

SÉMINAIRE HENRI CARTAN

CHRISTIAN HOUZEL

Géométrie analytique locale, III

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 2 (1960-1961), exp. n° 20, p. 1-25.

http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A7_0

© Séminaire Henri Cartan
(Secrétariat mathématique, Paris), 1960-1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE, III

par Christian HOUZEL

A. Dimension d'un espace analytique.

Rappelons que l'on appelle dimension d'un germe analytique (X, x) la dimension au sens de KRULL de son anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$; on dit aussi que c'est la dimension de l'espace X au point x . On dit qu'un germe analytique (X, x) est équidimensionnel de dimension n si son anneau local l'est, c'est-à-dire si, pour tout idéal premier minimal \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{X,x}$, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}) = n$; ceci signifie que toutes les composantes irréductibles du germe (X, x) (c'est-à-dire les germes de parties analytiques irréductibles maximaux) ont toutes la même dimension n . Si (X, x) est équidimensionnel de dimension n , on dit que l'espace analytique X est équidimensionnel de dimension n en x .

THÉORÈME 1. - Soit X un espace analytique sur un corps k , valué complet et non discret. Si X est équidimensionnel de dimension n en un point x , il existe un voisinage de x en tout point duquel X est équidimensionnel de dimension n .

Soit (\mathfrak{p}_i) la famille des idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$; $\bigcap \mathfrak{p}_i$ est nilpotent. Il existe un voisinage W de x dans lequel on peut construire des idéaux de type fini \mathfrak{J}_i tels que $(\mathfrak{J}_i)_x = \mathfrak{p}_i$ et que $\bigcap \mathfrak{J}_i$ soit nilpotent. Pour tout i , soit W_i le sous-espace analytique fermé de W défini par l'idéal \mathfrak{J}_i . On a

$$|W| = \bigcup |W_i| \quad ,$$

et si $y \in W$,

$$\dim(X, y) = \dim(W, y) = \sup(\dim(W_i, y)) \quad ,$$

car $\bigcap (\mathfrak{J}_i)_y$ est nilpotent, donc tout idéal premier de $\mathcal{O}_{X,y}$ contient l'un des $(\mathfrak{J}_i)_y$. On voit ainsi que l'on peut se ramener au cas où X est intègre en x , en remplaçant X par l'un des W_i .

Supposons donc X intègre de dimension n en x . On sait qu'il existe un voisinage V de x dans X , un voisinage S de 0 dans $\underline{\mathbb{R}}^n$, un morphisme

f de V dans S tel que $f(x) = 0$ et une \mathcal{O}_S -Algèbre finie α telle que V soit S -isomorphe à $\text{Specan}(\alpha)$ (exposé 19, proposition 6, corollaire 1) ; de plus l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{E}^n, 0} \rightarrow \alpha_0 \simeq \mathcal{O}_{X, x}$ est injectif (exposé 18, théorème 1, corollaire 3(b)) ; il en résulte que α_0 est sans torsion sur $\mathcal{O}_{S, 0}$ puisqu'il est intègre. Cette propriété va subsister dans un voisinage de 0 . En effet :

LEMME 1. - Soit S un espace annelé dont le faisceau structural est cohérent et à fibres $\mathcal{O}_{S, s}$ intègres. Le faisceau de torsion d'un \mathcal{O}_S -Module cohérent est cohérent.

Car si \mathcal{M} est un \mathcal{O}_S -Module de type fini, son faisceau de torsion est le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{M} \rightarrow \check{\mathcal{M}}$ (bidual). Ceci se démontre sur les fibres, et on est ramené au cas d'un module de type fini sur un anneau intègre. Si \mathcal{M} et \mathcal{O}_S sont cohérents, $\check{\mathcal{M}}$ l'est aussi, d'où la propriété.

En tenant compte de la proposition 6 de l'exposé 19, le théorème résulte alors du

LEMME 2. - Soit A une algèbre analytique intègre et soit B une A -algèbre finie et sans torsion. Pour tout idéal maximal \mathfrak{n} de B , l'anneau local $B_{\mathfrak{n}}$ est équidimensionnel de dimension $\dim(A)$.

Comme on sait que pour tout idéal maximal \mathfrak{n} de B , le localisé $B_{\mathfrak{n}}$ est encore fini et sans torsion sur A (exposé 19, proposition 6, corollaire 2), on peut supposer que B est local (en le remplaçant par l'un des $B_{\mathfrak{n}}$). Soit \mathfrak{p} un idéal premier minimal de B ; posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$; c'est un idéal premier de A . L'anneau local $A_{\mathfrak{q}}$ est intègre et son idéal maximal est $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$; $B_{\mathfrak{p}}$ est fini et sans torsion sur $A_{\mathfrak{q}}$, et $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \cap A_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$, donc $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ est maximal (théorème de Cohen-Seidenberg) : comme il est aussi minimal, ceci prouve que $\dim(B_{\mathfrak{p}}) = 0$, et par suite $\dim(A_{\mathfrak{q}}) = 0$. Donc $A_{\mathfrak{q}}$ est un corps et $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A = 0$. Alors B/\mathfrak{p} est fini sur A et l'homomorphisme $A \rightarrow B/\mathfrak{p}$ est injectif, ce qui entraîne $\dim(B/\mathfrak{p}) = \dim(A)$.

COROLLAIRE 1. - Soit X un espace analytique. Pour tout entier n , désignons par X_n l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\dim(X, x) \geq n$; c'est un sous-ensemble analytique fermé de X . Pour qu'un point x soit intérieur à X_n , il faut et il suffit que pour tout idéal premier minimal \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{X, x}$ on ait $\dim(\mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{p}) \geq n$.

La question étant locale, plaçons-nous au voisinage d'un point $x \in X$ et

désignons par (p_i) la famille des idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$. Pour tout i , soit

$$n_i = \dim(\mathcal{O}_{X,x}/p_i) \quad .$$

Comme au début de la démonstration du théorème, on utilise un voisinage W de x tel que

$$|W| = \cup |W_i|$$

et

$$\dim(X, y) = \sup(\dim(W_i, y)) \quad \text{pour tout } y \in W \quad ,$$

où W_i est pour chaque i un sous-espace analytique fermé de W tel que $(|W_i|, x) = W(p_i)$; de plus on peut, d'après le théorème, choisir W assez petit pour que $\dim(W_i, y) = n_i$ quel que soit $y \in W_i$. On voit donc que pour tout $y \in W$, on a

$$\dim(X, y) = \sup_{y \in W_i} n_i$$

et par suite

$$X_n \cap |W| = \cup_{n_i \geq n} |W_i| \quad ;$$

ceci prouve le corollaire.

COROLLAIRE 2. - Supposons le corps de base k algébriquement clos. Pour tout entier n et pour tout point $x \in X$, le fermé $(X_n)_x$ de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ qui correspond à X_n est la réunion des composantes irréductibles de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ dont la dimension est $\geq n$.

On emploie ici les notations de l'exposé 19, n° 4.

Codimension. - Soient (X, x) un germe analytique, et (Y, x) un sous-germe analytique irréductible (c'est-à-dire tel que $J(Y, x) = \text{Ker}(\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,x})$ soit un idéal primaire; si k est algébriquement clos, ceci signifie que $(|Y|, x)$ est un germe de partie analytique irréductible (cf. exposé 19, n° 4). On appelle codimension de (Y, x) dans (X, x) la hauteur de l'idéal premier

$p = r(J(Y, x))$ correspondant, c'est-à-dire la dimension du localisé $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ (si k est algébriquement clos, p est défini par $W(p) = (|Y|, x)$).

Cette codimension vaut

$$ht(p) = \sup_i (\dim(\mathcal{O}_{X,x}/p_i) - \dim(\mathcal{O}_{X,x}/p)) ,$$

c'est-à-dire

$$\sup_i (\dim(X_i, x) - \dim(Y, x)) ,$$

où les p_i sont les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ contenus dans p , et les (X_i, x) les sous-germes analytiques de (X, x) correspondants (si k est algébriquement clos, les $(|X_i|, x)$ sont les composantes irréductibles de (X, x) qui contiennent $(|Y|, x)$). En effet $\mathcal{O}_{X,x}$ est quotient d'un anneau régulier, donc il satisfait à la condition des chaînes d'idéaux premiers de NAGATA qui dit que la longueur commune des chaînes saturées d'idéaux premiers joignant p à un idéal premier $p' \subset p$ est $\dim(\mathcal{O}_{X,x}/p') - \dim(\mathcal{O}_{X,x}/p)$ (cf. [4], proposition 6).

Considérons maintenant un sous-germe analytique quelconque (Y, x) de (X, x) . Sa codimension dans (X, x) est par définition la borne inférieure des codimensions des sous-germes analytiques irréductibles de (X, x) contenus dans (Y, x) . Si (X, x) est équidimensionnel, on voit que la codimension de (Y, x) dans (X, x) est $\dim(X, x) - \dim(Y, x)$; mais si (X, x) n'est pas équidimensionnel, la codimension de (Y, x) peut être strictement inférieure à ce nombre.

Soit Y un sous-espace analytique d'un espace analytique X ; si $x \in Y$, on désigne par $\text{codim}_x(Y; X)$ la codimension de (Y, x) dans (X, x) ; c'est la codimension de Y au point x . Si le corps de base k est algébriquement clos, la codimension de Y ne dépend que de l'ensemble analytique sous-jacent $|Y|$; on pose: $\text{codim}_x(|Y|; X) = \text{codim}_x(Y; X)$; pour tout sous-ensemble analytique T de X et pour tout point $x \in T$, on a

$$\text{codim}_x(T; X) = \inf_{p \in T_x} \dim(\mathcal{O}_{X,x})_p$$

(exposé 19, théorème 1, corollaire 1), c'est-à-dire

$$\text{codim}_x(T; X) = \text{codim}(T_x; \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) .$$

LEMME 3. - Soit X un espace analytique, et soit Y un sous-espace analytique de X , irréductible en un point $x \in Y$. Il existe un voisinage ouvert de x dans Y dans lequel la codimension de Y dans X est constante.

On peut évidemment supposer Y intègre en x ; soit (X', x) une composante irréductible de (X, x) contenant (Y, x) et telle que

$$\text{codim}_x(Y; X) = \dim(X', x) - \dim(Y, x) \quad .$$

Il existe un voisinage U de x dans X en tout point y duquel les propriétés suivantes sont vraies :

- (X', y) est équidimensionnel de dimension $n = \dim(X', y)$ (théorème 1) ;
- (X', y) est réunion de composantes irréductibles de (X, y) (grâce à la propriété précédente) ;
- $(Y, y) \subset (X', y)$, et $\dim(Y, y) = \dim(Y, x)$ si $y \in Y \cap U$.

Alors, pour $y \in Y \cap U$, on a

$$\text{codim}_y(Y; X) = \text{codim}_y(Y; X') = \dim(X', y) - \dim(Y, y)$$

qui est constant.

COROLLAIRE 1. - Soient X un espace analytique, Y un sous-espace analytique fermé et s un entier positif. L'ensemble $D_s(Y)$ des points $y \in Y$ tels que $\text{codim}_y(Y; X) \leq s$ est un sous-ensemble analytique fermé.

La question est locale ; on se place au voisinage d'un point x de Y . Considérons les sous-germes intègres (Y_i, x) de (X, x) définis par les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ parmi ceux qui contiennent $J(Y, x)$ ("composantes irréductibles" de (Y, x)). Il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $y \in Y \cap U$, l'idéal $\bigcap J(Y_i, y)$ soit nilpotent, et tel que l'on ait

$$\text{codim}_y(Y_i; X) = \text{codim}_x(Y_i; X) = c_i$$

pour $y \in Y_i \cap U$ quel que soit i (d'après le lemme 1). On constate alors sans peine que

$$(D_s(Y), x) = \bigcup_{c_i \leq s} Y_i \quad ,$$

ce qui prouve le résultat.

Si le corps de base k est algébriquement clos, l'ensemble $D_S(Y)$ ne dépend que de l'ensemble analytique $|Y|$ sous-jacent à Y . On pose $D_S(|Y|) = D_S(Y)$. Si S est un préschéma, par exemple le spectre premier d'une algèbre analytique, et si T est une partie fermée de S , nous désignerons encore, pour tout entier s , par $D_S(T)$ l'ensemble des points $x \in T$ tels que $\text{codim}_x(T; S) \leq s$. Avec ces notations et celles de l'exposé 19, n° 4. on a le

COROLLAIRE 2. - Soient X un espace analytique, T une partie analytique fermée de X et s un entier positif. Si le corps de base k est algébriquement clos, pour tout point $x \in T$ on a $D_S(T)_x = D_S(T_x)$, c'est-à-dire que pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $W(p) \subset (D_S(T), x)$;
- (ii) $\text{codim}_p(T_x; \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) \leq s$.

B. Propriétés des faisceaux cohérents.

1. Support d'un faisceau cohérent.

PROPOSITION 1. - Soit X un espace annelé. Considérons un \mathcal{O}_X -Module \mathcal{E} de présentation finie ; son support est l'ensemble sous-jacent au sous-espace annelé fermé défini par l'Idéal $\text{Ann}(\mathcal{E})$ annulateur de \mathcal{E} :

$$\text{Supp}(\mathcal{E}) = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\text{Ann}(\mathcal{E})) \quad .$$

Si \mathcal{E} est cohérent, $\text{Ann}(\mathcal{E})$ est de type fini et le sous-espace annelé correspondant est de présentation finie.

En effet $\text{Ann}(\mathcal{E})$ est par définition le noyau de l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{O}_X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \quad ;$$

donc si \mathcal{E} est de présentation finie,

$$(\text{Ann}(\mathcal{E}))_x = \text{Ann}(\mathcal{E}_x) \quad \text{pour tout point } x \in X \quad ,$$

car

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})_x \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_x) \quad .$$

Les points x du support de \mathcal{E} sont ceux en lesquels $\mathcal{E}_x \neq 0$ c'est-à-dire $\text{Ann}(\mathcal{E})_x = \text{Ann}(\mathcal{E}_x) \neq \mathcal{O}_{X,x}$. De plus, si \mathcal{E} est cohérent, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est aussi cohérent (cf. [3], chapitre 1, § 2, proposition 6), donc $\text{Ann}(\mathcal{E})$ est de type fini.

COROLLAIRE. - Soit X un espace annelé. Considérons un homomorphisme $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de \mathcal{O}_X -Modules cohérents. Désignons par $S(u)$ (resp. $S'(u)$, $S''(u)$) le complémentaire du plus grand ouvert U tel que $u|_U$ soit un isomorphisme (resp. injectif, surjectif) ; c'est l'ensemble sous-jacent à un sous-espace annelé fermé de présentation finie.

Car

$$S(u) = S'(u) \cup S''(u)$$

et

$$S'(u) = \text{Supp}(\text{Ker}(u)) , \quad S''(u) = \text{Supp}(\text{Coker}(u)) \quad ;$$

comme \mathcal{M} et \mathcal{N} sont cohérents, il en est de même de $\text{Ker}(u)$ et $\text{Coker}(u)$ ([3], théorème 2).

PROPOSITION 2. - Soit X un espace analytique sur un corps k valué complet non discret et algébriquement clos. Considérons un \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{E} et un point $x \in X$; on a $\text{Supp}(\mathcal{E})_x = \text{Supp}(\mathcal{E}_x)$ dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Autrement dit, pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $W(p) \subset (\text{Supp}(\mathcal{E}), x)$;

(ii) $(\mathcal{E}_x)_p \neq 0$.

(Pour les notations $\text{Supp}(\mathcal{E})_x$ et $W(p)$, on renvoie à l'exposé 19, n° 4.)

D'après la proposition 1, on a

$$(\text{Supp}(\mathcal{E}), x) = W(\text{Ann}(\mathcal{E})_x) = W(\text{Ann}(\mathcal{E}_x)) \quad ,$$

donc

$$\text{Supp}(\mathcal{E})_x = V(\text{Ann}(\mathcal{E}_x)) = \text{Supp}(\mathcal{E}_x)$$

grâce au corollaire 1 du théorème 1, exposé 19 (Nullstellensatz).

Nous allons donner des variantes de cet énoncé.

PROPOSITION 2'. - Soit X un espace analytique (k algébriquement clos).
Considérons un \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{E} . Pour tout \mathcal{O}_X -Idéal \mathcal{J} les conditions
suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Supp}(\mathcal{E}) \subset \text{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$;
- (ii) Pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U de x et un entier
 n tels que $\mathcal{J}^n \mathcal{E}|_U = 0$.

Ceci résulte de la proposition 1 et du corollaire 3 du théorème 1, exposé 19.

PROPOSITION 2". - Avec les mêmes notations, pour toute section f de \mathcal{O}_X , les
conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\text{Supp}(\mathcal{E}) \subset W(f) = \text{Supp}(\mathcal{O}_X/(f))$, ensemble des points x tels que $f(x) = 0$;
- (ii) Pour tout $x \in X$, il existe un entier n_x tel que $f_x^n \mathcal{E}_x = 0$ dès que
 $n \geq n_x$.

COROLLAIRE. - Soit X un espace analytique (k algébriquement clos). Considérons un homomorphisme $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de \mathcal{O}_X -Modules cohérents et un point $x \in X$;
on a alors, avec les notations du corollaire de la proposition 1 et celles de l'ex-
posé 19, n° 4,

$$S(u)_x = S(\tilde{u}_x), \quad S'(u)_x = S'(\tilde{u}_x), \quad S''(u)_x = S''(\tilde{u}_x),$$

\tilde{u}_x désignant l'homomorphisme $\tilde{\mathcal{M}}_x \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_x$ de faisceaux cohérents sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$
induit par u . Autrement dit, pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$, les proprié-
tés suivantes sont équivalentes :

- (i) $W(p) \not\subset (S(u), x)$ (resp. $W(p) \not\subset (S'(u), x)$, resp. $W(p) \not\subset (S''(u), x)$);
- (ii) $(u_x)_p : (\mathcal{M}_x)_p \rightarrow (\mathcal{N}_x)_p$ est un isomorphisme (resp. est injectif, resp. est
surjectif).

2. Ensemble singulier d'un faisceau cohérent.

PROPOSITION 3. - Soient X un espace annelé en anneaux locaux, \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -
Module de type fini et n un entier ≥ 1 . Pour que \mathcal{E} soit localement libre
de rang n , il faut et il suffit que $\Lambda^n \mathcal{E}$ soit inversible (c'est-à-dire loca-
lement libre de rang 1).

Il est évident que si \mathcal{E} est localement libre de rang n , $\Lambda^n \mathcal{E}$ est inver-
sible, car $\Lambda^n \mathcal{O}_X^n$ est canoniquement isomorphe à \mathcal{O}_X . Prouvons la réciproque ;

si $\Lambda^n \mathcal{E}$ est inversible, pour tout $x \in X$, la fibre réduite

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x \otimes \kappa(x)$$

est de rang n sur le corps résiduel $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x$ puisque $\Lambda^n \mathcal{E}(x)$ est de rang 1. Il existe un voisinage U de x et des sections $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(U, \mathcal{E})$ telles que les classes mod $\mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ de leurs germes $f_{1,x}, \dots, f_{n,x} \in \mathcal{E}_x$ au point x forment une base de $\mathcal{E}(x)$ sur $\kappa(x)$; d'après le lemme de Nakayama, $f_{1,x}, \dots, f_{n,x}$ engendrent \mathcal{E}_x sur $\mathcal{O}_{X,x}$, et comme \mathcal{E} est de type fini, il existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'homomorphisme $f : \mathcal{O}_V^n \rightarrow \mathcal{E}|_V$ défini par f_1, \dots, f_n soit surjectif ([3], proposition 1). On va montrer que f est aussi injectif; pour cela, il suffit de voir que, pour tout $y \in V$, l'homomorphisme $f_y : \mathcal{O}_{X,y}^n \rightarrow \mathcal{E}_y$ est injectif. Soit u un élément du noyau de f_y ; comme la puissance extérieure $\Lambda^n f_y : \Lambda^n \mathcal{O}_{X,y}^n \rightarrow \Lambda^n \mathcal{E}_y$ est un homomorphisme surjectif de modules libres de même rang ($= 1$), c'est un isomorphisme, et on a donc, pour $1 \leq i \leq n$,

$$u \wedge e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_n = 0,$$

en désignant par (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{O}_{X,y}^n$ puisque l'image par $\Lambda^n f_y$ de cet élément est nulle. Il en résulte que u est nul; ainsi $\text{Ker}(f_y) = 0$, et f est un isomorphisme.

PROPOSITION 4. - Soient X un espace annelé en anneaux locaux, et \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -Module de type fini. Pour que \mathcal{E} soit inversible, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique : $\check{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_X$ soit un isomorphisme.

Pour voir que la condition est nécessaire, on peut supposer que $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ et la démonstration est immédiate. Inversement, on va montrer que s'il existe un faisceau \mathcal{F} et un isomorphisme $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_X$, le faisceau \mathcal{E} (supposé de type fini) est inversible. En effet, on voit d'abord que, pour tout $x \in X$, la fibre réduite $\mathcal{E}(x)$ est de rang 1 sur le corps résiduel $\kappa(x)$; par le raisonnement de la proposition 3, on en déduit l'existence d'un voisinage V de x et d'un homomorphisme surjectif $f : \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{E}|_V$. Le noyau \mathfrak{J} de f annule $\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}|_V \simeq \mathcal{O}_V$, puisque $\mathcal{E}|_V \simeq \mathcal{O}_V / \mathfrak{J}$; donc $\mathfrak{J} = 0$ et f est un isomorphisme, ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 5. - Soient X un espace annelé en anneaux locaux dont le faisceau structural \mathcal{O}_X est cohérent, et \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -Module cohérent. Pour tout $n \geq 0$,

désignons par $S_n(\mathcal{E})$ (resp. $S(\mathcal{E})$) le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel \mathcal{E} est localement libre de rang n (resp. localement libre). C'est l'ensemble sous-jacent à un sous-espace annelé fermé de présentation finie.

Pour $n = 0$, dire que $\mathcal{E}|U$ est localement libre de rang 0 , c'est dire que $\mathcal{E}|U = 0$; donc $S_0(\mathcal{E}) = \text{Supp}(\mathcal{E})$; on applique la proposition 1.

Soit $n \geq 1$; posons $\mathcal{E}_n = \Lambda^n \mathcal{E}$. D'après la proposition 3, pour que $\mathcal{E}|U$ soit localement libre de rang n , il faut et il suffit que $\mathcal{E}_n|U$ soit inversible, c'est-à-dire que $\bigvee u_n|U$ soit un isomorphisme, en désignant par u_n l'homomorphisme canonique $u_n : \mathcal{E}_n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{O}_X$ (proposition 4). Ainsi $S_n(\mathcal{E}) = S(u_n)$ avec la notation du corollaire de la proposition 1 qui donne la démonstration puisque \mathcal{O}_X et $\mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$ sont cohérents.

Enfin

$$S(\mathcal{E}) = \bigcap_{n \geq 0} S_n(\mathcal{E}) \quad .$$

Pour tout $x \in X$, posons

$$n_x = [\mathcal{E}(x) : \mathcal{E}(x)] \quad ;$$

d'après le raisonnement de la proposition 3, il existe un voisinage V de x et un homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_V^{n_x} \rightarrow \mathcal{E}|V$; donc $S_n(\mathcal{E}) \supset V$ dès que $n > n_x$, et

$$S(\mathcal{E}) \cap V = \bigcap_{n \leq n_x} S_n(\mathcal{E}) \cap V$$

est sous-jacent à un sous-espace annelé fermé de présentation finie.

PROPOSITION 6. Soit X un espace analytique sur un corps k valué complet non discret et algébriquement clos. Considérons un \mathcal{O}_X -Module cohérent \mathcal{E} et un point $x \in X$; pour tout $n \geq 0$ on a $S_n(\mathcal{E})_x = S_n(\mathcal{E}_x)$ et $S(\mathcal{E})_x = S(\mathcal{E}_x)$. Autrement dit, pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $W(p) \not\subset (S_n(\mathcal{E}), x)$ (resp. $W(p) \not\subset (S(\mathcal{E}), x)$);
- (ii) $(\mathcal{E}_x)_p$ est libre de rang n (resp. libre) sur $(\mathcal{O}_{X,x})_p$.

Si $n = 0$, c'est la proposition 2. Supposons $n \geq 1$; on a alors (cf. proposition 5)

$$S_n(\mathcal{E}) = S(u_n) \quad ,$$

d'où

$$S_n(\mathcal{E})_x = S(u_n)_x = S((u_n)_x^\sim) = S_n(\tilde{\mathcal{E}}_x)$$

en utilisant le corollaire de la proposition 2, et en remarquant que $(u_n)_x^\sim$ définit l'homomorphisme canonique

$$(u_n)_x^\sim : (\Lambda^n \tilde{\mathcal{E}}_x)^\vee \otimes (\Lambda^n \tilde{\mathcal{E}}_x) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$$

(faisceau structural de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$).

Enfin

$$S(\mathcal{E})_x = \bigcap_{n \leq n_x} S_n(\mathcal{E})_x = \bigcap_{n \leq n_x} S_n(\tilde{\mathcal{E}}_x) = S(\tilde{\mathcal{E}}_x)$$

(pour $n > n_x$, on a $S_n(\tilde{\mathcal{E}}_x) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$).

C. Compléments sur les différentielles.

1. Ramifications. Différente.

Rappelons (cf. exposé 14) qu'à tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'espaces analytiques, on associe un \mathcal{O}_X -Module $\Omega_{X/Y}^1$ appelé faisceau des 1-différentielles relatives; c'est un faisceau cohérent.

Si $x \in X$ et si $y = f(x)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est une immersion locale en x ;
- (ii) $\mathcal{O}_{X,y,x} \cong k$, c'est-à-dire que $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ si \mathfrak{m}_y est celui de $\mathcal{O}_{Y,y}$;
- (iii) $\Omega_{X/Y,x}^1 = 0$ (cf. exposé 14, proposition 3.1).

On en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 7. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espaces analytiques. L'ensemble des points $x \in X$ en lesquels f est une immersion locale est le complémentaire de l'ensemble analytique fermé $\text{Supp}(\Omega_{X/Y}^1)$, défini par l'Idéal $\mathfrak{d}_{X/Y}$ annulateur de $\Omega_{X/Y}^1$ (que l'on appelle Idéal différentielle de X au-dessus de Y).

Si le corps de base k est algébriquement clos, on obtient, en tenant compte du corollaire 2 du théorème 1, exposé 19 :

COROLLAIRE. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme surjectif d'espaces analytiques sur un corps algébriquement clos. Si Y est réduit, l'ensemble des points $x \in X$ où f est un isomorphisme local est le complémentaire du support de $\Omega_{X/Y}^1$, ensemble analytique fermé défini par l'Idéal différentielle $\mathfrak{d}_{X/Y}$.

2. Différentielles relatives d'un spectre analytique.

PROPOSITION 8. - Soient Y un espace analytique, \mathfrak{a} une \mathcal{O}_Y -Algèbre finie et $X = \text{Specan}(\mathfrak{a})$. On a $\Omega_{X/Y}^1 \simeq \Omega_{\mathfrak{a}/\mathcal{O}_Y}^1$ avec la notation de l'exposé 19, n° 1 (et notant $\Omega_{\mathfrak{a}/\mathcal{O}_Y}^1$ le faisceau des \mathcal{O}_Y -différentielles de l'Algèbre \mathfrak{a}).

En effet $X \times_Y X$ est le spectre analytique de $\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{a}$ (exposé 19, n° 2, proposition 2(ii)) et le morphisme diagonal $\text{diag}_{X/Y} : X \rightarrow X \times_Y X$ est une immersion fermée, transformée par le foncteur Specan de la multiplication $\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}$. En désignant par \mathfrak{J} le noyau de cette multiplication, on voit alors que X s'identifie par $\text{diag}_{X/Y}$ au sous-espace analytique fermé de $X \times_Y X$ défini par l'Idéal $\mathfrak{J}_{X \times_Y X}$ ([3]). Donc $\Omega_{X/Y}^1$ est l'image inverse par $\text{diag}_{X/Y}$ du faisceau

$$\mathfrak{J}_{X \times_Y X} / (\mathfrak{J}_{X \times_Y X})^2 = (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)_{X \times_Y X} \quad (\text{exposé 14, n° 1}) \quad .$$

D'autre part, on a, par définition, $\Omega_{\mathfrak{a}/\mathcal{O}_Y}^1 = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Il reste à vérifier que

lorsque l'on considère $\mathcal{O}_{X \times_Y X}$ comme une \mathcal{O}_X -Algèbre au moyen de la première projection $X \times_Y X \rightarrow X$, et $\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{a}$ comme une \mathfrak{a} -Algèbre au moyen de la première injection canonique $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{a}$, on a un isomorphisme de \mathcal{O}_X -Algèbres

$$\text{diag}_{X/Y}^{-1}(\mathcal{O}_{X \times_Y X}) \simeq (\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathfrak{a})^{\sim} \quad .$$

Ceci provient du fait que α est finie, car

$$\mathcal{O}_{X \times_Y X, (x,x)} \simeq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \alpha_y \simeq \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} (\alpha_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \alpha_y)$$

(exposé 19, proposition 6, n° 3, et corollaire 2), si x est un point de X au-dessus de $y \in Y$.

COROLLAIRE. - Sous les hypothèses de la proposition 8, pour tout $x \in X$ au-dessus de $y \in Y$, on a $\Omega_{X/Y,x}^1 \simeq \Omega_{X,x}^1 / \mathcal{O}_{Y,y}$ (module des $\mathcal{O}_{Y,y}$ -différentielles de Kähler de $\mathcal{O}_{X,x}$).

Car ([3])

$$\Omega_{X/Y,x}^1 \simeq \Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \Omega_{\mathcal{O}_{Y,y}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}}^1 / \mathcal{O}_{Y,y}$$

PROPOSITION 9. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini d'espaces analytiques sur un corps algébriquement clos. Désignons par Z l'ensemble des points de X où f n'est pas une immersion locale, et considérons un point $x \in X$; posons $f(x) = y$. Le fermé Z_x de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ correspondant à Z est identique à l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ où $\mathcal{O}_{X,x}$ est ramifié sur $\mathcal{O}_{Y,y}$. Autrement dit, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{X,x}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $W(\mathfrak{p}) \not\subset (Z, x)$;
- (ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}$ est non ramifié sur $(\mathcal{O}_{Y,y})_{\mathfrak{q}}$ (avec $\mathfrak{q} =$ image réciproque de \mathfrak{p} dans $\mathcal{O}_{Y,y}$).

Comme le corps de base est algébriquement clos, et comme f est fini, on peut, d'après le théorème 2 de l'exposé 19, n° 5, appliquer les résultats précédents

$$\Omega_{X/Y,x}^1 \simeq \Omega_{X,x}^1 / \mathcal{O}_{Y,y}$$

D'autre part

$$Z = \text{Supp}(\Omega_{X/Y}^1) \quad (\text{proposition 7})$$

donc

$$Z_x = \text{Supp}(\Omega_{X/Y}^1)_x = \text{Supp}(\Omega_{X/Y,x}^1) \quad (\text{n° 1, proposition 2})$$

ce qui donne

$$Z_x = \text{Supp}(\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}}^1)$$

qui est précisément l'ensemble des points de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ où $\mathcal{O}_{X,x}$ est ramifié sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ (cf. [2], chapitre I, n° 3).

Nous dirons que Z est l'ensemble de ramification de f .

COROLLAIRE. - Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini et surjectif d'espaces analytiques sur un corps algébriquement clos. Supposons Y normal et désignons par Z l'ensemble des points de X où f n'est pas un isomorphisme local. Pour tout point $x \in X$, le fermé Z_x de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ correspondant à Z est identique à l'ensemble des $p \in \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ où $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas étale sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ avec $y = f(x)$. Autrement dit, pour tout idéal premier p de $\mathcal{O}_{X,x}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $W(p) \not\subset (Z, x)$;

(ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ est étale sur $(\mathcal{O}_{Y,y})_q$ (avec $q =$ image réciproque de p dans $\mathcal{O}_{Y,y}$).

Raisonnement analogue, en remplaçant la proposition 2 du n° 1 par son corollaire, et en utilisant le corollaire 9.12 de loco citato.

Exemple. - A titre d'exemple, utile dans la suite, nous allons étudier les différentielles relatives et la différentielle de $X = \text{Specan}(\mathcal{A})$ lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Y[t]/(\mathbf{P})$, où $\mathbf{P} \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)[t]$ est un polynôme unitaire. Alors X s'identifie au sous-espace analytique fermé de $Y \times E$ défini par l'Idéal $\mathbf{P}\mathcal{O}_{Y \times E}$; soit $i : X \rightarrow Y \times E$ le morphisme d'immersion. D'après l'exposé 14, corollaire 4.2, on a une suite exacte :

$$\mathbf{P}\mathcal{O}_{Y \times E}/\mathbf{P}^2 \mathcal{O}_{Y \times E} \xrightarrow{d} i^*(\Omega_{Y \times E/Y}^1) \rightarrow \Omega_{X/Y}^1 \rightarrow 0,$$

qui montre que $\Omega_{X/Y}^1$ s'identifie au quotient de $\Omega_{Y \times E/Y}^1$ par l'Idéal $\mathbf{P}\mathcal{O}_{Y \times E} + d(\mathbf{P}\mathcal{O}_{Y \times E})$.

On sait que $\Omega_{Y \times E/Y}^1$ est libre sur $\mathcal{O}_{Y \times E}$ et admet pour base dt , en désignant par t la section de $\mathcal{O}_{Y \times E}$ qui correspond à la projection $Y \times E \rightarrow E$ (exposé 14, propositions 2.1 et 2.8). En identifiant $\Omega_{Y \times E/Y}^1$ à $\mathcal{O}_{Y \times E}$ au moyen de cette

base, et en désignant par u la section de \mathcal{O}_X image réciproque de t (u correspond au morphisme composé $X \rightarrow Y \times E \rightarrow E$), on voit que $\Omega_{X/Y}^1$ s'identifie à $\mathcal{O}_X/P'(u) \mathcal{O}_X$, où $P' \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)[t]$ est le polynôme dérivé de P .

On en déduit immédiatement que l'Idéal différentiel de X au-dessus de Y est engendré par $P'(u)$, c'est-à-dire que $\mathfrak{d}_{X/Y} = P'(u) \mathcal{O}_X$. Par suite l'ensemble de ramification Z de $f : X \rightarrow Y$ est l'ensemble des points $x \in X$ où s'annule la section $P'(u)$ de \mathcal{O}_X , c'est-à-dire où $P'(u)(x) = 0$. Dans $X - Z$, le morphisme f induit un isomorphisme local (ou est étale), d'après la proposition 6 de l'exposé 19, n° 3. La projection sur Y de l'ensemble de ramification Z est contenue dans le support du faisceau cohérent $\mathcal{O}_X/P'(u) = \mathcal{O}_Y[t]/(P, P')$ (ici u désigne l'image de t dans \mathcal{O}); si \mathcal{O} est à extensions résiduelles triviales (en particulier si le corps de base est algébriquement clos), la projection de Z est même identique à ce support.

3. Différentielles en caractéristique $p > 0$; morphisme de Frobenius.

Plaçons-nous sur un corps k valué complet non discret et parfait; nous désignerons par p l'exposant caractéristique de k . Pour tout espace analytique X sur k , considérons l'espace k -annelé $X^{(p)}$ ainsi défini: l'espace annelé sous-jacent à $X^{(p)}$ est le même que pour X , soit (X, \mathcal{O}_X) ; la structure de k -Algèbre sur $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ (identique à \mathcal{O}_X en tant que faisceau d'anneaux) est déduite de celle de \mathcal{O}_X par restriction des scalaires, au moyen de l'automorphisme $\varphi : k \rightarrow k$ qui transforme $\lambda \in k$ en $\varphi(\lambda) = \lambda^{1/p}$.

Il est clair que $X^{(p)}$ est encore un espace analytique sur k . Le morphisme $F : X \rightarrow X^{(p)}$ d'espaces annelés, dont l'application continue sous-jacente est l'application identique de X , et dont l'application sur les faisceaux $\mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow \mathcal{O}_X$ transforme une section f de $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ en f^p est évidemment k -linéaire (car $(\lambda^{1/p} \cdot f)^p = \lambda \cdot f^p$), donc c'est un morphisme d'espaces analytiques.

On dit que $F : X \rightarrow X^{(p)}$ est le morphisme de Frobenius de X . C'est un morphisme fini (l'application continue sous-jacente est l'application identique de X ; cf. exposé 19, n° 5). Il est clair que F dépend fonctoriellement de X , c'est-à-dire que tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'espaces analytiques définit un morphisme $f^{(p)} : X^{(p)} \rightarrow Y^{(p)}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X^{(p)} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{(p)} \\ Y & \xrightarrow{F} & Y^{(p)} \end{array}$$

soit commutatif.

Supposons maintenant le corps de base k algébriquement clos. D'après les résultats de l'exposé 19, n° 5, on voit que \mathcal{O}_X est une $\mathcal{O}_{X(p)}$ -Algèbre finie, dont X est le spectre analytique au-dessus de $X(p)$.

On en déduit la

PROPOSITION 10. - Soit X un espace analytique sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. L'ensemble des points $x \in X$ tels que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit réduit est le complémentaire d'un ensemble analytique fermé.

On va voir en effet que l'ensemble des $x \in X$, où $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit, est identique au complémentaire du support du noyau \mathfrak{J} de $\mathcal{O}_{X(p)} \rightarrow \mathcal{O}_X$ qui est un $\mathcal{O}_{X(p)}$ -Idéal cohérent d'après les remarques précédentes.

Car dire que $x \notin \text{Supp}(\mathfrak{J})$, c'est dire que l'élévation à la puissance p -ième, $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$, est injective. Comme $p > 0$, ceci équivaut à dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit.

On démontrera plus loin ce résultat sans faire d'hypothèse sur la caractéristique de k (théorème de Cartan-Oka).

PROPOSITION 11. - Soit X un espace analytique sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$. L'homomorphisme canonique $\Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/X(p)}^1$ est un isomorphisme.

En effet, dans la suite exacte

$$F^*(\Omega_{X(p)}^1) \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/X(p)}^1 \rightarrow 0$$

de l'exposé 14, corollaire 4.5, on voit immédiatement que l'homomorphisme $F^*(\Omega_{X(p)}^1) \rightarrow \Omega_X^1$ est nul ($\Omega_{X(p)}^1$ est engendré sur $\mathcal{O}_{X(p)}$ par les df , où f est une section variable de $\mathcal{O}_{X(p)}$; donc l'image de $F^*(\Omega_{X(p)}^1)$ dans Ω_X^1 est engendré par les $d(f^p)$ qui sont nuls).

COROLLAIRE. - Soit X un espace analytique sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Pour tout point $x \in X$ on a un isomorphisme

$$\Omega_{X,x}^1 \xrightarrow{\cong} \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^p}^1$$

(module des $\mathcal{O}_{X,x}^p$ -différentielles de Kähler de $\mathcal{O}_{X,x}$).

On applique la proposition 11 et le corollaire de la proposition 8.

D. Points simples et points singuliers.

Rappelons qu'un point x d'un espace analytique X est dit simple si son anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, ce qui revient à dire que le morphisme canonique $X \rightarrow \mathbb{E}^0$ est simple en x , ou encore que x possède un voisinage ouvert isomorphe à un ouvert d'un espace \mathbb{E}^n (avec $n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$). Les points simples de X forment donc un ouvert qui est une variété analytique. Si un point x n'est pas simple, on dit qu'il est singulier. L'ensemble $S(X)$ des points singuliers de X , ou lieu singulier de X , est fermé.

THÉOREME 2. - Le lieu singulier $S(X)$ d'un espace analytique X est un ensemble analytique fermé.

La question étant locale, nous nous plaçons au voisinage d'un point $x \in X$.
Si

$$0 = \bigcap_{i=1}^r q_i$$

est une décomposition primaire de 0 dans $\mathcal{O}_{X,x}$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et des \mathcal{O}_U -Idéaux \mathfrak{a}_i ($1 \leq i \leq r$) tels que

$$(\mathfrak{a}_i)_x = q_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, r$$

et

$$\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{a}_i = 0 \quad .$$

Désignons par X_i le sous-espace analytique fermé de U défini par l'Idéal \mathfrak{a}_i ; on a

$$U = \bigcup_{i=1}^r X_i$$

et X_i est irréductible en x , donc équidimensionnel au point x . D'après le théorème 1, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x dans lequel tous les X_i ont une dimension constante. Étudions $S(X) \cap U = S(U)$; si un point $y \in U$

est simple, $\mathcal{O}_{X,y}$ est régulier, donc intègre. De $0 = \bigcap (\mathfrak{a}_i)_y$, on déduit que l'un des $(\mathfrak{a}_i)_y$, soit $(\mathfrak{a}_j)_y$, est nul, et ensuite on voit que

$$\mathcal{O}_{X_j,y} = \mathcal{O}_{X,y} / (\mathfrak{a}_j)_y = \mathcal{O}_{X,y}$$

est régulier. Inversement, s'il existe un indice j tel que $(\mathfrak{a}_j)_y = 0$ et que $y \notin S(X_j)$, y est simple sur X , car X_j en est un voisinage ouvert dans X . Ceci prouve que

$$S(U) = \bigcap_{i=1}^r (S(\mathfrak{a}_i) \cup S(X_i)) \quad .$$

On sait que $S(\mathfrak{a}_i)$ est un ensemble analytique fermé (proposition 1) ; si l'on prouve que $S(X_i) \cap V = S(X_i \cap V)$ est aussi un ensemble analytique fermé, on démontre que $S(V) = S(X) \cap V$ est analytique fermé.

On est ainsi ramené à établir le théorème pour un espace analytique de dimension constante $X_i \cap V$. Dans la suite de la démonstration, nous considérons un espace analytique X de dimension constante n . Nous utilisons le critère jacobien de simplicité (exposé 14, corollaire 3.3) :

Pour que l'espace analytique X soit simple en x , il faut et il suffit que $\mathcal{O}_{X,x}^1$ soit libre de rang n (avec $n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$).

On en déduit que $S(X) = S_n(\mathcal{O}_{X,x}^1)$ avec la notation de B, n° 2, proposition 5. Cette proposition donne le résultat.

PROPOSITION 12. - Soit X un espace analytique sur un corps algébriquement clos k . Si X est intègre en un point x , on a $(S(X), x) \neq (|X|, x)$ c'est-à-dire que x n'est pas intérieur à $S(X)$.

La démonstration de cette proposition est différente suivant la caractéristique du corps de base k .

1° k est de caractéristique 0. - Choisissons un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$; il lui correspond un homomorphisme injectif $\mathcal{O}_{\mathbb{E}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit fini sur $\mathcal{O}_{\mathbb{E}^n,0}$ ($n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$), et un morphisme fini $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ d'un voisinage U_1 de x dans X sur un voisinage V_1 de 0 dans \mathbb{E}^n , tel que $\varphi_1(x) = 0$; le faisceau $\mathfrak{a} = \varphi_{1*}(\mathcal{O}_{U_1})$ est une \mathcal{O}_{V_1} -Algèbre finie telle que $\mathfrak{a}_0 = \mathcal{O}_{X,x}$ (exposé 19, n° 3, proposition 6, corollaire 1).

Le corps des fractions K de $\mathcal{O}_{X,x}$ est une extension finie et séparable (caractéristique 0) du corps des fractions L de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$; c'est donc une extension monogène, et on peut choisir un générateur ξ de K sur L appartenant à l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$. Il existe un voisinage $V_2 \subset V_1$ de 0 et une section f de \mathcal{A} dans V_2 telle que $f_0 = \xi$; alors $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{V_2}[f]$ est une sous- \mathcal{O}_{V_2} -algèbre finie de $\mathcal{A}|_{V_2}$. La fibre en 0 du noyau de l'homomorphisme $\mathcal{O}_{V_2}[t] \rightarrow \mathcal{B}$ qui transforme t en f est engendrée par le polynôme minimal $P_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}[t]$ de ξ sur L . Il existe un voisinage $V \subset V_2$ de 0 tel que le noyau de $\mathcal{O}_V[t] \rightarrow \mathcal{B}|_V$ soit engendré par un polynôme unitaire $P \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)[t]$, de degré $d = [K : L]$, dont le germe en 0 est P_0 ; ainsi

$$\mathcal{B}|_V \cong \mathcal{O}_V[t]/(P) \quad .$$

Posons

$$U = \varphi_1^{-1}(V) \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_1|_U \quad .$$

Comme la fibre en 0 du quotient $(\mathcal{A}|_V)/(\mathcal{B}|_V)$ est

$$\mathcal{A}_0/\mathcal{B}_0 = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$$

qui est un $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$ -module de torsion, le support T de ce quotient induit un fermé

$$T_0 = \text{Supp}(\mathcal{A}_0/\mathcal{B}_0) \neq \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}) \quad \text{dans} \quad \text{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0})$$

(cf. B, proposition 2). Donc

$$(T, 0) \neq (k^n, 0)$$

par le Nullstellensatz (exposé 19, n° 4, théorème 1, corollaire 1). Si $y \in V - T$, on a $\mathcal{A}_y = \mathcal{B}_y$, ce qui montre que $U - \varphi^{-1}(T)$ est isomorphe au spectre analytique de $\mathcal{B}|_{(V - T)}$. D'autre part $P'_0(\xi) \neq 0$ puisque ξ est séparable; il en résulte

que $W(P'(f)) \neq (|X|, x)$, où f désigne (par abus) la section de \mathcal{O}_X qui correspond au générateur f de \mathfrak{B} (exposé 19, n° 4, théorème 1). Désignons par Z le support de $\mathcal{O}_U/P'(f) \mathcal{O}_U$, ensemble analytique défini par l'annulation de $P'(f)$. D'après l'exemple de C, n° 2, $Z \cap (U - \varphi^{-1}(T))$ est l'ensemble de ramification de $U - \varphi^{-1}(T)$ au-dessus de $V - T$, et φ est un isomorphisme local en tout point $x' \in U - \varphi^{-1}(T) - Z$; par conséquent

$$S(X) \cap U \subset \varphi^{-1}(T) \cup Z, \quad ,$$

ce qui donne

$$(S(X), x) \subset (\varphi^{-1}(T), x) \cup (Z, x) \neq (|X|, x)$$

puisque $(|X|, x)$ est irréductible et que $(\varphi^{-1}(T), x) \neq (|X|, x)$ (à cause de $(T, 0) \neq (k^n, 0)$ et de la surjectivité de φ) et

$$(Z, x) = W(P'(f)) \neq (|X|, x) \quad .$$

2° k est de caractéristique $p > 0$ (d'après A. GROTHENDIECK). - La propriété à démontrer $(S(X), x) \neq (|X|, x)$ est équivalente à $S(X)_x \neq \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ (exposé 19, n° 4). Il s'agit donc de prouver que le point générique $p = (0)$ de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ n'appartient pas à $S(X)_x = S_n(\Omega_X^1)_x = S_n(\tilde{\Omega}_{X,x}^1)$ ($n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$; on utilise le critère jacobien, cf. théorème 2, grâce au fait que X est équidimensionnel en x , donc de dimension constante n au voisinage; la notation est celle de B, n° 2, et on applique la proposition 6 de ce paragraphe). D'autre part

$$\tilde{\Omega}_{X,x}^1 = \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^p}^1 \quad (\text{corollaire de la proposition 11}) \quad .$$

On est donc ramené à prouver que

$$\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^p}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$$

est libre de rang n sur le localisé K de $\mathcal{O}_{X,x}$ en l'idéal premier (0) , c'est-à-dire son corps des fractions.

Comme

$$\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x}^p}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X,x} \cong \Omega_{K/K^p}^1,$$

le résultat cherché provient du

LEMME 4. - Soit L un corps de caractéristique $p > 0$, admettant une p -base à n éléments. Si K est une extension finie de L , il possède une p -base à n éléments.

Si l'extension est séparable, c'est évident car

$$\Omega_K^1 \cong \Omega_L^1 \otimes_L K.$$

Sinon, on se ramène immédiatement au cas où K est radiciel sur L , puis au cas où K est engendré par une racine p -ième $K = L(\xi)$ avec $\xi^p \in L$, $\xi \notin L$. Posons $a = \xi^p \notin L^p$; on a $da \neq 0$ (l'ensemble des éléments annulés par d étant $k(L^p)$); donc il existe des éléments $a_2, \dots, a_n \in L$ tels que (a, a_2, \dots, a_n) soit une p -base de L , ce qui équivaut à dire que les monômes $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ avec $0 \leq \alpha_i < p$ pour $i = 1, \dots, n$ forment une base de L sur $k(L^p)$ ($= L^p$ puisque k est parfait). Comme $1, \xi, \dots, \xi^{p-1}$ est une base de K sur L et que $a = \xi^p \in K^p$, on voit que les monômes

$\xi^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$, avec $0 \leq \alpha_i < p$ pour $i = 1, \dots, n$, forment une base de K sur K^p , c'est-à-dire que (ξ, a_2, \dots, a_n) est une p -base de K .

Pour appliquer ce lemme au corps des fractions K d'une algèbre analytique intègre $\mathcal{O}_{X,x}$, on choisit un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$, auquel correspond un homomorphisme injectif $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit fini sur $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$.

Comme le corps des fractions L de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0} \cong k\{t_1, \dots, t_n\}$ a visiblement

(t_1, \dots, t_n) pour p -base, il résulte du lemme que K admet une p -base à n éléments, donc que $[\Omega_{K/K^p}^1 : K] = n$, ce qui établit la propriété.

THÉORÈME 3 (ABHYANKAR). - Soit X un espace analytique sur k un corps algébriquement clos. Soit $S(X)$ le lieu singulier de X ; si $x \in X$, on a

$$S(X)_x = S(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$$

(lieu singulier de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$). En d'autres termes, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{X,x}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $W(\mathfrak{p}) \not\subset (S(X), x)$;

(ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}$ est régulier

(cf. [1] ; la démonstration qui suit est due à A. GROTHENDIECK).

Considérons un idéal premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}_{X,x}$; il existe un voisinage ouvert U de x et un faisceau cohérent d'idéaux \mathfrak{J} dans U tel que $\mathfrak{J}_x = \mathfrak{p}$; nous désignerons par Y le sous-espace analytique fermé de U défini par \mathfrak{J} . Il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que

$$\text{codim}_y(Y ; X) = \text{ht}(\mathfrak{p}) = p$$

pour $y \in Y \cap V$ (A, lemme 3).

Comme le germe (Y, x) est irréductible, si Z est un sous-ensemble analytique de Y tel que $(Z, x) \neq (|Y|, x)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $W(\mathfrak{p}) = (|Y|, x) \not\subset (S(X), x)$;

(i') $(|Y| - Z, x) \not\subset (S(X), x)$.

En effet, de $(|Y| - Z, x) \subset (S(X), x)$ on déduit

$$(|Y|, x) = (|Y| \cap S(X), x) \cup (Z, x) \quad ,$$

d'où

$$(|Y|, x) = (|Y| \cap S(X), x) \quad ,$$

c'est-à-dire

$$(|Y|, x) \subset (S(X), x) \quad .$$

Nous appliquerons cette remarque avec $Z = S(Y) \cup S_{p'}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$, où p' est le rang de $\mathfrak{p}(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}$ sur $(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}(\mathcal{O}_{X,x})_{\mathfrak{p}}$ (dimension de l'espace tangent de Zariski). L'ensemble Z est analytique et $(Z, x) \neq (|Y|, x)$, car (Y, x) est irréductible, et on a séparément

$(S(Y), x) \neq (|Y|, x)$ (proposition 7 ; (Y, x) est intègre)

et

$(S_{p'}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2), x) \neq (|Y|, x)$ d'après le Nullstellensatz ,

car

$$p \notin S_{p'}(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)_x = S_{p'}(p/p^2) .$$

(En effet

$$(p/p^2)_p = p(\mathcal{O}_{X,x})_p/p^2(\mathcal{O}_{X,x})_p$$

est libre de rang p' .)

Si $y \in (|Y| - Z) \cap V$, c'est un point simple de Y et $\text{codim}_y(Y; X) = p$; d'autre part $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est libre de rang p' au voisinage de y . Ceci va nous permettre d'achever la démonstration grâce au

LEMME 5. - Soit A un anneau local noethérien. Si q est un idéal de A tel que A/q soit régulier, les propriétés suivantes sont équivalentes

a. A est régulier.

b. q/q^2 est libre sur A/q , de rang $p = \text{ht}(q)$.

Puisque A/q est régulier, donc intègre, l'idéal q est premier. Si q/q^2 admet un système de générateurs sur A/q ayant $p = \text{ht}(q) = \dim A_q$ éléments, il en est de même de $(q/q^2)_q = qA_q/q^2A_q$ sur A_q/qA_q , ce qui montre que A_q est régulier et que q/q^2 est libre sur A/q . Ainsi la condition (b) est équivalente à

b'. q/q^2 est engendré sur A/q par $p = \text{ht}(q)$ éléments.

Soit $q = \dim(A/q)$, et soient f_1, \dots, f_q des éléments de l'idéal maximal m de A qui relèvent ceux d'un système régulier de paramètres de A/q . Si $(g_1, \dots, g_{p'})$ est un système minimal de générateurs de q , m admet $(f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_{p'})$ comme système minimal de générateurs. Si A est régulier, on a donc

$$q + p' = \dim A = q + p ,$$

d'où

$$p' = p = \text{ht}(q) \quad ;$$

ainsi (a) entraîne (b').

Réciproquement, si (b) est vrai, on a $p' = p$ et m est engendré par $q + p = \dim(A_q) + \dim(A/q) \leq \dim(A)$ éléments, ce qui prouve que A est régulier.

Nous appliquons le lemme 5 à $A = \mathcal{O}_{X,y}$ et $q = \mathfrak{J}_y$ pour $y \in (|Y| - Z) \cap V$. Alors $A/q = \mathcal{O}_{Y,y}$ est bien régulier ; Y est irréductible en y , donc

$$p = \text{codim}_y(Y ; X) = \text{ht}(q) \quad ;$$

$q/q^2 = (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)_y$ est libre de rang p' sur $\mathcal{O}_{Y,y}$. Par suite, pour que y soit simple sur X , il faut et il suffit que $p = p'$, c'est-à-dire que $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ soit régulier. On a donc prouvé que la condition

(ii) $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ est régulier

entraîne

(ii") $(|Y| - Z) \cap S(X) \cap V = \emptyset$;

et que $(|Y| - Z) \cap V \not\subset S(X)$ entraîne (ii).

Le théorème est établi.

COROLLAIRE 1. - Le lieu singulier $S(\mathcal{O}_{X,x})$ de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est fermé, c'est-à-dire qu'il existe un idéal $\alpha \subset \mathcal{O}_{X,x}$ tel que les idéaux premiers p qui donnent un localisé $(\mathcal{O}_{X,x})_p$ régulier soient caractérisés par $p \not\subset \alpha$.

COROLLAIRE 2. - Soit A une algèbre analytique intègre de dimension ≥ 2 . Il existe un idéal premier $p \neq 0$ de A tel que A_p soit régulier.

Puisque A est intègre, l'idéal α du corollaire 1 n'est pas nul ; on utilise alors le fait que l'intersection des idéaux premiers $\neq 0$ de A est nulle (si $f \in A$ est différent de 0, il existe un système de paramètres (f_1, \dots, f_n) de A tel que $f_n = f \neq f_1$, car $n = \dim A \geq 2$; il existe alors un idéal premier p associé à $A/f_1 A$ (donc non nul) tel que $f \notin p$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABHYANKAR (S.). - Concepts of order and rank on a complex space and a condition for normality, *Math. Annalen*, t. 141, 1960, p. 171-192.
 - [2] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de Géométrie algébrique, 1960/61. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques, 1961.
 - [3] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Math.*, Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.
 - [4] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, *Proceedings of the international symposium on algebraic number theory [1955. Tokyo and Nikko]* ; p. 175-189. - Tokyo, Science Council of Japan, 1956.
-