiterhin existiere eine uneigentlich integrierbare Funktion

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft

$$|f(x)| \le g(x) \text{ für alle } x \in D.$$

Dann ist auch f uneigentlich integrierbar.

Beispiel.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ auf } D := (0, \infty).$$

Übungsaufgabe.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

ist konvergent, aber das Integral konvergiert nicht absolut.

Beispiele für uneigentliche Integrale.

Wir versuchen, das uneigentliche Integral

$$\int_1^x t^\alpha \, dt$$

für beliebige reelle x zu berechnen.

Dabei benutzen wir die folgende Formel, die wir bisher nur für ganze $\alpha \geq 0$ bewiesen haben, die wir aber noch für beliebige reelle α beweisen werden (mit den Methoden der Differentialrechnung).

$$\int_a^b x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq -1 \\ \log b - \log a & \text{für } \alpha = -1 \end{cases}$$

(dabei sei $0 < a < b$). Wir erhalten insbesondere

$$\int_1^x t^\alpha \, dt = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} & \text{für } \alpha \neq -1 \\ \log x & \text{für } \alpha = -1. \end{cases}$$

Wir wollen einen Grenzübergang $x \to \infty$ vornehmen. Dazu müssen diese Integralfunktionen überhaupt beschränkt sein. Der Grenzwert existiert daher im Falle $\alpha = -1$ nicht und im Falle $\alpha \neq -1$ nur dann, wenn $\alpha + 1 < 0$ gilt. Wir erhalten in diesem Falle

$$\boxed{\int_1^\infty x^\alpha \, dx = -\frac{1}{\alpha+1}, \text{ falls } \alpha + 1 < 0.}$$

Beispielsweise ist

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Ebenso erhält man (vgl. oben)

$$\boxed{\int_0^1 x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1}, \text{ falls } \alpha + 1 > 0,}$$

beispielsweise

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Anwendung uneigentlicher Integrale auf Konvergenzuntersuchungen unendlicher Reihen.

Es gibt zwei wichtige Verfahren, die Konvergenz von unendlichen Reihen zu untersuchen:

1) das *Majorantenkriterium*, speziell mit der geometrischen Reihe.
Damit konnten wir zum Beispiel die Potenzreihen in den Griff bekommen.

2) *Vergleich unendlicher Reihen mit uneigentlichen Integralen.*

Diese 2. Methode erläutern wir an dem Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Dabei sei s eine beliebige reele Zahl.

Behauptung. Die obige Reihe konvergiert für $s > 1$. Sie konvergiert nicht für $s \le 1$.

Beweis. Man kann die Partialsummen dieser Reihe auffassen als Integrale über eine gewisse Treppenfunktion

$$f(x) = n^{-s} \text{ für } n \le x < n+1.$$

Dabei ist f in $[1, \infty)$ definiert. Genauer gilt

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-s} = \int_1^{N+1} f(x) \, dx.$$

Man hat offenbar die Abschätzung

$$(x-1)^{-s} \ge f(x) \ge x^{-s} \text{ für alle } x \ge 2.$$

(Wir setzen stets $s > 0$ voraus, für $s \leq 0$ konvergiert die Reihe natürlich nicht.) Es folgt dann

$$\int_2^{N+1} (x-1)^{-s}\,dx \geq \int_2^{N+1} f(x)\,dx \geq \int_2^{N+1} x^{-s}\,dx.$$

Offenbar gilt

$$\int_2^{N+1} (x-1)^{-s}\,dx = \int_1^{N} x^{-s}\,dx \leq \int_1^{N+1} x^{-s}\,dx,$$

d.h. wir erhalten

$$\int_1^{N} x^{-s}\,dx \geq \sum_2^N n^{-s} \geq \int_2^{N+1} x^{-s}\,dx.$$

Der Wert dieser Integrale ist

$$\begin{array}{cccc} \log N & \text{und} & \log(N+1) - \log 2 & \text{im Falle } s = 1 \\ \frac{N^{-s+1}-1}{-s+1} & \text{und} & \frac{(N+1)^{-s+1}-2^{-s+1}}{-s+1} & \text{im Falle } s \neq 1 \end{array}$$

Wie man weiß, konvergiert die Reihe $\sum n^{-s}$ genau dann (alle Glieder sind positiv), wenn die Folge der Partialsummen beschränkt bleibt. Nach obiger Abschätzung ist das genau dann der Fall, wenn $-s+1 < 0$ ist, also wenn $s > 1$.

Wir wollen jetzt die Funktion

$$\zeta(s) ;= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad \textit{(Riemannsche } \zeta\textit{-Funktion)},$$

welche nun für $s > 1$ definiert ist, in der Nähe von $s = 1$ genauer untersuchen. Aus unseren Abschätzungen kann man nämlich leicht folgern:

$$\lim_{s \to 1^+} (s-1)\zeta(s) = 1.$$

Ein ziemlich schwer zu beweisendes Resultat von Riemann besagt:

Die Funktion

$$(s-1)\zeta(s)$$

besitzt eine Entwicklung in eine Potenzreihe

$$1 + C_1 s + C_2 s^2 + \dots$$

welche in ganz $\mathbb{C}$ *konvergiert.*

Die berühmte Riemannsche Vermutung besagt, daß diese Funktion für alle komplexen s *mit* $\operatorname{Re} s > 1/2$ *von Null verschieden ist.*

(Bekannt ist, daß unendlich verschieden Nullstellen mit $\operatorname{Re} s = 1/2$ existieren und daß keine Nullstelle für $\operatorname{Re} s \geq 1$ vorliegt.)

Die Sätze für absolut konvergente Integrale ähneln denen über absolut konvergente Reihen. Dies ist kein Zufall, denn es gilt offensichtlich:

Eine unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann absolut, wenn die Funktion*

$$f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a_n \text{ für } n \leq x < n+1$$

absolut integrierbar ist.

Aus 1.22 ergibt sich:

1.23 Integralvergleichskriterium.
Sei $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ *eine unendliche Reihe von Zahlen. Es existiere eine Funktion*

$$f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) \geq 0 \text{ für alle } x$$

auf einer rechten Halbgeraden, so daß das uneigentliche Integral

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx$$

existiert. Wenn

$$|a_n| \leq f(x) \text{ für } n \leq x < n+1$$

mit Ausnahme von höchstens endlich vielen natürlichen Zahlen n *gilt, so konvergiert die gegebene Reihe absolut.*

Umgekehrt konvergiert die Reihe $\sum a_n$ ***nicht*** *absolut, wenn eine Funktion*

$$f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \; f(x) \geq 0 \text{ für alle } x$$

existiert, so daß gilt

a) $$|a_n| \geq f(x) \text{ für } n \leq x < n+1$$

(endlich viele Ausnahmen sind zugelassen).

b) $f(x)$ *ist eine Regelfunktion in* $[a, t]$ *(*$t > a$ *beliebig), aber*

$$\int_a^t f(x)\,dx$$

ist nicht beschränkt für $t \to \infty$*, d.h. das uneigentliche Integral*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

existiert nicht.

2. Grundlegende Rechenregeln der Differentialrechnung

Die *Differentialrechnung* entstand aus dem Problem, die *Steigung* einer Funktion zu messen.

Sei f eine Funktion auf dem Definitionsbereich D und $x_0 \in D$ ein Punkt in D. Ist x ein weiterer Punkt in D, so kann die Steigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

der Sekante als eine Näherung für die Steigung der Kurve in x_0 betrachtet werden. Es ist nun naheliegend, den Punkt x in den Punkt x_0 hineinlaufen zu lassen, also einen Grenzübergang $x \to x_0$ zu versuchen.

Im folgenden setzen wir von allen Intervallen voraus, —ohne es immer ausdrücklich neu zu sagen— daß sie *nicht ausgeartet* sind, daß sie also mehr als einen Punkt enthalten.

2.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall},$$

heißt in einem Punkt $x_0 \in D$ ***ableitbar (differenzierbar)****, wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man nennt diesen Grenzwert dann die ***Ableitung von f an der Stelle*** *x_0.*

Ist f in jedem Punkt von D ableitbar, so heißt f ***ableitbar (differenzierbar) schlechthin****. Die Ableitung f' kann dann wieder als Funktion*

$$f' : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

betrachtet werden.

Schreibweise*.*

$$\frac{df}{dx} = f'.$$

Anmerkung. Der sogenannte *Differenzenquotient*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

kann als Funktion aufgefaßt werden, die auf $D - \{x_0\}$ definiert ist.

Eine wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen ist, daß sie stets stetig sind.

2.2 Hilfssatz. *Die Funktion f sei differenzierbar in x_0. Dann ist f auch stetig in x_0.*

Beweis. Es gilt

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für } x \in D - \{x_0\}.$$

Vollzieht man dann den Grenzübergang $x \to x_0$, so erhält man

$$f(x) - f(x_0) \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow x_0. \qquad \square$$

Wir untersuchen nun die grundlegenden Rechenregeln der Differentialrechnung.

2.3 Bemerkung. *Seien f, g zwei Funktionen, die in einem Punkt x_0 des Definitionsbereiches ableitbar seien. Dann sind auch die Funktionen*

$$f + g, \; cf \qquad (c \in \mathbb{R})$$

ableitbar in x_0 und es gilt

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$

Der *Beweis* dieser Bemerkung ist trivial. $\square$

Etwas komplizierter ist das Verhalten der Ableitung beim Multiplizieren und Dividieren von Funktionen.

2.4 Satz. *Seien f, g zwei Funktionen, die in einem Punkt $x_0 \in D$ ableitbar seien. Dann sind auch die Funktionen*

$$f \cdot g, \ \frac{f}{g} \ \textit{(unter der Voraussetzung } g(x) \neq 0 \textit{ für alle } x \in D\textit{)}$$

ableitbar in x_0 und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$$

und gegebenenfalls

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beweis. 1) Zum Beweis der *Produktregel* bilden wir den Differenzenquotienten für die Funktion $f \cdot g$:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}.$$

Eine kleine Umformung ergibt

$$f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Hierin kann man den Grenzübergang $x \to x_0$ vollziehen und erhält die Behauptung.

2) Mit einer ähnlichen Umformung beweist man die *Quotientenregel*:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x_0) - g(x)f(x_0)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right]. \quad \square\end{aligned}$$

Wir betrachten nun einige *Beispiele*.

1) $f(x) = c$ (konstante Funktion).
Der Differenzenquotient ist identisch 0 und wir erhalten

$$f'(x) = 0.$$

2) $f(x) = x$.
Der Differenzenquotient ist identisch 1; es folgt

$$f'(x) = 1.$$

3) $f(x) = x^n$.
Sei zunächst n eine *natürliche* Zahl. Dann zeigen wir folgende

Behauptung. $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis durch Induktion nach n.
1. Induktionsbeginn: Das ist gerade das zweite Beispiel.
2. Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Nach der Produktregel und der Induktionsvoraussetzung gilt

$$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = x \cdot (n-1)x^{n-2} + 1 \cdot x^{n-1} = nx^{n-1}. \qquad \square$$

Unter Zuhilfenahme der Quotientenregel sehen wir, daß die Formel

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

sogar für beliebige *ganze* n gilt.

Wir werden noch sehen, daß dies auch für beliebige reelle n richtig ist, können es aber momentan noch nicht beweisen. Allerdings können wir mit Hilfe unserer bisherigen Rechenregeln bereits *Polynome*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ableiten und ebenso *rationale Funktionen*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad P, Q \text{ Polynome},$$

also Quotienten von Polynomen.

4) Als weiteres Beispiel behandeln wir die Exponentialfunktion. Es liegt nahe, von der *Reihenentwicklung*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

auszugehen und die Ableitung von $\exp(x)$ *gliedweise* auszuführen:

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).\end{aligned}$$

Das gliedweise Ableiten bedarf jedoch einer Rechtfertigung. Wir werden zwar noch zeigen, daß man Potenzreihen gliedweise ableiten darf, haben dies aber zur Zeit noch nicht zur Verfügung. Wir gehen daher anders vor und rechnen direkt mit dem Differenzenquotienten

$$\frac{\exp(x) - \exp(x_0)}{x - x_0} = \exp(x_0)\frac{\exp(\delta) - 1}{\delta} \text{ mit } \delta := x - x_0.$$

Nun ist

$$\frac{\exp(\delta) - 1}{\delta} = 1 + \frac{\delta}{2!} + \frac{\delta}{3!} + \dots .$$

Der Grenzübergang $\delta \to 0$ liefert

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\exp(\delta) - 1}{\delta} = 1.$$

Hierbei ist zu beachten, daß Potenzreihen stetig sind und man den Grenzübergang daher gliedweise vollziehen durfte.

Damit ergibt sich nun tatsächlich:
Die Exponentialfunktion ist (überall) ableitbar und es gilt

$$\boxed{(\exp(x))' = \exp(x).}$$

Wir wollen nun den Logarithmus ableiten und dabei ausnutzen, daß der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Dazu dient der folgende

2.5 Satz (Kettenregel).
Seien

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ und } g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen auf den Intervallen D und D'. Es gelte $f(D) \subset D'$, so daß man die Funktionen zusammensetzen kann

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Die Funktion f sei in einem Punkt $x_0 \in D$ und die Funktion g in $f(x_0)$ ableitbar. Dann ist auch $g \circ f$ im Punkt x_0 ableitbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Wir bilden den Differenzenquotienten

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Strebt nun $x \to x_0$, so geht $f(x) \to f(x_0)$ und daher geht obiger Ausdruck gegen

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dieser Beweis ist insofern nicht exakt, als ja $f(x) - f(x_0)$ verschwinden könnte und dann die vorgenommene Umformung gar nicht erlaubt wäre. Man muß daher etwas anders argumentieren

Wir betrachten die Funktion

$$\Delta(y) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \text{ mit } y_0 = f(x_0).$$

Diese ist für $y \in D' - \{y_0\}$ definiert, aber noch in y_0 stetig fortsetzbar, wenn man

$$\Delta(y_0) = g'(y_0)$$

setzt. Es gilt

$$\Delta(y)(y - y_0) = g(y) - g(y_0)$$

auch im Falle $y = y_0$ (auf beiden Seiten steht dann Null). Ersetzt man y durch $f(x)$, so resultiert

$$\Delta(f(x))(f(x) - f(x_0)) = g(f(x)) - g(f(x_0)).$$

Nach Division durch $x - x_0$ erhält man

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Delta(f(x)).$$

Vollzieht man nun den Grenzübergang $x \to x_0$, so folgt die Behauptung. Wegen der Stetigkeit von Δ gilt nämlich

$$\lim_{x \to x_0} \Delta(f(x_0)) = g'(f(x_0).) \qquad \square$$

Wir wollen nun die Kettenregel einmal in dem Spezialfall anwenden, daß g die *Umkehrfunktion* von f ist, d.h. D' ist der Wertevorrat von f und es gilt

$$y = f(x) \Longleftrightarrow g(y) = x.$$

Aus der Gleichung

$$g(f(x)) = x$$

Folgt mittels der Kettenregel

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1,$$

also ist $f'(x)$ von Null verschieden, und es gilt

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Man hat damit eine Formel gefunden, um die Ableitung der Umkehrfunktion zu finden.

Beispiel.

$$f(x) = \log x, \; g(x) = \exp(x).$$

Man erhält

$$g'(f(x)) = \exp(\log x) = x$$

und daher

$$\frac{1}{(\log x)'} = x \text{ bzw. } (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

Man muß allerdings noch nachweisen, daß log überhaupt ableitbar ist, denn das müssen wir ja wissen, um die Kettenregel anwenden zu können.

Man wird sich generell fragen, ob die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion f^{-1} aus der Ableitbarkeit von f folgt.

2.6 Satz für umkehrbare Funktionen.
Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \; (D \text{ ein Intervall})$$

eine streng monotone Funktion, deren Ableitung existiert und überall von Null verschieden ist. Dann ist auch die Umkehrfunktion g ableitbar und es gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

für alle x aus dem Wertevorrat von f (= Definitionsbereich von g.)

Beweis. Sei $y_0 = f(x_0)$ ein beliebiger Punkt aus dem Wertevorrat von f. Wir bilden den Differenzenquotienten

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, \; y = f(x) \neq y_0.$$

Dieser ist gleich

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Wenn y gegen y_0 strebt, so konvergiert x gegen x_0 (die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist stetig) und daher

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

Die Voraussetzung, daß die Ableitung von f von Null verschieden ist, ist tatsächlich notwendig.

Beispiel.

$$f(x) = x^3.$$

Diese Funktion ist streng monoton und ableitbar; die Ableitung im Nullpunkt ist Null. Die Umkehrfunktion

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

ist aber im Nullpunkt nicht ableitbar. (Sie hat dort eine senkrechte Tangente.)

Wir weisen abschließend darauf hin, daß die Formel

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}}$$

nun voll bewiesen ist.

Als weiteres *Beispiel* leiten wir die Funktion

$$f(x) = x^\alpha \qquad \text{(Definitionsbereich: } x > 0)$$

für beliebige reelle α ab. Es gilt

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$$

und somit nach der Kettenregel

$$(x^\alpha)' = \exp(\alpha \log x) \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

eine Formel, die wir für ganze α schon bewiesen haben.

Kurvendiskussion mit Hilfe der Differentialrechnung.

Man sagt: Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall},$$

besitzt in $a \in D$ ein *lokales Maximum*, wenn es eine ε-Umgebung $U = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$ genügend klein) gibt, so daß gilt

$$f(x) \leq f(a) \text{ für alle } x \in U \cap D.$$

Entsprechend definiert man den Begriff des *lokalen Minimums*.

Die lokalen Maxima und Minima der Funktion f nennt man auch ihre *lokalen Extrempunkte*.

2.7 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall}$$

eine Funktion, welche in dem Punkt $a \in D$ ableitbar ist. Der Punkt a sei ***kein Randpunkt*** *von D. Wenn a ein lokaler Extrempunkt von f ist, so gilt*

$$f'(a) = 0.$$

Beweis. Wir nehmen an, daß f in a ein lokales Maximum besitzt. Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x > a \\ \geq 0 & \text{für } x < a \end{cases}$$

Der Grenzwert für $x \to a$ muß daher Null sein.

Beispiel für eine Kurvendiskussion.

$$f(x) = x^x \qquad (x > 0).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\exp(x \log x))' \\ &= \exp(x \log x)(x \log x)' = x^x(1 + \log x). \end{aligned}$$

Die Ableitung ist genau dann Null, wenn gilt

$$x = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Für $x < 1/\mathrm{e}$ ist die Ableitung negativ, für $x > 1/\mathrm{e}$ positiv. Die Funktion wächst also streng monoton für $x > 1/\mathrm{e}$ und fällt streng monoton für $x < 1/\mathrm{e}$. Die Funktion nimmt also in $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ ihr absolutes Minimum an, und dieses hat den Wert $(\frac{1}{\mathrm{e}})^{(\frac{1}{\mathrm{e}})}$. Für $x \to \infty$ wächst x^x natürlich über alle Grenzen. Unklar ist allerdings noch das Verhalten für $x \to 0$. Für $x \to 0$ konvergiert $x \log x \to 0$ (wie wir gleich zeigen werden), also gilt

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1.$$

Einige wichtige Grenzwerte.

1) Sei a eine reelle Zahl. Es ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Also: *Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz von x.*

Beweis. Als Übungsaufgabe.

2) Wir folgern aus 1), daß der *Logarithmus für $x \to \infty$ schwächer als jede Potenz von x wächst*. Sei $a > 0$. Dann gilt

$$\frac{\log x}{x^a} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow \infty.$$

Beweis. Es genügt $\log x \leq x^{\frac{a}{2}}$ für hinreichend große x zu beweisen oder, wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion:

$$x \leq \exp(x^{\frac{a}{2}}).$$

Diese Ungleichung folgt leicht aus 1). □

3) Benutzt man

$$\log \frac{1}{x} = -\log x,$$

so erhält man aus 2) für jedes $a > 0$

$$x^a \log x \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow 0 \qquad (x > 0),$$

insbesondere also

$$x \log x \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow 0.$$

3. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es sei zunächst an den *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen erinnert.

Eine stetige Funktion f auf einem Intervall, die die Werte y_1 und y_2 annimmt, nimmt auch jeden Wert zwischen y_1 und y_2 an.

Ein ähnliches Prinzip gilt in der Differentialrechnung:

3.1 Theorem (Satz von Rolle).
Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \ a < b,$$

eine stetige Funktion, die im Inneren (a, b) ableitbar ist. Dann existiert ein Punkt

$$\xi \textit{ mit } a < \xi < b,$$

so daß die Ableitung von f an der Stelle ξ mit der Steigung der Sekanten durch

$$A = (a, f(a)) \textit{ und } B = (b, f(b))$$

übereinstimmt, d.h.

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis.
1. Teil. Reduktion auf den Fall $f(a) = f(b) = 0$.
Man betrachte hierfür die Differenz der Funktion f und der Geraden durch A und B, d.h. die Funktion

$$F(x) := f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right].$$

Es gilt offenbar

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Hat man dann eine Stelle $\xi \in (a, b)$ gefunden mit der Eigenschaft

$$F'(\xi) = 0,$$

so ist man fertig, denn es gilt ja

$$f'(x) = F'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. Teil. Es sei nun

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Es ist eine Zwischenstelle ξ mit $f'(\xi) = 0$ zu konstruieren. Dabei kann man annehmen, daß f nicht identisch Null ist (sonst kann man jede Zwischenstelle nehmen). Wir können sogar annehmen, daß das Maximum von f positiv ist (sonst ersetzt man einfach f durch $-f$). Dieses Maximum wird an einer Zwischenstelle

$$\xi \in (a, b)$$

angenommen (die Randpunkte scheiden aus, da f dort verschwindet). Dann muß aber in diesem Punkt ξ die Ableitung verschwinden (nach 2.7). □

Eine Anwendung des Satzes von ROLLE ist die

3.2 Bemerkung. *Sei f eine differenzierbare Funktion, definiert auf einem Intervall D und sei*

$$f'(x) = 0 \text{ für alle} x \in D.$$

Dann ist die Funktion f konstant.

Beweis. Seien $a < b$ zwei beliebige Punkte im Definitionsbereich. Nach dem Satz von ROLLE existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) = 0.$$

Daraus folgt aber

$$f(a) = f(b).$$

□

3.3 Folgerung. *Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen auf einem Intervall. Wenn die Ableitungen von f und g übereinstimmen, so unterscheidet sich f von g höchstens um eine additive Konstante*

$$f = g + \mathit{const.}$$

Eine Anwendung von 3.3.
Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall, so daß gilt

$$f' = f.$$

(Dies ist ein einfaches Beispiel für eine *gewöhnliche Differentialgleichung*.) Es existiert dann eine Konstante C mit der Eigenschaft

$$f(x) = C \exp(x).$$

Beweis. Aus der Quotientenregel folgt, daß die Ableitung der Funktion

$$\frac{f(x)}{\exp(x)} = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{\exp(2x)}$$

identisch verschwindet. □

Es gibt eine Verallgemeinerung des Satzes von Rolle, die interessante Anwendungen hat.

3.4 Verallgemeinerter Satz von Rolle.
Seien f und g zwei stetige Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, die im Inneren (a, b) differenzierbar sind. Es existiert dann eine Zwischenstelle

$$\xi \text{ mit } a < \xi < b,$$

an der gilt

$$f'(\xi) = g'(\xi)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dabei ist $g(a) \neq g(b)$ vorauszusetzen.

(Im Fall $g(x) = x$ ist dies offenbar genau der gewöhnliche Satz von Rolle.)
Beweis (analog zum Satz von Rolle).
Man muß die Funktion

$$F(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))\right]$$

benutzen. □

Eine Anwendung des verallgemeinerten Satzes von Rolle:

3.5 Theorem (Regel von Bernoulli-de L'Hospital).
Es seien f und g zwei Funktionen auf einem Intervall D und $a \in D$ ein Punkt von D. Die Funktionen f und g seien zumindest in allen Punkten $x \in D,\ x \neq a$ differenzierbar. Außerdem sei

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Die Ableitung g' habe keine Nullstelle für $x \neq a$. Der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

möge existieren. Dann existiert auch der Grenzwert von

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{für } x \longrightarrow a$$

und es gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Aus dem Satz von Rolle folgt zunächst, daß $g(x) \neq 0$ ist für alle $x \neq a$. (Zwischen jedem $x \neq a$ und a existiert nämlich eine Zwischenstelle ξ mit

$$\frac{g(x)}{x - a} = g'(\xi) \neq 0.)$$

Nach dem verallgemeinerten Satz von Rolle existiert zwischen jedem $x \neq a$ und x eine Stelle ξ mit der Eigenschaft

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Die Stelle ξ hängt natürlich von x ab; wir schreiben daher

$$\xi = \xi(x).$$

Es gilt

$$\lim_{x \to a} \xi(x) = a$$

und infolgedessen

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Die übliche Rechenregel

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

kann man nicht anwenden, weil $g(a) = 0$ ist.

Möglicherweise ist aber g' stetig in ganz D und $g'(a) \neq 0$. dann besagt die Regel von Bernoulli-de L'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Man kann außerdem dieses Prinzip wiederholt anwenden, d.h. wenn die Voraussetzungen von 3.5 auch für die Funktionen f' ung g' anstelle von f und g erfüllt sind, so folgt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

und entsprechend mit höheren Ableitungen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß es auch analoge Rechenregeln gibt, wenn $f(x)$ und $g(x)$ über alle Grenzen wachsen wenn $x \to a$ strebt.

4. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir untersuchen folgendes Problem:

Gegeben sei eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall.}$$

Gesucht ist eine sogenannte *Stammfunktion* $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Das ist definitionsgemäß eine *differenzierbare* Funktion mit Ableitung f:

$$F' = f.$$

Wir wissen bereits, daß die Funktion F, so sie denn überhaupt existiert, bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

In dieser Allgemeinheit ist das Problem jedoch sehr kompliziert. Es kann nämlich eintreten, daß f eine Stammfunktion besitzt ohne stetig zu sein.

Das Problem wird einfacher, wenn man sich auf stetige Funktionen f beschränkt. Eine solche hat nämlich immer eine Stammfunktion.

Als Vorbereitung hierzu beweisen wir

4.1 Hilfssatz (Mittelwertsatz der Integralrechnung).
Sei f eine stetige Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ $(a < b)$. Es gibt eine Zwischenstelle

$$\xi \text{ mit } a \leq \xi \leq b,$$

so daß gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi).$$

Beweis. Sei M der größte und m der kleinste Wert, den f in $[a,b]$ annimmt. Dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Daher liegt

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

zwischen m und M. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen wird auch jeder Wert zwischen m und M als Funktionswert $f(\xi)$ angenommen.

□

4.2 Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \textit{(D ein Intervall)}$$

eine stetige Funktion und $a \in D$ ein beliebiger Punkt. Die Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in D)$$

ist eine Stammfunktion von f.

Beweis. Wir bilden den Differenzenquotienten an irgendeiner Stelle $x_0 \in D$:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt

$$\int_{x_0}^x f(t)\,dt = (x-x_0)f(\xi),$$

wobei $\xi = \xi(x)$ zwischen x_0 und x liegt. Daraus folgt

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(\xi).$$

Strebt x gegen x_0, so konvergiert ξ ebenfalls gegen x_0 und daher (aufgrund der Stetigkeit von f) $f(\xi)$ gegen $f(x_0)$. Also ist

$$F'(x_0) = f(x_0).$$ □

4.3 Folgerung. *Sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall D mit stetiger Ableitung f'. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \qquad (a, b \in D).$$

Beweis. Wir wissen, daß

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion von f' ist. Da f ebenfalls eine Stammfunktion ist, muß gelten

$$F(x) = f(x) + C.$$

Setzt man speziell $x = a$ ein, so folgt

$$0 = f(a) = f(a) + C \Longrightarrow C = -f(a).$$

Setzt man nun $x = b$ ein, so erhält man

$$F(b) = \int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a). \qquad \square$$

Aus der Produktregel

$$(uv)' = u'v + uv'$$

der Differentiation und der Kettenregel ergeben sich in Verbindung mit dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung folgende Regeln für Integration:

1. *Partielle Integration.*

Seien

$$u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ a < b,$$

stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = uv|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Hierbei verwenden wir die Bezeichnung

$$f|_a^b := f(b) - f(a).$$

2. *Substitutionsregel.*

Gegeben seien

a) eine stetige Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (D \text{ ein Intervall})$$

b) eine stetig differenzierbare Funktion

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ a > b,$$

so daß gilt

$$g([a,b]) \subset D.$$

Dann ist

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$g(x) := F(g(x))$$

eine Stammfunktion von $f(g(x))g'(x)$ und die Behauptung folgt aus 4.3.

□

Die *Leibnizschen Schreibweise*

$$y = g(x),\ dy = g'(x)\,dx.$$

macht die Substitutionsregel besonders suggestiv.

Wir fassen nun die wichtigsten Funktionen, die wir ableiten können, in einer Tabelle zusammen.

$f(x)$	$f'(x)$	Definitionsbereich
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$
		$\mathbb{R}_+$ für $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$
$\exp x$	$\exp x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Die Ableitungen von sin und cos erhält man über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, nachdem wir die Integrale dieser Funktionen ja bereits kennen. Es bleibt daher nur noch $\arctan x$ zu diskutieren. Dieser ist die Umkehrfunktion von

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Es gilt

$$(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Nach dem Satz für implizite Funktionen folgt

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2},$$

denn es ist

$$\tan(\arctan x) = x.$$

„Pathologische" Beispiele differenzierbarer Funktionen.

1) Eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } x \le 1, \\ x - \frac{1}{2} & \text{für } x \ge 1. \end{cases}$$

Der einzig kritische Punkt ist $x = 1$; dort ist f sicher stetig, denn sowohl $\frac{1}{2}x^2$, als auch $x - \frac{1}{2}$ haben dort den Wert $\frac{1}{2}$. Aber man hat auch „differenzierbaren Anschluß", denn die beiden Funktionen haben dort auch dieselbe Steigung, nämlich 1. Die Ableitung von f ist offenbar

$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \le 1, \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Diese ist zwar stetig, aber in 1 nicht differenzierbar.

2) Eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung nicht stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad (\text{auf } D = \mathbb{R}).$$

Der einzig kritische Punkt ist $x = 0$. Dort ist die Funktion tatsächlich ableitbar:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\frac{1}{x} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow 0.$$

Es ist also $f'(0) = 0$.

Eine einfache Rechnung zeigt

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0.$$

Der Grenzwert von $f'(x)$ für $x \to 0$ existiert nicht. Zwar ist

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$

aber $\cos\frac{1}{x}$ hat keinen Grenzwert für $x \to 0$.

3) Weierstrass hat ein Beispiel einer Funktion angegeben, die zwar stetig, aber in keinem einzigen Punkt differenzierbar ist.

4) Die „typischen“ Stellen, in denen eine stetige Funktion f nicht differenzierbar ist, sind die *Knickstellen*. Das sind definitionsgemäß Stellen x_0, wo zwar die einseitigen Ableitungen

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ sowie } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existieren, aber voneinander verschieden sind. Es gibt aber auch stetige Funktionen, wo nicht einmal die einseitigen Grenzwerte existieren, wie zum Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig (auch in $x = 0$!), aber der Differenzenquotient in 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

hat dort nicht einmal einseitige Grenzwerte.

5. Verträglichkeit der Differentiation mit Grenzprozessen

Es sei eine konvergente Folge (f_n) von differenzierbaren Funktionen gegeben.

Problem. Unter welchen Voraussetzungen ist

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

auch differenzierbar? Zusätzlich hätte man natürlich auch gerne

$$f' = \lim_{n \to \infty} f_n'.$$

Analoge Fragestellungen traten bereits bei der Untersucheng von stetigen und integrierbaren Funktionen auf. Damals war die *gleichmäßige Konvergenz* eine hinreichende Bedingung dafür, daß die betreffende Eigenschaft (Stetigkeit bzw. Integrierbarkeit) bei dem Grenzübergang erhalten blieb.

Man könnte vermuten, daß dies bei der Differenzierbarkeit genauso ist. Leider ist dies jedoch nicht der Fall.

Skizze eines Gegenbeispiels.

Sei

$$f(x) = |x| \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Die Funktion ist zwar stetig, aber in 0 nicht differenzierbar.

Wir definieren nun

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{für } |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind sichtlich differenzierbar. Die einzigen kritischen Punkte sind $\frac{1}{n}$ und $-\frac{1}{n}$ und dort haben sowohl $|x|$ als auch $\frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}$ die Steigungen 1 bzw. -1.

Offenbar konvergiert f_n gleichmäsig gegen f, denn es ist

$$\|f - f_n\| \leq \frac{1}{2n}.$$

Noch drastischer zeigt folgender Satz (*Weierstraßscher Approximationssatz*), daß die Differenzierbarkeit im allgemeinen nicht stabil gegenüber gleichmäßiger Approximation ist.

Jede stetige Funktion f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ kann durch eine Folge von Polynomen P_n gleichmäßig approximiert werden.

(Wir werden diesen Satz später beweisen.)

Es idt daher nicht weiter verwunderlich, daß die Konvergenzbedingungen, unter denen die Differenzierbarkeit erhalten bleibt, nicht ganz einfach aussehen.

Man kommt dennoch sehr einfach zu brauchbaren Resultaten, wenn man sich daran erinnert, daß Differentiation und Integration verquickt sind, und zwar erhalten wir folgendes

5.1 Theorem. *Gegeben sei eine Folge (f_n) von differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall D. Wir machen folgende Voraussetzungen:*

a) *Die Folge $f_n(a)$ konvergiert in wenigstens einem Punkt $a \in D$.*
b) *Die Funktionen f'_n sind stetig.*
c) *Die Folge f'_n konvergiert gleichmäßig.*

Dann konvergiert auch die Folge (f_n) gegen eine differenzierbare Funktion f und es gilt

$$f' = \lim_{n \to \infty} f'_n.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f_n(x) = \int_a^x f'_n(t)\, dt + f_n(a).$$

Nun weiß man, daß die Folge (f_n') gleichmäßig konvergiert (Voraussetzung c)). Da aber Integration mit gleichmäßiger Konvergenz vertauschbar ist, folgt, daß $f_n(x)$ für alle $x \in D$ konvergiert. Setzt man

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

so gilt außerdem

$$f(x) = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt + C \text{ mit } C = \lim_{n\to\infty} f_n(a).$$

Die Funktion unter dem Integral ist stetig (Stetigkeit ist stabil gegenüber gleichmäßiger Konvergenz!). Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist daher f differenzierbar und es gilt

$$f' = \lim_{n\to\infty} f_n'. \qquad \square$$

Zusatz zu 5.1. *Ist D ein endliches Intervall, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.*

Die für uns wichtigste Anwendung dieses Theorems ist

5.2 Folgerung. *Eine Potenzreihe*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

stellt im Innern des Konvergenzintervalls $(-r, r)$ (wir setzen $r > 0$ voraus) eine differenzierbare Funktion dar und es gilt

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots.$$

*d.h. wie bei Polynomen ist **gliedweise Differentiation** erlaubt.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die abgeleitete Potenzreihe den gleichen Konvergenzradius wie die Ausgangsreihe hat. Dann kann man nämlich 5.1 auf

$$p_n(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ auf } D = [-\rho, \rho] \text{ mit } 0 < \rho < r$$

anwenden.

Die Konvergenzradien der Ausgangsreihe bzw. der abgeleiteten Reihe sind

$$\begin{aligned} r &= \sup\{\, C > 0; \quad (|a_n|\, C^n) \text{ beschränkt} \,\} \\ r' &= \sup\{\, C > 0; \quad (|a_n|\, n\, C^n) \text{ beschränkt} \,\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar
$$r' \le r.$$
Wir zeigen nun $r' \ge r$. d.h.
$$(|a_n|\, n\, C^n) \text{ ist beschränkt für jedes } C < r.$$
Wir wählen hierzu ein $\tilde{C}$ mit
$$C < \tilde{C} < r \qquad (\text{etwa } \tilde{C} = (C + r)/2).$$
Es ist dann $(|a_n|\, \tilde{C}^n)$ beschränkt und daher auch
$$|a_n|\, n\, C^n = |a_n|\, \tilde{C}^n \cdot n \left(\frac{C}{\tilde{C}}\right)^n,$$
denn offenbar ist
$$n \left(\frac{C}{\tilde{C}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{n}\, \frac{C}{\tilde{C}}\right)^n$$
eine Nullfolge. Man beachte hierzu, daß $\sqrt[n]{n}$ gegen 1 konvergiert und daß $\frac{C}{\tilde{C}}$ zwischen 0 und 1 liegt. Es gilt somit
$$\sqrt[n]{n}\, \frac{C}{\tilde{C}} < \delta < 1$$
bis auf endlich viele Ausnahmen n, wobei δ irgend eine feste Zahl zwischen $C/\tilde{C}$ und 1 bezeichne. Die Folge (δ^n) konvergiert aber bekanntlich gegen Null. □

Eine Anwendung. Wir erhalten einen neuen Beweis für die *Differentialgleichung* der Exponentialfunktion
$$(\exp x)' = \exp x.$$
Es ist interessant, diesen Beweis (gliedweise Ableitung der Reihe) zu vergleichen mit dem alten Beweis (der wesentlich vom *Additionstheorem*
$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b$$
Gebrauch machte.)

Man kann nämlich umgekehrt das Additionstheorem wieder aus der Differentialgleichung ableiten. Man betrachte hierzu die Funktion
$$\frac{\exp(x + a)}{\exp x}$$
bei festem, aber beliebigem a und leite diese nach der Quotientenregel ab
$$\left(\frac{\exp(x + a)}{\exp x}\right)' = 0 \Longrightarrow \frac{\exp(x + a)}{\exp x} = C = \text{const.}$$
Setzt man speziell $x = 0$ ein, so folgt
$$C = \exp a.$$
Man erhält also
$$\exp(x + a) = \exp x \cdot \exp a.$$
Da a beliebig war, ist das Additionstheorem bewiesen.

6. Die Taylorsche Formel

Gegeben sei eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \text{ ein Intervall},$$

und ein Punkt $a \in D$.

Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Potenzreihe, welche in einem Intervall $(a - r, a + r)$ $(r > 0)$ von a konvergiert und die Funktion f darstellt?

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots \text{ für } x \in D \cap (a - r, a + r).$$

Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzintervalls differenzierbar, die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation. $f(x)$ ist also insbesondere differenzierbar, und man kann die zweite, dritte,... usw. Ableitung von f bilden.

Sprechweise. Die Funktion f heißt n-mal differenzierbar, falls man f n-mal hintereinander ableiten kann.

Bezeichnung.

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f && \text{(0-te Ableitung)} \\ f^{(1)} &= f' && \text{(1-te Ableitung)} \\ &\cdots \\ f^{(n)} &= (f^{(n-1)})' && (n\text{-te Ableitung}) \end{aligned}$$

Ist die n-te Ableitung noch stetig, so heißt f *n-mal stetig differenzierbar*.

Übungsaufgabe. Sind f und g zwei auf dem Intervall D n-mal (stetig) differenzierbare Funktionen, so gilt die *Leibnizsche Regel*:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)} g^{(n-\nu)}.$$

6.1 Bemerkung. *Sei*

$$f : (a - r, a + r) \longrightarrow \mathbb{R},\ r > 0,$$

eine Funktion, welche sich in eine konvergente Potenzreihe entwickeln läßt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \text{ für } |x - a| < r.$$

Dann gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots .$$

Folgerung (Identitätssatz für Potenzreihen).
Wenn die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \ \textit{und} \ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

in einer r-Umgebung $(a-r, a+r)$ $(r>0)$ von a konvergieren und dort dieselbe Funktion darstellen, so gilt

$$a_n = b_n \ \textit{für alle } n.$$

Bezeichnung. Sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall, } a \in D,$$

eine (mindestens) n-mal differenzierbare Funktion. Dann nennt man

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$$

das *Restglied (n-ter Ordnung)* von f an der Stelle a.

Problem. Die Funktion f sei beliebig oft differenzierbar. Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \ ?$$

6.2 Theorem (Taylorsche Formel mit Integralrestglied).
Gegeben sie eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \ \textit{ein Intervall,}$$

und ein Punkt $a \in D$. Die Funktion f sei $(n+1)$-mal stetig ableitbar. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + R_n(x),$$

wobei R_n die folgende Darstellung besitzt:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Dabei ist auch $x < a$ zugelassen.

Beweis. Induktion nach n.

Induktionsanfang. Für $n = 0$ lautet die Formel

$$f(x) = f(a) + R_0(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Diese ist nach dem Hauptsatz der Differential- Integralrechnung richtig.

Induktionsschritt. Durch partielle Integration beweist man

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = (x-a)^n \cdot \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Damit ist die TAYLORsche Formel bereits bewiesen. □

Die Funktion f ist in einer r-Umgebung von a dann und nur dann in eine Potenzreihe entwickelbar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \text{ für } x \in D,\ |x-a| < r,$$

wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \text{ für } x \in D,\ |x-a| < r.$$

Man nennt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

auch die *Taylorreihe* von f in a.

Für konkrete Rechnungen ist folgende triviale Abschätzung des Restgliedes in der TAYLORschen Formel nützlich:

$$|R_n(x)| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{n!} \max |f^{(n+1)}(t)|,$$

wobei t zwischen a und x variiere.

Beispiele für Taylorreihen.

Die Funktionen $\exp x,\ \sin x,\ \cos x$ wurden durch ihre TAYLORreihen (um $a = 0$) definiert.

Die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ für } |x| < 1.$$

Wir wollen die Funktion

$$(1+x)^\alpha,\ x > -1,$$

für beliebige reelle α um den Nullpunkt entwickeln. Die n-te Ableitung dieser Funktion ist

$$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Wir definieren für beliebiges reelles α und natürliche n

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} \text{ sowie } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Die TAYLORreihe um $x=0$ von $(1+x)^\alpha$ lautet dann

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Für welche x konvergiert diese Reihe und stellt die gegebene Funktion dar?
Ist x nicht negativ, so gilt

$$|R_{n-1}(x)| \le |x|^n \cdot \left|n\binom{\alpha}{n}\right| \cdot M \text{ mit } M := \max_{0\le t\le x}|1+t|^{\alpha-n}.$$

Wir wählen n so groß, daß

$$\alpha - n < 0$$

gilt. Dann ist $M=1$ und wir erhalten

$$|R_{n-1}(x)| \le x^n \cdot \left|n\binom{\alpha}{n}\right|.$$

Übungsaufgabe. Sei $|x|<1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x^n \cdot n\binom{\alpha}{n} = 0 \text{ für } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Wir erhalten somit

$$R_n(x) \longrightarrow 0 \text{ für } n\longrightarrow\infty,\ 0\le x<1.$$

Dies ist auch im Falle $-1<x\le 0$ richtig. Die Abschätzung von $R_n(x)$ ist jedoch etwas komplizierter. Wir verzichten auf die Durchführung und geben stattdessen einen anderen Beweis für die Gültigkeit der Formel

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \text{ für } |x|<1.}$$

Die Potenzreihe auf der rechten Seite — wir bezeichnen sie mit $P(x)$ — konvergiert für $|x| < 1$. (Dies kann man direkt, etwa mit Hilfe des Quotientenkriteriums, beweisen; es folgt jedoch auch aus der Tatsache, daß das Restglied $R_n(x)$ für $0 \le x < 1$ gegen 0 konvergiert.)

Durch gliedweises Ableiten von $P(x)$ beweist man

$$P'(x) = \alpha \frac{P(x)}{1+x}$$

und folgert daraus

$$\left(\frac{P(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = 0,$$

also

$$P(x) = c \cdot (1+x)^\alpha \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Vergleicht man beide Seiten für $x = 0$, so folgt $c = 1$.

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, die TAYLORreihe nicht durch Ableiten der Funktion, sondern durch Rückführung auf bekannte Funktionen zu bestimmen.

Ersetzt man in der geometrischen Reihe x durch $-x^2$, so ergibt sich

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots .}$$

Der Konvergenzradius auf der rechten Seite ist 1. Auf der linken Seite steht jedoch eine Funktion, welche auf der vollen reellen Geraden definiert und beliebig oft differenzierbar ist!

5) Durch Integration der Reihenentwicklungen für $1/(1-x)$ und $1/(1+x^2)$ erhält man

$$\boxed{\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1).}$$

Kapitel IV. Einige spezielle Funktionen

1. Fouriersche Reihen

Bei der sogenannten *Fourieranalyse* von Schwingungsvorgängen wird man auf folgendes Problem geführt:

Gegeben sei eine *Superposition* von elementaren Sinus- und Cosinus-Schwingungen, d.h. eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich in der Form

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + (a_1 \sin x + b_1 \cos x) + \ldots + (a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

mit gewissen Konstanten a_ν, b_ν schreiben läßt.

Problem. Sind die Konstanten a_ν, b_ν eindeutig bestimmt und wie berechnen sie sich gegebenenfalls aus der Funktion $f(x)$?

Charakteristisch für die Funktion $f(x)$ ist offenbar die *Periodizität*

$$f(x) = f(x + 2n\pi) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Man kann daher noch allgemeiner fragen: Gegeben sei eine periodische Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x + 2n\pi) = f(x) \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Läßt sich f in eine Reihe

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

entwickeln und wie berechnen sich gegebenenfalls die Koeffizienten a_ν, b_ν?

Die Erfahrung zeigt, daß Berechnungen, in denen Sinus- und Cosinus-Funktionen auftreten, häufig einfacher werden, wenn man mit der komplexen Exponentialfunktion arbeitet. Diese ist definiert durch

$$\exp(\mathrm{i}x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

das liegt daran, daß das komplizierte Additionstheorem für Kosinus und Sinus einfach die Gestalt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$$

annimmt, wovon sich der Leser an dieser Stelle noch einmal überzeugen möge.

Insbesondere gilt
$$e^{inx} = e^{i(n-1)x} \cdot e^{ix}.$$

Durch vollständige Induktion nach n beweist man leicht
$$e^{inx} = (e^{ix})^n$$

für natürliche Zahlen n und dann auch für ganze Zahlen n, wobei man die Rechenregel
$$e^{-ix} = (e^{ix})^{-1}$$

berücksichtigt.

(Wie im Reellen definiert man a^n für $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{C}$ durch
$$\begin{aligned}
a^0 &:= 1, \\
a^n &:= \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n-\text{mal}} && \text{für natürliche } n, \\
a^n &:= (a^{-n})^{-1} && \text{für negative ganze } n \quad (a \neq 0).
\end{aligned}$$

Nicht definiert ist i.a. a^n für beliebige reelle oder gar komplexe n.)

Es gilt offenbar
$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Die Funktion e^{ix} ist also periodisch:
$$e^{i(x+2n\pi)} = e^{ix} \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Wir stellen nun zunächst das Problem etwas anders. Gegeben sei eine Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f(x + 2n\pi) = f(x) \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Existiert dann eine Entwicklung
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu x}$$

und wie berechnen sich die Koeffizienten?

Wir lassen also auch komplexwertige Funktionen zu, was einfach naheliegend ist, weil ja auch e^{inx} komplexwertig ist. Am Ende dieses Paragraphen werden wir aus diesen *komplexen Fourierreihen* die oben erwähnten reellen Sinus- und Kosinus-Reihen zurückgewinnen.

Zunächst jedoch ist einiges zur Konvergenz etc. für komplexe Funktionen und Reihen zu sagen (Komplexe Zahlen wurden Kapitel II, §5 eingeführt):

Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ \ D \text{ ein Intervall},$$

ist definitionsgemäß genau dann stetig, wenn

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re} f : D \longrightarrow \mathbb{R} & \quad (\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x)) \\ \operatorname{Im} f : D \longrightarrow \mathbb{R} & \quad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}(f(x)) \end{array}$$

stetige Funktionen sind.

Entsprechend definieren wir für eine Funktion $f : D - \{a\} \to \mathbb{C}$ oder $f : D \to \mathbb{C}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} b \text{ und } \lim_{x \to a} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} b.$$

und für Folgen

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \text{ und } \lim_{n \to \infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z.$$

Offenbar sind diese Definitionen gleichwertig mit

$$\lim_{x \to a} |f(x) - b| = 0 \text{ bzw. } \lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0.$$

Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \text{ ein Intervall},$$

heißt *ableitbar* in einem Punkt $a \in D$, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ ableitbar sind und man definiert dann

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + (\operatorname{Im} f)'(a).$$

Insbesondere ist damit auch klar, was eine Stammfunktion einer komplexwertigen Funktion ist.

Beispiel.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

ist ableitbar in allen Punkten und man erhält

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

Entsprechend wird der Begriff der *Integrierbarkeit* auf den Fall reeller Funktionen zurückgeführt.

Eine Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (a < b)$$

heißt *(komplexe) Regelfunktion*, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Regelfunktionen sind und man definiert dann

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b (\operatorname{Re} f)(x)\,dx + \mathrm{i} \int_a^b (\operatorname{Im} f)(x)\,dx.$$

Diese Definitionen sind so gebaut, daß die aus dem Reellen bekannten Rechenregeln auch im Komplexen Gültigkeit haben. Wir werden das im folgenden nicht in jedem einzelnen Fall erwähnen und verifizieren, sondern wollen nur einen Fall als Beispiel behandeln.

Die Produktregel.

Seien

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}, \quad D \text{ ein Intervall},$$

zwei ableitbare Funktionen. Dann gilt

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Man kann dies auf zweierlei Arten beweisen:

a) Man zerlege alles in Real- und Imaginärteil und führe so die Behauptung aufs Reelle zurück. Diese Rechnung ist etwas umständlich.

b) Wie im Reellen gilt ja auch im Komplexen

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ sowie } g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

und man kann den reellen Beweis für die Produktregel wörtlich abschreiben.

Übungsaufgabe. Auch für komplexwertige Regelfunktionen gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Es seien zwei 2π-periodische Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

gegeben. Diese seien über jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ integrierbar (Regelfunktionen). Dann kann man definieren:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Man rechnet dann leicht nach:

$$\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle,\ \langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle,$$
$$\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle},\quad \langle f, f\rangle \geq 0 \text{ für alle f.}$$

Es sind also alle Eigenschaften eines Skalarprodukts gegeben bis auf Definitheit. Im allgemeinen folgt nämlich aus

$$\langle f, f\rangle = 0$$

nicht, daß f verschwindet. Für stetige Funktionen ist dies allerdings doch der Fall. Fundamental für die Theorie der FOURIERreihen ist die folgende

1.1 Bemerkung. *Es gilt*

$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\rangle = \begin{cases} 0 & \textit{für } n \neq m, \\ 2\pi & \textit{für } n = m. \end{cases}$$

(Man könnte also analog zum gewöhnlichen Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ sagen: Die Funktionen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ stehen paarweise aufeinander senkrecht.)

Beweis.

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}\, dx = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)x} = \int_0^{2\pi} \cos(n-m)x\, dx + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \sin(n-m)x\, dx$$
$$= \begin{cases} 2\pi & \text{für } n - m = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \square$$

Für die Berechnung des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle$ ist es übrigens gleichgültig, ob man von 0 bis 2π oder irgend ein anderes Intervall der Länge 2π integriert, denn es gilt

1.2 Hilfssatz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und über jedes abgeschlossene Intervall integrierbar. Dann ist*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx \textit{ für jedes } a \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es ist

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\, dx - \int_0^{a} f(x)\, dx.$$

Führt man im 2. Integral rechts $y = x - 2\pi$ als neue Integrationsvariable ein, so folgt

$$\int\limits_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{2\pi} f(y)\,dy$$

und daraus die Behauptung. □

Insbesondere ist also für $a = -\pi$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Wir kommen nun auf das gestellte Problem zurück und nehmen an, daß die „Reihe"

$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$$

in $[0, 2\pi]$ *gleichmäßig* konvergiert. Wir bilden dann

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu x}\,dx = \int\limits_{0}^{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-\mu)x} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\nu-\mu)x} = 2\pi c_\mu$$

oder also

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}\nu x}\,dx.$$

Sei umgekehrt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ über jedes kompakte Teilintervall integrierbar (Regelfunktion) und

$$f(x + 2\pi b) = f(x) \text{ für alle } b \in \mathbb{Z}.$$

Definiert man c_ν durch obige Formel, so kann man fragen, ob

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$$

existiert und ob möglicherweise gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x).$$

Man nennt

$$\boxed{c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}\nu x}\,dx,\ \nu \in \mathbb{Z}}$$

den ν-ten *Fourierkoeffizienten* von f und $S_n(x)$ das n-te *Fourierpolynom* zu f. Die Reihe

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})$$

heißt die *Fourierreihe* von f.

Um die gestellte Frage beantworten zu können, leiten wir eine Integraldarstellung für $S_n(x)$ ab. Es ist ja

$$S_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} = \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}dt\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sum_{\nu=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(x-t)}dt.$$

Nun ist aber $(y \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z})$

$$\sum_{\nu=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu y} = \sum_{\mu=0}^{2n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mu-n)}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\sum_{\mu=0}^{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu y} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ny}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)y}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}.$$

Durch Erweitern mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y/2}$ erhält man

$$\boxed{\sum_{\nu=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu y} = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})y]}{\sin\frac{y}{2}},}$$

also

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(x-t)]}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} f(x+t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})t]}{\sin\frac{t}{2}}\,dt. \end{aligned}$$

Ersetzt man im zweiten Integral $t \to -t$ und dann noch in beiden $t \to 2t$, so folgt

$$\boxed{S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\,\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,dt.}$$

Damit haben wir ein Kriterium für die Konvergenz der FOURIERreihe von f an der Stelle x erhalten.

Kriterium. *Die Fourierreihe von f an der Stelle x konvergiert genau dann, wenn die Folge der $S_n(x)$ für $n \to \infty$ konvergiert. Der Grenzwert dieser Folge ist der Wert der Fourierreihe an der Stelle x.*

Integrale wie in dieser Formel oder ähnliche heißen *Dirichlet-Integrale*. Im Spezialfall $f(x) \equiv 1$ erhalten wir

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,dt = 1.}$$

Nun folgt:

1.3 Satz. *Die Fourierreihe von f konvergiert genau dann an der Stelle x_0 gegen $f(x_0)$, wenn die Folge von Integralen*

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)}{2} - f(x_0)\right)\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,dt$$

eine Nullfolge ist.

Wir benötigen folgenden einfachen aber wichtigen

1.4 Hilfssatz. *Sei*

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},\ \ a < b,$$

eine Regelfunktion. Die beiden Folgen

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,dx \quad \textit{und} \quad \int\limits_a^b f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,dx$$

konvergieren gegen Null für $n \to \infty$.

Beweis. 1. $f(x) = \text{const.}$

Man kann die Integrale ausrechnen und erhält Werte A/n mit gewissen Konstanten A.

2. $f(x) = \text{Treppenfunktion.}$

Dieser Fall läßt sich sofort auf den ersten Fall zurückführen.

3. $f(x)$ ist eine beliebige Regelfunktion.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximiert werden kann, existiert eine Treppenfunktion g mit

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,dx + \left|\int\limits_a^b g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,dx\right| < |b-a|\varepsilon + \varepsilon = C\varepsilon.$$

Hierbei ist zu beachten, daß $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = 1$ für reelle y gilt und man gemäß dem zweiten Fall n so groß wählen kann, daß gilt

$$\Big|\int_a^b g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,dx\Big| < \varepsilon. \qquad \square$$

1.5 Zusatz zu 1.4. *Auch die Folge der Integrale*

$$\int_a^b f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

konvergiert gegen Null.

Man muß hierfür lediglich beachten:

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}.$$

Man könnte versuchen, dieses Resultat auf das DIRICHLET-Integral anzuwenden und zwar mit der Funktion

$$g(t) = \frac{(f(x_0 + 2t - f(x_0 - 2t)) - 2f(x_0)}{2\sin t}$$

anstelle von $f(t)$. Dabei ist jedoch zu beachten, daß diese Funktion in $t = 0$ gar nicht definiert ist und beim Grenzübergang $t \to \infty$ sogar über alle Grenzen wachsen kann.

Die Funktion g kann man durch eine etwas einfachere ersetzen. Dazu bemerken wir, daß die Funktion

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t - t}{t\sin t},$$

welche a priori in $(0, \pi/2]$ definiert und stetig ist, in den Punkt $t = 0$ hinein stetig fortgesetzt werden kann. Dies zeigt man leicht mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung von $\sin t$ oder mit der Regel von Bernoulli-l'Hospital. Die Funktion

$$\left(\frac{f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t)}{2} - f(x_0)\right)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right)$$

definiert somit eine Regelfunktion auf $[0, \pi/2]$ und wir können auf diese Funktion 1.5 anwenden. Daher kann man das bisherige Ergebnis auch so zusammenfassen:

1.6 Satz. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine über jedes kompakte Intervall integrierbare Funktion (d.h. Regelfunktion) mit der Periode 2π. Dann sind folgende Aussagen gleichbedeutend:*

a) $$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x_0} \quad \textit{mit } c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\,dt.$$

b) *Die Folge der Dirichlet-Integrale* ($n \in \mathbb{N}$)

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)}{2} - f(x_0)\right)\frac{\sin[(2n+1)t]}{t}\,dt$$

ist eine Nullfolge.

Es ist naheliegende, 1.5 auf die Funktion

$$F(t) := \frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{t}$$

anzuwenden. Der Haken ist der, daß diese Funktion in der Nähe von $t = 0$ gar nicht beschränkt zu sein braucht. Nehmen wir jedoch an, daß f differenzierbar ist, so kann man F stetig in $t = 0$ hinein fortsetzen, denn der Limes $\lim_{t\to 0} F(t)$ ist dann eine Ableitung. Insbesondere definiert dann F eie Regelfunktion auf $[0, \pi/2]$ und wir können 1.5 anwenden.

1.7 Theorem. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch mit Periode 2π und über jedes kompakte Teilintervall von $\mathbb{R}$ integrierbar. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt.*

Annahme. *Die auf $(0, \pi/2]$ definierte Funktion*

$$F(t) := \frac{f(x_0+2t)+f(x_0-2t)-2f(x_0)}{t}$$

sei Einschränkung einer Regelfunktion auf $[0, \pi/2]$.

Behauptung. *Dann gilt*

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x_0} \quad \textit{mit} \quad c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}\,dx.$$

Wir haben bereits erwähnt, daß die Annahme beispielsweise dann erfüllt ist, wenn die Funktion f in x_0 differenzierbar ist.

Anmerkung. 1) Aus der Annahme in 1.7 folgt, daß F beschränkt ist. Hieraus wiederum folgt

$$f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+2t) - f(x_0-2t)}{2}.$$

Wir erinnern daran, daß für Regelfunktionen f die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{t\to 0^+} f(x_0+t), \quad \lim_{t\to 0^-} f(x_0+t)$$

existieren. Aus der Annahme folgt also zwingend, daß das arithmetische Mittel dieser einseitigen Grenzwerte mit $f(x_0)$ übereinstimmt,

$$f(x_0) = \frac{\lim_{t\to 0^+} f(x_0+t) + \lim_{t\to 0^-} f(x_0+t)}{2}.$$

Die Annahme in 1.7 ist für eine viel größere Klasse von Funktionen als nur die differenzierbaren Funktion erfüllt.

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise glatt*, falls es eine Partition $a = a_0 < \ldots < a_n = b$ gibt und falls es glatte Funktionen $f_\nu : [a_{\nu-1}, a_\nu] \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $f(x) = f_\nu(x)$ für $x \in (a_{\nu-1}, a_\nu)$ gilt $(1 \le \nu \le n)$. Allgemeiner heiße eine Funktion auf einem nicht notwendig offenen Intervall stückweise glatt, wenn ihre Einschränkung auf jedes abgeschlossene Teilintervall stückweise glatt ist. Ein Spezialfall von 1.7 besagt somit:

1.8 Theorem. *Für stückweise glatte Funktionen f konvergiert die Fourierreihe in jedem Punkt. Die Fourierreihe stellt die Funktion in allen Punkten dar, in denen die Funktion stetig ist. In den Sprungstellen (=Unstetigkeitsstellen) stellt sie das arithmetische Mittel aus den einseitigen Grenzwerten dar.*

Es sei angemerkt, daß es stetige Funktionen gibt, für die die FOURIERreihe nicht in allen Punkten konvergiert. Die Stetigkeit allein ist also nicht hinreichend für die Darstellbarkeit durch eine FOURIERreihe. Konvergenzbetrachtungen für Fourierreihen können sehr subtil sein und müssen der Spezialliteratur überlassen bleiben. Wir wollen hier lediglich auf einige grundsätzliche Probleme hinweisen.

Als erstes bemerken wir, daß Fourierreihen i.a. nicht gleichmäßig konvergieren können, auch nicht auf abgeschlossenen Teilintervallen, wie das bei den Potenzreihen der Fall war. Sonst könnten Fourierreihen keine Funktionen mit Sprungstellen darstellen.

Ein weiterer Punkt ist: Aus der Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu$$

folgt zwar die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu + a_{-\nu}),$$

nicht jedoch die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu}$$

getrennt. Dies zeigt Beispiel $a_\nu = \nu$. Die Konvergenz beider Reihen erst erlaubt die Schreibweise (s. I.7.2 und das anschließende Beispiel $S = \mathbb{Z}$)

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu.$$

Erst unter geeigneten Voraussetzungen an f erhält man Abschätzungen für die FOURIERkoeffizienten, aus denen man die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x}$$

schließen kann.

1.9 Hilfssatz. *Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei n-mal stetig differenzierbar, c_ν sei der ν-te Fourierkoeffizient von f. Dann existiert ein C mit*

$$|c_\nu| \le \frac{C}{\nu^n} \quad \textit{für} \quad \nu \neq 0.$$

Beweis. Durch partielle Integration beweist man

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}\,dx = \frac{-\mathrm{i}}{\nu}\int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu x}\,dx \text{ für } \nu \neq 0,$$

und die Behauptung ergibt sich durch Induktion nach n. □

Da die Reihe $\sum 1/n^2$ konvergiert, erhalten wir:

1.10 Satz. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit Periode 2π, so gilt mit c_n wie in 1.7*

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Verschiedene Schreibweisen der Fourierreihen

Setzen wir in der Darstellung

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \text{ mit } c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\,dt$$

gemäß der EULERschen Formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} = \cos\nu x + \mathrm{i}\sin\nu x$$

und weiterhin

$$c_0 := \frac{a_0}{2},\ c_\nu + c_{-\nu} =: a_\nu \text{ sowie } \mathrm{i}(c_\nu + c_{-\nu}) =: b_\nu,$$

dann erhalten wir die Darstellung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos\nu x\,dx \quad \text{für } \nu \geq 0 \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin\nu x\,dx \quad \text{für } \nu \geq 1. \end{aligned}}$$

Für eine gerade Funktion (d.h. $f(x) = f(-x)$) reduziert sich die FOURIERreihe offensichtlich auf eine reine Kosinus-Reihe:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x \text{ mit } a_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos\nu x\,dx;$$

für ungerade Funktionen ($f(-x) = -f(x)$) verschwinden hingegen alle a_ν und die FOURIERreihe reduziert sich auf eine reine Sinus-Reihe:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu x \text{ mit } b_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin\nu x\,dx.$$

Oft ist nicht eine 2π-periodische Funktion in eine FOURIERreihe zu entwickeln, sondern vielmehr eine Funktion mit Periode $p > 0$. Setzt man dann

$$x = \frac{p}{2\pi} y \text{ und } f(x) = f\Big(\frac{p}{2\pi} y\Big) = \varphi(y),$$

so durchläuft y das Intervall $[0, 2\pi]$, wenn x das Intervall $[0, p]$ durchläuft. Die FOURIERreihe von $\varphi(y)$ sei

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \text{ mit } c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\, dt.$$

Damit ergibt sich wegen $y = 2\pi x/p$ für die FOURIERreihe von $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c'_\nu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu x} \text{ mit } c'_\nu = \frac{1}{p} \int_0^{p} f(\xi) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}\nu\xi}{p}}\, d\xi.$$

Für den Fall $p = 2\pi$ erhalten wir die bekannten Formeln zurück.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Man kann dann aus f eine Funktion F mit Periode 2π konstruieren. Dies soll so geschehen, daß F in $(0, 2\pi)$ mit f übereinstimmt und daß $F(0) = (f(0) + f(2\pi))/2$ gilt. Dann ist F stückweise glatt und wir können 1.8 anwenden.

Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = x^2$$

soll in $[-\pi, \pi]$ in eine FOURIERreihe entwickelt werden. Es gilt

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

und

$$a_\nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos \nu x\, dx = (-1)^\nu \frac{4}{\nu^2},$$

wie man durch zweimalige partielle Integration erhält. Also gilt:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos \nu x}{\nu^2} \qquad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Für $x = 0$ ergibt sich

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{12}.}$$

Setzt man
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} := S \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^2} := S_1,$$
so wird offenbar
$$S = S_1 + \frac{1}{4}S \Longrightarrow S_1 = \frac{3}{4}S$$
und wir erhalten
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu^2} = S_1 - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S = \frac{\pi^2}{12},$$
also
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

2. Der Abelsche Grenzwertsatz

2.1 Satz. *Sei*
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius r. Unter der Annahme, daß die Reihe auch für $x = r$ konvergiert gilt dann
$$P(r) = \lim_{x \to r} P(x).$$

Ersetzt man x durch $-x$, so erhält man einen entsprechenden Satz für den linken Randpunkt.

Man kann den Abelschen Grenzwertsatz auch folgendermaßen aussprechen.

Eine Potenzreihe definiert auf der Menge aller Punkte, in denen sie konvergiert, eine stetige Funktion.

Für die inneren Punkte des Konvergenzintervalls wissen wir dies bereits, die Randpunkte werden durch 2.1 mit eingeschlossen.

Vorsicht! Die Konvergenz in den Randpunkten braucht nicht absolut zu sein!

Beweis. Wir können o.B.d.A. $r = 1$ annehmen (man kann nämlich $x = ry$ substituieren und erhält dann eine Potenzreihe in y mit Konvergenzradius 1). Wir setzen für $n = -1, 0, 1, 2, \dots$
$$S_n := a_{n+1} + a_{n+2} + \dots .$$

Diese Folge ist eine Nullfolge, da nach Voraussetzung die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

konvergiert. Also ist (S_n) insbesondere beschränkt, d.h. es gilt

$$|S_n| \le C \text{ für alle } n$$

mit einem geeigneten $C > 0$. Daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \text{ für } |x| < 1.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$\boxed{P(1) - P(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \text{ für } |x| < 1.}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen n so groß, daß gilt

$$|S_n| < \varepsilon \text{ für } n \ge N.$$

Wir erhalten

$$|P(1) - P(x)| = (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} |S_n| x^n + (1-x)\varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} x^n \text{ für } 0 \le x < 1.$$

Wir benutzen nun

$$(1-x)\sum_{n=N}^{\infty} x^n \le 1 \text{ für } 0 \le x < 1$$

und erhalten für alle

$$x \in (0,1) \text{ mit } 1 - x < \delta := \frac{\varepsilon}{CN}$$

die Abschätzung

$$|P(1) - P(x)| < (1-x)CN + \varepsilon \le 2\varepsilon. \qquad \square$$

Als Anwendung des ABELschen Grenzwertsatzes erhalten wir den Wert der *alternierenden harmonischen Reihe*:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \ldots = \log 2.}$$

3. Integration rationaler Funktionen

Grundlegend für die Integration rationaler Funktionen sind die Formeln

1) $$x^n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \text{ für } n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1,$$

wobei man natürlich für $n < 0$ voraussetzen muß : $x \neq 0$.

2) $$\frac{1}{x} = \begin{cases} (\log x)' & \text{für } x > 0 \\ (\log(-x))' & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Diese Formeln kann man auch einheitlich schreiben:

$$\frac{1}{x} = (\log|x|)' \text{ für } x \neq 0.$$

Ferner gilt

3) $$\frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)'.$$

Dies sind die Grundintegrale für die Integration rationaler Funktionen. Man gewinnt aus diesen weitere Integrale, beispielsweise

$$(\log|ax^2+bx+c|)' = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}, \quad (\arctan(ax+b))' = \frac{a}{1+(ax+b)^2}.$$

Benutzt man noch die Formel

$$\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} = -\frac{2a}{x^2-a^2},$$

so hat man einen Formelapparat, der es gestattet jede Funktion der Form

$$\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$$

zu integrieren.

Um die Integration beliebiger rationaler Funktionen zu ermöglichen, ist es nützlich, zunächst einmal Stammfunktionen für

$$(x-a)^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

zu bestimmen. Die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen erlaubt den Aufbau beliebiger rationaler Funktionen aus diesen elementaren Ausdrücken, wobei man allerdings zulassen muß, daß a eine komplexe Zahl ist. Genauer stellt sich also folgendes

Problem. Gegeben seien

a) eine komplexe Zahl a,
b) eine ganze Zahl n,
c) ein Intervall $D \subset \mathbb{R}$, auf dem die Funktion $f(x) := (x-a)^n$ definiert ist (d.h. $x - a \neq 0$ für $x \in D$ im Falle $n < 0$).

Gesucht ist eine *Stammfunktion* F, also

$$F : D \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } F' = f.$$

Wir erinnern daran, daß eine komplexwertige Funktion genau dann ableitbar ist, wenn ihr Real- und Imaginärteil es sind und daß dann gilt

$$F' = (\operatorname{Re} F)' + \mathrm{i}(\operatorname{Im} F)'.$$

Für $n \neq -1$ kann man sofort eine Stammfunktion angeben, nämlich

$$F(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Es bleibt der Fall $n = -1$ zu behandeln, also

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

1. Fall. a ist reell. Dann ist

$$F(x) = \log|x-a|$$

eine Stammfunktion.

2. Fall. a ist komplex, nicht reell.

Der naheliegende Weg, einen komplexen Logarithmus zu benutzen, scheidet aus, da wir den komplexen Logarithmus nicht definiert haben. Dies ist auch nicht so ohne weiteres möglich, da die komplexe Exponentialfunktion periodisch, also keineswegs eineindeutig ist.

Wir zerlegen daher in Real- und Imaginärteil:

$$a := \alpha + \mathrm{i}\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \neq 0.$$

Eine einfache Umformung ergibt

$$\frac{1}{x-a} = \frac{x-\bar{a}}{(x-a)(x-\bar{a})} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \mathrm{i}\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Man erhält als Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{\mathrm{i}}{\beta}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Wir wollen nun beliebige rationale Funktionen integrieren.

Sprechweise. Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall,}$$

heißt ein *Polynom*, wenn sie eine Darstellung der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

mit komplexen Koeffizienten $a_\nu,\ 1 \le \nu \le n$, besitzt.

Eine Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall,}$$

heißt *rational*, wenn es Polynome P, Q gibt mit den Eigenschaften

a) $$Q(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D,$$

b) $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ für alle } x \in D.$$

Es ist unser Ziel, Stammfunktionen für beliebige rationale Funktionen zu konstruieren. Für gewisse rationale Funktionen haben wir dies bereits durchgeführt.

Sprechweise. Eine rationale Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall,}$$

heißt *einfach*, wenn sie sich in der Form

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n}$$

schreiben läßt. Dabei seien

a) $a \in \mathbb{C},\ a \notin D;\ n \in \mathbb{N}$,
b) P ein Polynom.

Entwickelt man $P(x)$ nach Potenzen von $(x-a)$, also

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_m(x-a)^m,$$

so erhält man eine Darstellung von f der Art

$$f(x) = \sum_{\nu=o}^{m} a_\nu (x-a)^{\nu-n}.$$

Die Integration einfacher rationaler Funktionen ist nach unseren Vorbereitungen damit bereits erledigt.

3.1 Satz. *Jede rationale Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ D \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall,}$$

läßt sich als endliche Summe einfacher rationaler Funktionen

$$f_\nu : D \longrightarrow \mathbb{C},\ \nu = 1, \dots, n,$$

schreiben:

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Damit ist die Integration beliebiger rationaler Funktionen auf die eingangs angegebenen Grundintegrale zurückgeführt. Im folgenden Anhang erbringen wir eine konstruktiven Beweis für Satz 3.1.

Vorsicht. Selbst wenn die Funktion f reell sein sollte (d.h. $f(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in D$), so sind im allgemeinen die in 3.1 auftretenden einfachen Funktionen komplex und die mit Hilfe von 3.1 und den Grundintegralen konstruierte Stammfunktion F von f ist eine komplexe Funktion.

Aber es gilt ja (f reell vorausgesetzt)

$$F' = f \Longrightarrow (\operatorname{Re} F)' = f \text{ und } (\operatorname{Im} F)' = 0,$$

so daß wir in Wahrheit eine *reelle* Stammfunktion erhalten müssen, (von einer belanglosen imaginären Konstanten, die man weglassen kann, abgesehen).

Anhang zu 3. Partialbruchzerlegung

In diesem Anhang verstehen wir unter einem *Polynom* P eine Abbildung

$$P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

welche sich in der Form

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

mit gewissen komplexen Zahlen $a_\nu,\ 0 \le \nu \le n$, schreiben läßt. Wenn P nicht identisch 0 ist, so können wir $a_n \neq 0$ annehmen. Die Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ (unter der Nebenbedingung $a_n \neq 0$, falls $P \not\equiv 0$) sind durch die Abbildung P, ja sogar durch deren Einschränkung auf ein reelles Intervall $(a, b),\ a < b$, eindeutig bestimmt, wie beispielsweise aus dem Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen folgt. Wir nennen

$$n = \operatorname{Grad} P$$

den *Grad* des Polynoms P. Dieser ist nur definiert, wenn P nicht identisch verschwindet. Offensichtlich gilt

$$\mathrm{Grad}(P \cdot Q) = \mathrm{Grad}\, P + \mathrm{Grad}\, Q,$$

wenn $P \cdot Q$ nicht identisch verschwindet.

Wir benutzen im folgenden (ohne Beweis) den

Fundamentalsatz der Algebra. *Jedes nicht konstante Polynom P besitzt eine Darstellung der Form*

$$P(x) = C \cdot (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$$

mit gewissen komplexen Zahlen C; $a_1, \ldots, a_n$.

Zusatz. Die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sind abgesehen von der Reihenfolge eindeutig bestimmt. Es gilt

$$n = \mathrm{Grad}\, P.$$

(Natürlich ist damit auch C eindeutig bestimmt.)

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt insbesondere, daß jedes nicht konstante Polynom eine Nullstelle besitzt:

Ist a eine Nullstelle von P, so gilt

$$(a - a_1) \cdot \ldots \cdot (a - a_n) = 0,$$

also

$$a = a_\nu \text{ für mindestens ein } \nu.$$

Ein Polynom vom Grade n hat also höchstens n *verschiedene* Nullstellen.

Ist a eine Nullstelle von P, so gibt es insbesondere ein Polynom Q mit der Eigenschaft

$$P(x) = (x - a)Q(x).$$

Dies ergibt ein praktisches Verfahren zur Aufspaltung von P in sogenannte *Linearfaktoren* (d.h. Faktoren der Form $(x-a)$). Wenn man eine Nullstelle von P gefunden hat (dafür gibt es leider kein Patentrezept), so betimme man Q aus obiger Gleichung und suche dann eine Nullstelle von Q usw.

Das Polynom P sei nicht identisch 0. Ist a eine Nullstelle von P, so existiert eine *größte* natürliche Zahl k, so daß sich P in der Form

$$P(x) = (x - a)^k Q(x)$$

mit einem Polynom Q schreiben läßt. Es gilt $Q(a) \neq 0$. Man nennt k die *Nullstellenordnung* von P in a oder auch die *Vielfachhheit* der Nullstelle a.

Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen.

3.2 Satz. *Seien P, Q Polynome, $Q \not\equiv 0$. Wir bezeichnen mit*

$$a_1, \dots, a_m$$

die m verschiedenen Nullstellen von Q und mit

$$k_1, \dots, k_m$$

deren Vielfachheiten ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = \operatorname{Grad} Q$).
Dann gilt die folgende Behauptung: Es existieren

1) *ein Polynom A,*
2) *komplexe Zahlen $c_{\nu\mu}$, $0 \le \mu \le k_\nu$, $1 \le \nu \le m$ mit der Eigenschaft*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \frac{c_{\nu\mu}}{(x - a_\nu)^\mu} \qquad (\, Q(x) \neq 0\,).$$

Beweis und praktische Durchführung. Wir können von vornherein annehmen, daß P und Q keine gemeinsame Nullstelle haben, da man gemeinsame Linearfaktoren kürzen kann. Außerdem können wir annehmen, daß Q nicht konstant ist. Sei daher

$$a := a_1; \ k := k_1.$$

Wir schreiben

$$Q(x) = (x - a)^k \cdot Q_0(x)$$

mit einem gewissen Polynom Q_0 und betrachten

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{C}{(x - a)^k} = \frac{P(x) - CQ_0(x)}{Q(x)}.$$

Wegen $Q_0(a) \neq 0$ können wir die Konstante C so bestimmen, daß das Polynom

$$P(x) - CQ_0(x)$$

in $x = a$ verschwindet, d.h.

$$P(x) - CQ_0(x) = (x - a)P_1(x) \qquad \text{und sowieso} \qquad Q(x) = (x - a)Q_1(x)$$

mit Polynomen P_1, Q_1. Wir erhalten nun

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{C}{(x - a)^k}.$$

Es gilt

$$\operatorname{Grad} Q_1(x) < \operatorname{Grad} Q.$$

Dasselbe Verfahren wende man auf P_1/Q_1 an. Nach endlich vielen Schritten bricht dieses Verfahren ab, nämlich dann, wenn im Nenner ein Polynom ohne Nullstelle, d.h. eine Konstante auftritt. (Der Beweis ergibt sich also durch Induktion nach $n = \operatorname{Grad} Q$, mit dem Beginn für $n = 0$, also konstantem Q und dem oben ausgeführten Schritt.) □

Abschließend heben wir den besonders einfachen Fall hervor, wo Q nur einfache Nullstellen hat,

$$Q(x) = C(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n), \; a_i \neq a_k \text{ für } i \neq k.$$

Die Partialbruchzerlegung ist dann besonders einfach:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{C_1}{x - a_1} + \ldots + \frac{C_n}{x - a_n}.$$

Sei $Q_\nu(x)$ das durch

$$Q(x) = (x - a_\nu) Q_\nu(x)$$

definierte Polynom. Es gilt

$$\boxed{C_\nu = \frac{P(a_\nu)}{Q_\nu(a_\nu)}, \; \nu = 1, \ldots, n.}$$

Dies ist leicht einzusehen, indem man obige Formel mit $(x - a_\nu)$ multipliziert und (nach Kürzen) $x = a_\nu$ setzt.

Wenn Q mehrfache Nullstellen besitzt, so empfiehlt es sich, den beim Beweis der Partialbruchzerlegung vorgezeichneten Weg zu beschreiten.

4. Die Stirlingsche Formel und das Wallissche Produkt

Es soll das asymptotische Verhalten von $n!$ untersucht werden.

4.1 Theorem (Stirlingsche Formel). *Es gilt*

$$1 \leq \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} \textit{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

Insbesondere existiert also der Grenzwert der Folge

$$a_n := \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}$$

und ist gleich $\sqrt{2\pi}$.

Wir werden Beweis der Einfachheit halber mit der etwas schwächeren Abschätzung $\leq e^{\frac{1}{2n}}$ (2 anstelle 12) durchführen: Zunächst wird bewiesen, daß (a_n) überhaupt konvergiert, und zwar kann man zeigen, daß (a_n) monoton fällt. Also

Behauptung. $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 \; (n = 1, 2, \ldots)$.

Beweis.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \mathrm{e}^{-1}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \log\frac{a_n}{a_{n+1}} = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) - 1.$$

Es ist zu zeigen, daß dieser Ausdruck für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht negativ ist. Dazu braucht man eine genaue Abschätzung für $\log(1 + \frac{1}{n})$. Diese erhält man mit Hilfe der TAYLORschen Formel. Die ersten drei Ableitungen von $x \to \log(1+x)$ sind

$$\frac{1}{1+x}, \; -\frac{1}{(1+x)^2}, \; \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Aus der TAYLORschen Formel mit explizitem Restglied (III.6.2) folgert man

$$\log(1 + \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^3 n^3}.$$

Es gilt offenbar

$$3(1 + \frac{1}{n})^3 \leq 4 \text{ für } n \geq 10$$

und daher

$$\log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^3} \text{ für } n \geq 10.$$

Mit dieser Abschätzung ist es sehr leicht, die Ungleichung

$$\Big(n + \frac{1}{2}\Big)\log\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \geq 1 \text{ für } n \geq 10$$

zu beweisen. Für die Zahlen $n = 1, 2, \ldots, 9$ kann man sie direkt verifizieren. Damit wissen wir also, daß die Folge (a_n) monoton fällt. Da alle Glieder positiv sind, muß die Folge (a_n) gegen einen Grenzwert $a \geq 0$ konvergieren:

$$a := \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $a > 0$ ist. Dazu dient

Behauptung. $$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{6n^3} - \frac{1}{12n^2}}.$$

Beweis. Diese Ungleichung ist richtig, falls

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \le \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{12n^2}.$$

Aus der TAYLORschen Formel, die wir oben aufgestellt haben, erhalten wir

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}.$$

Hieraus ist die obige Ungleichung leicht abzuleiten. □

Wir betrachten nun die Folge

$$b_n := a_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}}.$$

Alle Glieder dieser Folge sind positiv, die Folge konvergiert ebenfalls gegen a, denn

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}} = 1.$$

Behauptung. Die Folge (b_n) wächst monoton.

Beweis. Wir zeigen

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \le 1 \quad \text{oder} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}}.$$

Wir wissen bereits, daß

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{6n^3} - \frac{1}{12n^2}}$$

gilt, so daß es genügt

$$\frac{1}{6n^3} - \frac{1}{12n^2} \le \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}$$

zu beweisen. Dies ist einfache Übungsaufgabe. □

Fassen wir zusammen

(a_n) fällt monoton gegen den Grenzwert a.

(b_n) wächst monoton gegen den Grenzwert a.

Insbesondere gilt

$$b_n \le a \le a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und daher erst recht $a > 0$.

Trägt man die Definitionen von a_n und b_n ein, so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}} n!}{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}} \le a \le \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}}.$$

Eine einfache Umschreibung dieser Ungleichungen ergibt

$$1 \le \frac{n!}{a n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}} \le \mathrm{e}^{\frac{1}{2n}}.$$

Das ist genau die STIRLINGsche Formel, nur daß der Wert der Konstanten a noch nicht bestimmt ist. Diese ermitteln wir durch einen Kunstgriff.

Wir betrachten das Integral

$$s_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $0 \le \sin x \le 1$, so daß man sofort erhält

$$s_0 \ge s_1 \ge s_2 \ge \ldots .$$

Zur Berechnung des Integrals führt man partielle Integration durch mit

$$f(x) := -\cos x, \;\; g(x) := (\sin x)^{n-1}.$$

Es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx = f(x) g(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin x)^{n-2} \cos x \, dx \qquad (n \ge 2)$$

oder

$$s_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (\sin x)^{n-2} \, dx.$$

Berücksichtigt man die Formel

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

so ergibt sich

$$s_n = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}\,dx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx,$$

bzw.

$$s_n = (n-1)s_{n-2} - (n-1)s_n \Longrightarrow s_n = \frac{n-1}{n}s_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

Für $n = 2k$ folgt damit

$$s_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Für $n = 2k+1$ hingegen findet man

$$s_{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2k+1)} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!(2k+1)}.$$

Diese beiden Formeln ermöglichen eine Bestimmung von $\frac{\pi}{2}$. Für die natürlichen Zahlen $k \geq 1$ gilt nun

$$s_{2k+1} \leq s_{2k} \leq s_{2k-1}.$$

Sei

$$A_k = \frac{s_{2k+1}}{s_{2k}} = \frac{(k!)^4 2^{4k}}{(2k)!(2k+1)!}\cdot\frac{2}{\pi},$$

dann folgt

$$\frac{s_{2k+2}}{s_{2k}} \leq \frac{s_{2k+1}}{s_{2k}} = A_k \leq 1$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2k+2}\right) = 1 \leq \lim_{k\to\infty} A_k \leq 1.$$

Also ist

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 1.$$

Damit gilt

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k!)^4 2^{4k}}{(2k)!(2k+1)!} = \frac{\pi}{2}. \tag{$*$}$$

Hiermit gleichbedeutend ist die *Wallissche Produktformel*

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{4\nu^2}{4\nu^2-1}}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Konstante a in der STIRLINGschen Formel bestimmen. Nach dieser gilt ja

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ für } a_n = \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (n!)^4 &= n^{4n+2}\mathrm{e}^{-4n}a_n^4, \\ (2n)! &= (2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2n}a_{2n} \\ \text{und} \qquad (2n+1)! &= (2n+1)^{2n+1}\mathrm{e}^{-(2n+1)}\sqrt{2n+1}a_{2n+1}. \end{aligned}$$

Trägt man dies in $(*)$ ein, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}n^{4n+2}\mathrm{e}^{-4n}\mathrm{e}^{2n+1}\mathrm{e}^{2n}a_n^4}{(2n)^{2n}\sqrt{2n}(2n+1)^{2n+1}\sqrt{2n+1}a_{2n}a_{2n+1}} \\ &= \frac{a^2}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}}{(1+\frac{1}{2n})^{2n}(1+\frac{1}{2n})^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

und damit

$$a = \sqrt{2\pi} \qquad \text{(STIRLINGsche Konstante)}.$$

Damit ist auch Theorem 4.1 bewiesen. □

Für hinreichend große n ist als

$$\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ein Näherungswert für $n!$. Etwa für $n = 100$ ist hierbei der Fehler kleiner als ein Promille; es gilt ungefähr

$$100! \sim 0,93 \cdot 10^{158}.$$

5. Die Gammafunktion

Nach EULER definiert man die Γ-Funktion durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Das Integral ist an beiden Grenzen uneigentlich, weshalb wir zur Konvergenzuntersuchung die folgende Zerlegung betrachten:

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty .$$

1) Für $t \in (0,1]$ gilt

$$\frac{1}{e}\, t^{x-1} \le e^{-t} t^{x-1} \le \frac{1}{t^{1-x}}.$$

Das Integral

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}$$

konvergiert also für $x > 0$ und divergiert für $x \le 0$.

2) Wegen

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} t^{x+1} = 0$$

existiert ein t_0, so daß

$$e^{-t} t^{x-1} \le \frac{1}{t^2} \text{ für alle } t \ge t_0.$$

gilt. Das Integral

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}$$

existiert daher für alle x.

Die Γ-Funktion ist also für $x > 0$ definiert.

5.1 Bemerkung. *Für $x > 0$ gilt*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \textit{(Funktionalgleichung der } \Gamma\textit{-Funktion)}$$

Für natürliche n gilt

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Beweis. Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int_{\varepsilon}^{R} \mathrm{e}^{-t} t^x \, dt = -e^{-t} t^x \Big|_{t=\varepsilon}^{t=R} + x \int_{\varepsilon}^{R} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \, dt.$$

Durch die Grenzübergänge $\varepsilon \to 0$ und anschließend $R \to \infty$ folgt die Funktionalgleichung.

Trivial ist

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \, dt = 1.$$

Durch vollständige Induktion erhält man $\Gamma(n) = (n-1)!$. □

5.2 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ ein Intervall,}$$

heißt ***konvex****, falls für je zwei Punkte $a, b \in D$ und alle $t \in [0,1]$ gilt:*

$$f\left(ta + (1-t)b\right) \leq t f(a) + (1-t) f(b).$$

Diese Konvexitätsbedingung bedeutet, daß der Graph (d.h. das Schaubild) von f im Intervall $[a, b]$ (für $a < b$) unterhalb der die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindenden Strecke verläuft.

Übungsaufgabe. Eine zweimal differenzierbare Funktion ist genau dann konvex, wenn gilt:

$$f''(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

5.3 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \text{ein Intervall,}$$

heißt ***logarithmisch konvex****, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:*

a) *$f(x) > 0$ für alle $x \in D$;*

b) *die Funktion*

$$\log \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \log\left(f(x)\right),$$

ist konvex.

Dies bedeutet konkret für $a, b \in D,\ t \in [0,1]$:

$$f\,(ta + (1-t)b) \leq f(a)^t f(b)^{1-t}.$$

Wir wollen zeigen, daß die Γ-Funktion logarithmisch konvex ist und benötigen hierzu die einfach zu beweisende *Höldersche Ungleichung*:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{für} \quad a, b \geq 0,\ p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Bezeichnung. Sei

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ a < b,$$

eine Regelfunktion, $p \geq 1$. Dann setzt man

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p\text{-Norm}).$$

Sei g eine weitere Regelfunktion auf $[a,b]$. Wendet man die HÖLDERsche Ungleichung auf

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

an (wobei natürlich $\|f\|_p$ und $\|g\|_q$ beide nicht Null seien) und integriert von a bis b, so erhält man die

Höldersche Ungleichung für Integrale. Seien

$$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ a < b,$$

Regelfunktionen. Dann gilt

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p + \|g\|_q \, .$$

Der Beweis ist noch nicht vollständig, wir haben nämlich vorausgesetzt, daß $\|f\|_p$ und $\|g\|_q$ beide von 0 verschieden sind. Den allgemeinen Fall führt man hierauf zurück, indem man $f(x)$ und analog $g(x)$ durch

$$f_n(x) := |f(x)| + \frac{1}{n}$$

ersetzt und in der HÖLDERschen Ungleichung den Grenzübergang $n \to \infty$ vollzieht.

5.4 Satz. *Die* Γ*-Funktion ist logarithmisch konvex.*

Beweis. Seien
$$x, y > 0 \text{ und } \alpha \in (0,1).$$
Wir setzen
$$p := \frac{1}{\alpha} \text{ und } q := \frac{1}{1-\alpha}$$
und wenden die HÖLDERsche Ungleichung auf die Funktionen
$$f(t) := t^{\frac{x-1}{p}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{p}} \text{ und } g(t) := t^{\frac{y-1}{q}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{q}}$$
an und erhalten
$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}}.$$
□

5.5 Satz. *Sei*
$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(1) = 1$,

b) $f(x+1) = xf(x)$ *für* $x > 0$,

c) f *ist logarithmisch konvex.*

Dann gilt $f(x) = \Gamma(x)$.

Beweis. Da die Γ-Funktion die angegebenen Eigenschaften besitzt, genügt es zu zeigen, daß $f(x)$ durch *a)–c)* eindeutig bestimmt ist. Aus der Funktionalgleichung folgt
$$f(x+n) = f(x)x(x+1)\dots(x+n-1)$$
für $x > 0$ und alle natürlichen Zahlen n. Es genügt daher zu beweisen, daß $f(x)$ für $x \in (0,1)$ eindeutig bestimmt ist.
Wegen
$$n + x = (1-x)n + x(n+1)$$
folgt aus der logarithmischen Konvexität
$$f(n+x) \leq f(n)^{1-x} f(n+1)^x = (n-1)!\, n^x, \ 0 < x < 1.$$
Andererseits gilt auch
$$n + 1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$$
und daher ergibt sich wiederum aus der logarithmischen Konvexität
$$n! = f(n+1) \leq f(n+x)^x f(n+1+x)^{1-x} = f(n+x)(n+x)^{1-x}.$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben

$$n!(n+x)^{x-1} \leq f(n+x) \leq (n-1)!n^x$$

oder

$$\frac{n!(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}.$$

Der Quotient der beiden in dieser Abschätzung auftretenden Brüche konvergiert offensichtlich gegen 1.

Wir erhalten also

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

Damit ist die Eindeutigkeit von f und damit Satz 5.5 bewiesen. □

Die obige Darstellung von f gilt offensichtlich auch für $x = 1$. Wir behaupten sogar

5.6 Satz. *Für alle $x > 0$ gilt*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Beweis. Für $0 < x \leq 1$ haben wir die behauptete Identität bewiesen. Es genügt also zu zeigen: Wenn die Formel aus 5.6 für x richtig ist, so gilt sie auch für $x + 1$. Sei

$$\Gamma_n(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Dann gilt

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n}{x+1+n} x\Gamma_n(x).$$

Wenn der Grenzwert von $\Gamma_n(x)$ existiert, so konvergiert also auch $\Gamma_{n+1}(x)$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x+1) = x \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x).$$ □

Ein spezieller Wert.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2})\dots(n+\frac{1}{2})}.$$

Benutzt man

$$n + \frac{1}{2} = (n+1) - \frac{1}{2},$$

so erhält man

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\sqrt{n}}{(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\dots(n-\frac{1}{2})(n+1-\frac{1}{2})}.$$

Multipliziert man die beiden Darstellungen, so folgt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}.$$

Für $n = 500$ erhält man auf der rechten Seite den Wert $3,14\ldots$; es liegt daher die Vermutung nahe:

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

Diese Formel ergibt sich aus der WALLISschen Produktentwicklung

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)(2\nu+1)}.$$

6. Analytische Funktionen und das Rechnen mit Potenzreihen

6.1 Definition. *Eine Funktion*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \textit{ ein Intervall,}$$

heißt ***analytisch****, wenn es zu jedem $a \in D$ eine Potenzreihe*

$$P_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

gibt, welche in einer ε-Umgebung $U = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, um a konvergiert und die Funktion f darstellt,

$$f(x) = P_a(x) \textit{ für alle } x \in U \cap D.$$

Beispiel. Sei α eine beliebige reelle Zahl. Die Funktion

$$f(x) := x^\alpha \text{ für } x > 0$$

ist analytisch. Dazu muß man zeigen, daß sich die Funktion $(x+x_0)^\alpha$ für $x_0 > 0$ in einer Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon)$ in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Im Falle $x_0 = 1$

haben wir dies explizit geleistet (Binomialreihe, Kapitel III, §7). Der allgemeine Fall folgt hieraus dank der banalen Umformung

$$(x+x_0)^\alpha = x_0^{-\alpha}\left(\frac{x}{x_0}+1\right)^\alpha.$$

6.2 Satz. *Eine Potenzreihe*

$$P(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

mit von Null verschiedenem Konvergenzradius r stellt in $(a-r, a+r)$ eine analytische Funktion dar.

Beweis. Sei $b \in (a-r, a+r)$. Es gilt

$$(x-a)^n = [(x-b)+(b-a)]^n = \sum_{\nu+\mu=n} \binom{n}{\nu} (b-a)^\nu (x-b)^\mu.$$

Durch Umordnen erhält man

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{\nu+\mu=n} \binom{n}{\nu} (b-a)^\nu (x-b)^\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_{\nu+n} \binom{\nu+n}{\nu} (b-a)^\nu \right) \right) (x-b)^n. \end{aligned}$$

Für welche x ist dieses Umordnen erlaubt? Aufgrund der Ergänzung zum großen Umordnungssatz ist dies dann der Fall, wenn die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{\nu+\mu=n} \binom{n}{\nu} |b-a|^\nu |x-b|^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \big(|b-a| + |x-b|\big)^n$$

konvergiert. Die Konvergenz dieser Reihe ist gesichert für

$$|x-b| < r - |b-a|. \qquad \square$$

6.3 Satz. *Die Summe $f+g$ und das Produkt $f \cdot g$ analytischer Funktionen f und g sind wieder analytisch.*

Beweis. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-a)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu+\mu=n} a_\nu b_\mu \right) (x-a)^n$$

in allen Punkten, in denen die beiden Potenzreihen auf der linken Seite absolut konvergieren. □

Ergänzung. Aus dem Multiplikationssatz erhält man durch vollständige Induktion nach m

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\Big)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m=n\\ \nu_1\geq 0,\dots,\nu_m\geq 0}} a_{\nu_1}\dots a_{\nu_m}\Bigg)(x-a)^n.$$

Spezialfall. Wir bezeichnen mit $A_n(m)$ die Anzahl aller m-Tupel $(\nu_1,\dots,\nu_m)$ nicht negativer ganzer Zahlen mit

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_m = n.$$

Aus dem Multiplikationssatz folgt

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^m = (1+x+x^2+\dots)^m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(m)x^n \text{ für } |x|<1.$$

Andererseits erhält man durch $(m-1)$-fache Differentiation der geometrischen Reihe

$$\frac{(m-1)!}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(m)x^n \text{ für } m = 1,2,3,\dots$$

mit

$$B_n(m) := (n+m-1)(n+m-2)\dots(n+1).$$

Durch Vergleich der beiden Entwicklungen bekommt man

$$\boxed{A_n(m) = \binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}}$$

6.4 Satz. *Seien*

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R},\ g: D' \longrightarrow \mathbb{R},\quad D, D' \textit{Intervalle},$$

zusammensetzbare Funktionen, $f(D)\subset D'$. Wenn f und g analytisch sind, so ist es auch ihre Zusammensetzung.

Beweis. Sei

$$a\in D,\ b = f(a).$$

Wir entwickeln f bzw. g in kleinen Umgebungen von a bzw. b in Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ für } x\in(a-\delta, a+\delta)\cap D,\ \delta>0,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \text{ für } x\in(b-\varepsilon, b+\varepsilon)\cap D',\ \varepsilon>0.$$

Es gilt

$$a_0 = f(a) = b.$$

Wir können δ so klein wählen, daß gilt

$$\Big| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x-a|^n \Big| < \varepsilon \text{ für } |x-a| < \delta.$$

In dieser δ-Umgebung von a sind die nun folgenden Umformungen erlaubt:

$$g\,(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m (x-a)^m \right)^n .$$

Man kann mit Hilfe des Multiplikationssatzes zunächst

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m (x-a)^m \right)^n$$

in eine Potenzreihe entwickeln und erhält dann durch Umordnen in der angegebenen δ-Umgebung eine Potenzreihenentwicklung von $g(f(x))$. □

Praktische Durchführung.

Wir berechnen die ersten vier Entwicklungskoeffizienten von $g(f(x))$. Mit demselben Verfahren kann man beliebig viele bestimmen.

$$\begin{aligned} g\,(f(x)) = b_0 & \\ & + b_1[a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots] \\ & + b_2[a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots]^2 \\ & + b_3[a_1(x-a) + \ldots]^3 \\ & + \ldots . \end{aligned}$$

Die durch Pünktchen angedeuteten Summanden liefern in der Entwicklung von $g(f(x))$ nur Terme $(x-a)^n$ mit $n > 3$. Durch Ausmultiplizieren und Umordnen ergibt sich

$$\begin{aligned} & g\,(f(x)) = b_0 + b_1 a_1 (x-a) + \\ & (b_1 a_2 + b_2 a_1^2)(x-a)^2 + (b_1 a_3 + 2 b_2 a_1 a_2 + b_3 a_1^3)(x-a)^3 + \ldots . \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist analytisch. Aus 6.4 erhalten wir

6.5 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \, \textit{ein Intervall},$$

eine analytische Funktion ohne Nullstelle. Dann ist auch

$$\frac{1}{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ \frac{1}{f}\,(x) = \frac{1}{f(x)}$$

eine analytische Funktion.

Praktisches Verfahren zur Bestimmung der Entwicklung von 1/*f*.

Seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{und} \quad \frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$$

die Entwicklungen in einer geeigneten ε-Umgebung von a. Dann gilt

$$\sum_{\nu+\mu=n} a_\nu b_\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Also ist (induktiv)

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{a_0} \\ b_1 &= -\frac{a_1 b_0}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2} \\ b_2 &= -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_0}{a_0} = \frac{a_1^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2} \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

(beachte: $a_0 = f(a) \neq 0$).

6.6 Satz. *Sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \, \textit{ein Intervall},$$

eine analytische Funktion, deren Ableitung keine Nullstelle besitzt:

$$f'(x) \neq 0 \ \textit{für} \ x \in D.$$

Dann besitzt f eine analytische Umkehrfunktion.

Beweis. Nach Voraussetzung ist f streng monoton, besitzt also eine Umkehrfunktion

$$g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sei

$$a \in D, \ b = f(a).$$

Wir zeigen, daß g in einer ε-Umgebung von b in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Es ist sicherlich keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir

$$a = b = 0 \quad \text{sowie} \quad f'(a) = 1$$

annehmen. Es ist unser Ziel, in einer kleinen ε-Umgebung von 0 eine Entwicklung

$$g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

zu finden. Nach Voraussetzung existiert für f eine solche Entwicklung

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

und es gilt $a_1 = 1$. Aus der Beziehung

$$f(g(x)) = x$$

folgert man notwendige Bedingungen für die zu bestimmenden Koeffizienten b_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \right)^n = x,$$

also

$$\sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n} b_{\nu_1} \dots b_{\nu_n} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 1, \\ 0 & \text{für } m > 1. \end{cases}$$

Durch dieses Gleichungssystem sind die Koeffizienten b_n festgelegt.

$$(*) \qquad \begin{aligned} b_1 &= 1, \\ b_m &= -\sum_{n=2}^{m} a_n \sum_{\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n} b_{\nu_1} \dots b_{\nu_n}, \ m > 1. \end{aligned}$$

Auf der echten Seite kommen nur Koeffizienten b_ν mit $\nu < m$ vor. Die Koeffizienten b_n können also induktiv bestimmt werden.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis. Wir *definieren* die Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \dots$ induktiv durch obige Gleichungen und beweisen dann:

Die Reihe

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

hat positiven Konvergenzradius.

Da wir obige Rechnungen umkehren können, muß diese Reihe dann „in der Nähe von 0“ mit der Umkehrfunktion von f, also mit g übereinstimmen. Unser Problem ist also ein *Konvergenzproblem*.

Behauptung. Die Folge

$$\sqrt[m]{|b_m|}$$

ist beschränkt.

Nach Voraussetzung ist die Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ beschränkt. Es existiert eine Zahl C mit

$$|a_n| \le C^{n-1} \text{ für } n = 1, 2, 3, \dots.$$

Folgender Kunstgriff geht auf Cauchy zurück.

Die Koeffizientenfolge B_1, B_2, $B_3, \dots$ sei induktiv durch

$$(*) \qquad \begin{aligned} B_1 &= 1, \\ B_m &= -\sum_{n=2}^{m} C^{n-1} \sum_{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} B_{\nu_1} \dots B_{\nu_n}, \ m > 1. \end{aligned}$$

definiert. Dann folgt durch Induktion

$$|b_m| \le B_m \text{ für alle } m.$$

Damit ist der Beweis zurückgeführt auf die *spezielle* Folge

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ -C^{n-1} & \text{für } n > 0, \end{cases}$$

denn genau für diese Folge gilt $b_n = B_n$.

Wir drehen nun den Spieß wieder um und zeigen direkt – ohne die Koeffizienten B_n zu benutzen:

Die durch die Reihe

$$x - Cx^2 - C^2x^3 - \cdots$$

definierte Funktion besitzt in einer Umgebung von $x = 0$ eine analytische Umkehrfunktion.

Man kann diese Reihe mit Hilfe der geometrischen Reihe aufsummieren. Man erhält

$$x\left(2 - \frac{1}{1 - Cx}\right) \text{ für } |x| < \frac{1}{C}.$$

Die Ableitung dieser Funktion im Nullpunkt ist 1. Dann ist diese Funktion in einer ε-Umgebung von $x = 0$ streng wachsend, also umkehrbar. Wir müssen zeigen, daß die Umkehrfunktion (in einer geeigneten Umgebung des

Nullpunktes) analytisch ist. Dazu berechnen wir sie explizit, indem wir die Gleichung

$$y = x\left(2 - \frac{1}{1 - Cx}\right)$$

nach x auflösen.Eine einfache Rechnung ergibt für die Umkehrfunktion

$$G(x) = \frac{1 + Cx - \sqrt{(1 + Cx)^2 - 8Cx}}{4C}.$$

(Der Ausdruck unter der Wurzel ist in einer kleinen Umgebung um 0 positiv!) Diese Funktion ist aber analytisch! Wir haben ja gezeigt, daß die Funktion $\sqrt{x}$ für $x > 0$ analytisch ist und daß die Eigenschaft „analytisch" beim Addieren, Multiplizieren und Ineinandersetzen erhalten bleibt! □

6.7 Satz. *Seien*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \ D \textit{ ein Intervall,}$$

analytische Funktionen. Es existiere ein Teilintervall $D_0 \subset D$, welches mehr als nur einen Punkt enthält. Dann gilt

$$f|D_0 = g|D_0 \Longrightarrow f = g,$$

oder in Worten: Stimmen f und g auf dem Teilintervall D_0 überein, so tun sie dies sogar auf ganz D.

Beweis. Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß die gegebenen Intervalle von der Form

$$D = [a, b], \quad D_0 = [a, b_0), \ a < b_0 \le b,$$

sind. Wir können sogar annehmen, daß es kein $\xi \in (b_0, b)$ mit der Eigenschaft

$$f|[a, \xi) = g|[a, \xi)$$

gibt. Anderenfalls ersetze man b_0 durch die kleinste obere Schranke der Menge aller ξ. Wir entwickeln f und g in Potenzreihen um b_0.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - b_0)^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (x - b_0)^n.$$

Die Koeffizienten a_n und a'_n hängen nur von den Ableitungen von f und g im Punkt b_0 ab. Diese Ableitungen sind schon durch das Verhalten dieser Funktionen links von b_0 festgelegt, wie man sich leicht durch Induktion nach der Ordnung der Ableitung überlegt. Da die beiden Funktionen links von b_0 übereinstimmen, folgt

$$a_n = a'_n \text{ für alle } n.$$

Daraus ergibt sich aber, daß f und g in einer vollen ε-Umgebung von b_0 übereinstimmen. Wegen der angenommenen Maximalität von b_0 erhält man $b_0 = b$. Die Funktionen f und g stimmen daher in $[a, b)$, also auch in $[a, b]$ überein. □