CHRISTIAN HOUZEL

Géométrie analytique locale, II. Théorie des morphismes finis

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 2 (1960-1961), exp. n° 19, p. 1-22.
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A6_0>

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE LOCALE, II.
THÉORIE DES MORPHISMES FINIS

par Christian HOUZEL

1. Spectre analytique d'une Algèbre de présentation finie.

DÉFINITION 1. - Soit S un espace annelé. On dit qu'une $\mathcal{O}_S$-Algèbre $\mathfrak{a}$ est de présentation finie si tout $s \in S$ admet un voisinage U tel que $\mathfrak{a}|U$ soit isomorphe à un faisceau de la forme : $(\mathcal{O}_S|U)[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_m)$ avec $f_1, \dots, f_m \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n])$.

C'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ est localement engendrée sur $\mathcal{O}_S$ par un nombre fini de sections soumises à un nombre fini de relations.

Nous nous intéressons au cas où S est un espace analytique, sur un corps de base k valué complet et non discret. Pour tout espace analytique T au-dessus de S, considérons le faisceau $\mathfrak{a}_T = \mathfrak{a} \times_S T$, image réciproque de $\mathfrak{a}$ sur T, et l'ensemble : $F_{\mathfrak{a}}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathfrak{a}_T, \mathcal{O}_T)$ (homomorphismes d'Algèbres) ; on voit tout de suite que $T \rightsquigarrow F_{\mathfrak{a}}(T)$ définit un foncteur contravariant $F_{\mathfrak{a}} : (\mathrm{An})^{\circ}/_S \to (\mathrm{Ens})$.

PROPOSITION 1. - Soit $\mathfrak{a}$ une Algèbre de présentation finie sur un espace analytique S ; le foncteur $F_{\mathfrak{a}}$ est représentable dans la catégorie $(\mathrm{An})_{/S}$, par un espace analytique séparé sur S .

Remarquons d'abord que le foncteur $F_{\mathfrak{a}}$ est de nature locale (cf. exposé 11, définition 5.4), car si T est un espace analytique au-dessus de S, le préfaisceau $U \rightsquigarrow F_{\mathfrak{a}}(U)$ (U parcourant les ouverts de T) n'est autre que le faisceau des germes d'homomorphismes d'algèbres $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_T}(\mathfrak{a}_T, \mathcal{O}_T)$.

Ainsi, d'après le corollaire 5.7 de l'exposé 11, il suffit, pour montrer que $F_{\mathfrak{a}}$ est représentable, de trouver un recouvrement ouvert (S_i) de S tel que pour tout indice i le foncteur $F_{\mathfrak{a}}/S_i$ soit représentable dans $(\mathrm{An})_{/S_i}$.

En utilisant la définition 1, on voit donc qu'il suffit de considérer le cas où $\mathfrak{a}$ est de la forme : $\mathcal{O}_S[t_1, \dots, t_n]/(f_1, \dots, f_m)$. Alors la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_S[t_1 , \dots , t_n] \to \mathcal{A} \to 0$$

(où $\mathcal{J} = (f_1 , \dots , f_m)$) donne par extension de la base une suite exacte :

$$\mathcal{J}_T \xrightarrow{i_T} \mathcal{O}_T[t_1 , \dots , t_n] \to \mathcal{A}_T \to 0$$

pour tout espace analytique T au-dessus de S . Ceci permet d'identifier $F_{\mathcal{A}}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{A}_T , \mathcal{O}_T)$ à l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{O}_T[t_1 , \dots , t_n]$ dans $\mathcal{O}_T$ qui s'annulent sur $i_T(\mathcal{J}_T)$.

Or le foncteur $F_{\mathcal{O}_S[t_1,\dots,t_n]}$: $T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T[t_1 , \dots , t_n] , \mathcal{O}_T)$ est isomorphe à $T \rightsquigarrow (\Gamma(T , \mathcal{O}_T))^n$; en utilisant le théorème 1.1 de l'exposé 10 et la proposition 3.1 de l'exposé 11, on voit que $F_{\mathcal{O}_S[t_1,\dots,t_n]}$ est représenté dans $(An)_{/S}$ par le couple $(S \times \underset{\sim}{E}^n , \eta)$ où η est l'homomorphisme d'Algèbres $\eta : \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}[t_1 , \dots , t_n] \to \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}$ défini par $\eta(t_i) = q^*(z_i)$ $(i = 1 , \dots , n)$, en désignant par q la projection de $S \times \underset{\sim}{E}^n$ sur $\underset{\sim}{E}^n$. Il en résulte immédiatement que le sous-foncteur $F_{\mathcal{A}}$ est représenté par le sous-espace fermé $X \subset S \times \underset{\sim}{E}^n$ défini par l'Idéal $\mathfrak{J} = \eta \circ i_{S\times \underset{\sim}{E}^n}(\mathcal{J}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}) \subset \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}$ (cf. exposé 11, lemme 3.6).

$$\mathfrak{J} = \eta(\mathcal{J}\mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}[t_1 , \dots , t_n]) \quad .$$

Dans le cas envisagé, X est évidemment séparé sur S . Comme la propriété pour un objet de $(An)_{/S}$ d'être séparé sur S est locale sur S , la dernière assertion de l'énoncé est prouvée elle aussi (cf. exposé 11, proposition 5.6 : on obtient l'espace qui représente $F_{\mathcal{A}}$ en recollant ceux qui représentent les $F_{\mathcal{A}/S_i}$).

DÉFINITION 2. - Pour toute $\mathcal{O}_S$-Algèbre de présentation finie $\mathcal{A}$, on appelle spectre analytique de $\mathcal{A}$ et on désigne par $\mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ l'objet de $(An)_{/S}$ (défini à un S-isomorphisme près) qui représente le foncteur

$$F_{\mathcal{A}} : T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{A}_T , \mathcal{O}_T) \quad .$$

$\mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ est donc un espace analytique séparé au-dessus de S .

Exemple. - Considérons un $\mathcal{O}_S$-Module $\mathcal{E}$ de présentation finie ; son Algèbre symétrique $S(\mathcal{E})$ est une $\mathcal{O}_S$-Algèbre de présentation finie, et $\mathrm{Specan}(S(\mathcal{E}))$ représente le foncteur : $T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-Alg.}}(S(\mathcal{E})_T , \mathcal{O}_T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-Alg.}}(S(\mathcal{E}_T) , \mathcal{O}_T)$ $\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T\text{-Mod.}}(\mathcal{E}_T , \mathcal{O}_T)$. C'est le fibré vectoriel défini par $\mathcal{E}$ (cf. exposé 12, n° 1).

PROPOSITION 2.

(i) $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ définit un foncteur contravariant de la catégorie des $\mathcal{O}_S$-Algèbres de présentation finie dans $(\mathrm{An})_{/S}$.

(ii) Quelles que soient les $\mathcal{O}_S$-Algèbres de présentation finie $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}$ est de présentation finie, et $\mathrm{Specan}(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{B}) \simeq \mathrm{Specan}(\mathcal{A}) \times_S \mathrm{Specan}(\mathcal{B})$.

(iii) Soit $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorphisme surjectif d'une Algèbre $\mathcal{A}$ de présentation finie dans une autre $\mathcal{B}$. Le morphisme $\mathrm{Specan}(h) : \mathrm{Specan}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ correspondant est une immersion fermée.

(iv) Pour toute $\mathcal{O}_S$-Algèbre de présentation finie $\mathcal{A}$ et pour tout espace analytique T au-dessus de S , $\mathrm{Specan}(\mathcal{A}) \times_S T \simeq \mathrm{Specan}(\mathcal{A}_T)$ (compatibilité avec le changement de base).

(i) est immédiat, car $F_{\mathcal{A}}(T)$ est un foncteur contravariant en $\mathcal{A}$; (ii) résulte de la formule :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{A}_T \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{B}_T , \mathcal{O}_T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{A}_T , \mathcal{O}_T) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{B}_T , \mathcal{O}_T) \quad ;$$

(iii) se déduit facilement de la démonstration de la proposition 1, et (iv) se prouve par le corollaire 3.2 de l'exposé 11.

Considérons le couple (X , ξ) qui représente le foncteur $F_{\mathcal{A}}$ défini par une $\mathcal{O}_S$-Algèbre $\mathcal{A}$ de présentation finie. $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ est un espace analytique au-dessus de S : $X \xrightarrow{f} S$, et $\xi \in F_{\mathcal{A}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}_X , \mathcal{O}_X)$ est un homomorphisme de $\mathcal{A}_X = f^*(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{O}_X$. En d'autres termes, ξ définit une factorisation : $X \xrightarrow{\hat{f}} (|S| , \mathcal{A}) \to S$ du morphisme structural f de X à travers l'espace annelé $(|S| , \mathcal{A})$ (où $|S|$ désigne l'espace topologique sous-jacent à S), muni du morphisme canonique $(|S| , \mathcal{A}) \to S$ (constitué par l'application identique de $|S|$ et l'homomorphisme : $\mathcal{O}_S \to \mathcal{A}$).

Pour tout $\mathfrak{a}$-Module $\mathfrak{M}$, posons :

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \hat{f}^*(\mathfrak{M}) = f^*(\mathfrak{M}) \otimes_{f^*(\mathfrak{a})} \mathcal{O}_X \quad .$$

On définit ainsi un foncteur : $\mathfrak{M} \rightsquigarrow \tilde{\mathfrak{M}}$ de la catégorie des $\mathfrak{a}$-Modules dans celle des $\mathcal{O}_X$-Modules ($X = \operatorname{Specan}(\mathfrak{a})$). Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux $\mathfrak{a}$-Modules, on a

$$(\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{a}} \mathfrak{N})^{\sim} = \tilde{\mathfrak{M}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{\mathfrak{N}} \quad .$$

Considérons un espace analytique T au-dessus de S et l'espace

$$X_T = \operatorname{Specan}(\mathfrak{a}_T) = X \times_S T$$

au-dessus de T (proposition 2, (iv)) ; le morphisme structural de X_T dans T se factorise encore en

$$X_T \xrightarrow{\hat{f}_T} (|T| , \mathfrak{a}_T) \to T \quad ,$$

et on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X & X_T \arrow[l] \arrow[d, "\hat{f}_T"] \\ (|S| , \mathfrak{a}) \arrow[u, leftarrow, "\hat{f}"'] & (|T| , \mathfrak{a}_T) \arrow[l] \end{tikzcd} \quad .$$

Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{a}$-Module ; l'image réciproque $\mathfrak{M}_T = \mathfrak{M} \times_S T$ de $\mathfrak{M}$ sur T est un $\mathfrak{a}_T$-Module. On voit alors que $\tilde{\mathfrak{M}}_T = \hat{f}_T^*(\mathfrak{M}_T)$ s'identifie à l'image réciproque de $\tilde{\mathfrak{M}}$ par le morphisme : $X_T \to X$ (compatibilité du foncteur $\mathfrak{M} \rightsquigarrow \tilde{\mathfrak{M}}$ avec le changement de base).

2. Fibre du spectre analytique au-dessus d'un point de la base.

Considérons une $\mathcal{O}_S$-Algèbre $\mathfrak{a}$ de présentation finie et son spectre analytique $X = \operatorname{Specan}(\mathfrak{a})$. Si $s \in S$, rappelons (exposé 10, n° 2) que la fibre de X en s est le produit fibré $X_s = X \times_S \{s\}$, où $\{s\}$ est l'espace analytique réduit au point s , muni du corps $\mathcal{O}_s/m_s\,\mathcal{O}_s = K(s) \cong k$ (m_s désignant l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_s$). Ainsi :

$$X_s = X \times_S \{s\} \cong \mathrm{Specan}(\mathcal{A}_{\{s\}}) = \mathrm{Specan}(\mathcal{A}(s)) \qquad \text{(proposition 2 (iv))}$$

avec $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}_s/\mathfrak{m}_s \mathcal{A}_s = \mathcal{A}_s \otimes_{\mathcal{O}_s} k = \mathcal{A}_{\{s\}}$; si dans un voisinage U de s on a

$$\mathcal{A}|U \cong \mathcal{O}_U[t_1 , \dots , t_n]/(f_1 , \dots , f_m) \qquad ,$$

alors :

$$\mathcal{A}(s) \cong k[t_1 , \dots , t_n]/(f_1(s) , \dots , f_m(s)) \qquad .$$

$X_s = \mathrm{Specan}(\mathcal{A}(s))$ est le sous-espace fermé de $\{s\} \times \underset{\sim}{E}^n \cong \underset{\sim}{E}^n$ défini par les "équations"

$$f_i(s)(z_1 , \dots , z_n) = 0 \qquad (i = 1 , 2 , \dots , m) \qquad .$$

D'une manière plus précise, si le foncteur $F_{\mathcal{A}}$ est représenté dans $(\mathrm{An})_{/S}$ par le couple (X , ξ) , le foncteur $F_{\mathcal{A}(s)} = F_{\mathcal{A}/\{s\}}$ est représenté dans $(\mathrm{An})_{/\{s\}}$ par le couple (X_s , ξ_s) , où X_s est la fibre de X en s et où $\xi_s : \mathcal{A}_{X_s} \to \mathcal{O}_{X_s}$ est obtenu à partir de $\xi : \mathcal{A}_X \to \mathcal{O}_X$ par réduction mod $\mathfrak{m}_s$. En particulier, l'application de $\mathrm{Hom}_{\{s\}}(\{s\} , X_s)$ dans $\mathrm{Hom}_k(\mathcal{A}(s) , k)$ qui fait correspondre à toute section f de $X_s/\{s\}$ l'homomorphisme composé $f^* \circ \xi'_{s,f(s)}$ (avec $\xi'_{s,f(s)} : \mathcal{A}(s) \to \mathcal{O}_{X_{s,f(s)}}$ déduit du germe de ξ_s en $f(s)$) est bijective. Comme $\mathrm{Hom}(\{s\} , X_s)$ s'identifie à l'ensemble des points de X_s en associant à tout $f : \{s\} \to X_s$ le point $f(s) = x$ (de sorte que $f^* = \varepsilon_x : \mathcal{O}_{X_s,x} \to k$, homomorphisme d'augmentation), on obtient une bijection de l'ensemble des points de X_s sur l'ensemble des idéaux de $\mathcal{A}(s)$ qui donnent k pour quotient, en appliquant chaque $x \in X_s$ sur l'image réciproque par $\xi'_{s,x} : \mathcal{A}(s) \to \mathcal{O}_{X_s,x}$ de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X_s,x}$. Or, $\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X,x}$ (exposé 10, n° 2), $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}_s/\mathfrak{m}_s \mathcal{A}_s$ et $\xi'_{s,x}$ s'obtient par réduction mod $\mathfrak{m}_s$ à partir de $\xi'_x : \mathcal{A}_s \to \mathcal{O}_{X,x}$ (déduit du germe de ξ en x). On peut donc énoncer :

PROPOSITION 3. - On obtient une bijection de l'ensemble des points de X_s sur l'ensemble des idéaux maximaux $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{A}_s$ tels que : $\mathfrak{n} \supset \mathfrak{m}_s \mathfrak{A}_s$ et $\mathfrak{A}_s/\mathfrak{n} \tilde{\leftarrow} k$, en associant à chaque $x \in X_s$ l'image réciproque par l'homomorphisme $\xi'_x : \mathfrak{A}_s \to \mathcal{O}_{X,x}$ de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Si $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal de $\mathfrak{A}_s$ qui correspond au point $x \in X_s$, on a donc une factorisation de $\xi'_x : \mathfrak{A}_s \to (\mathfrak{A}_s)_{\mathfrak{n}} \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{O}_{X,x}$.

PROPOSITION 4. - L'homomorphisme $\hat{\varphi}_x : \widehat{(\mathfrak{A}_s)_{\mathfrak{n}}} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ déduit de φ_x en passant aux complétés des anneaux locaux en question est un isomorphisme.

Reprenons les notations utilisées dans la preuve de la proposition 1. On peut écrire :

$$\mathfrak{A}_s \cong \mathcal{O}_s[t_1 , \dots , t_n]/\mathfrak{J}_s , \qquad (\mathfrak{J}_s = (f_{1,s} , \dots , f_{n,s}))$$

et alors :

$$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n,x}/\mathfrak{J}_x \quad \text{avec} \quad \mathfrak{J}_x = \eta_x(\mathfrak{J}_s \, \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n,x}[t_1 , \dots , t_n]) \qquad ;$$

η_x est le germe de l'homomorphisme $\eta : \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}[t_1 , \dots , t_n] \to \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}$ défini par $\eta(t_i) = q^*(z_i)$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$, et ξ_x est déduit de η_x en passant aux quotients, de sorte que l'on a un diagramme commutatif avec des lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathfrak{J}_s & \to & \mathcal{O}_s[t_1 , \dots , t_n] & \to & \mathfrak{A}_s & \to & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow \eta'_x & & \downarrow \xi'_x & & \\
0 \to & \mathfrak{J}_x & \to & \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n,x} & \to & \mathcal{O}_{X,x} & \to & 0
\end{array} \qquad (\eta'_x \text{ déduit de } \eta_x) \quad .$$

Désignons par $\mathfrak{p}$ l'image réciproque par η'_x de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n,x}$; $\mathfrak{p}$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{m}_s$ et $t_1 - x_1 , \dots , t_n - x_n$, où $x_i \in k$ désigne la valeur en x de la section $q^*(z_i)$ de $\mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n}$ $(i = 1 , 2 , \dots , n)$. On peut écrire un diagramme commutatif à lignes horizontales exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to (\mathcal{J}_s)_p & \to & (\mathcal{O}_s[t_1 , \dots , t_n]_p & \to & (\mathcal{a}_s)_n & \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow \psi_x & & \downarrow \varphi_x & \\ 0 \to \mathfrak{J}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n , x} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} & \longrightarrow 0 \end{array} \quad .$$

Complétons ce diagramme

$$(\mathcal{O}_s[t_1 , \dots , t_n])^{\wedge}_p \simeq \hat{\mathcal{O}}_s[[v_1 , \dots , v_n]] \qquad ,$$

cet isomorphisme étant défini en appliquant t_i sur $x_i + v_i$ $(i = 1 , 2 , \dots, n)$; d'autre part :

$$\widehat{\mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n,x}} \simeq \hat{\mathcal{O}}_s \hat{\otimes}_k \hat{\mathcal{O}}_{\underset{\sim}{E}^n,(x_1,\dots,x_n)} \simeq \hat{\mathcal{O}}_s[[v_1 , \dots , v_n]] \qquad ,$$

isomorphisme défini en appliquant $q^*(z_i)_x$ sur $x_i + v_i$; on voit donc que $\hat{\psi}_x$ est un isomorphisme. Comme $\mathfrak{J}_x = \eta_x(\mathcal{J}_s \; \mathcal{O}_{S\times \underset{\sim}{E}^n,x} [t_1 , \dots , t_n])$ est engendré par $(\mathcal{J}_s)_p$, on a encore un isomorphisme $\widehat{(\mathcal{J}_s)_p} \simeq \hat{\mathfrak{J}}_x$. La proposition en résulte.

COROLLAIRE. - Le morphisme d'espaces annelés $\hat{f} : X \to (|S| , \mathcal{a})$ (défini au moyen de ξ) est plat, c'est-à-dire que le foncteur $\mathcal{M} \rightsquigarrow \hat{\mathcal{M}} = \hat{f}^*(\mathcal{M})$ de la catégorie des $\mathcal{a}$-Modules dans celle des $\mathcal{O}_X$-Modules, est exact.

3. Spectre analytique d'une Algèbre finie.

DÉFINITION 3. - Soit S un espace analytique sur k (corps valué complet non discret). On dit qu'une $\mathcal{O}_S$-Algèbre $\mathcal{a}$ est finie si c'est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_S$-Modules.

PROPOSITION 5. - Toute $\mathcal{O}_S$-Algèbre finie $\mathcal{a}$ est de présentation finie (comme Algèbre).

Soit $s \in S$; la fibre $\mathcal{a}_s$ est un $\mathcal{O}_s$-Module de type fini, engendré par des éléments $\sigma_{i,s}$ $(1 \leq i \leq n)$ qui sont entiers sur $\mathcal{O}_s$; pour chaque i , soit $F_{i,s}(\sigma_{i,s}) = 0$ une équation de dépendance intégrale : $F_{i,s} \in \mathcal{O}_s[t_i]$ est un polynôme unitaire $(i = 1 , \dots , n)$. Dans un voisinage U assez petit de s , il existe des sections $\sigma_i \in \Gamma(U , \mathcal{O}_S)$, de germes respectifs $\sigma_{i,s}$ en s

$(1 \leqslant i \leqslant n)$, qui engendrent $\mathcal{A}|U$, ainsi que des polynômes unitaires $F_i \in \Gamma(U , \mathcal{O}_S[t_i])$, de germes respectifs $F_{i,s}$ en s $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et tels que $F_i(\sigma_i) = 0$ pour $i = 1 , \dots , n$. Le faisceau $\mathcal{B} = \mathcal{O}_U[t_1 , \dots , t_n]/(F_1 , \dots , F_n)$ est cohérent, et on a un homomorphisme surjectif $\mathcal{B} \to \mathcal{A}|U$, puisque les σ_i engendrent $\mathcal{A}|U$; le noyau $\mathfrak{J}$ de cet homomorphisme est de type fini ; on peut trouver un voisinage $V \subset U$ de s tel que $\mathfrak{J}|V$ soit engendré par des sections $\overline{G}_1 , \dots , \overline{G}_m$. Si $G_1 , \dots , G_m \in \Gamma(V , \mathcal{O}_S[t_1 , \dots , t_n])$ relèvent $\overline{G}_1 , \dots , \overline{G}_m$, on a

$$\mathcal{A}|V \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_V[t_1 , \dots , t_n]/(F_1 , \dots , F_n , G_1 , \dots , G_m) \quad .$$

Conséquence : toute $\mathcal{O}_S$-Algèbre finie $\mathcal{A}$ définit un espace analytique $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ au-dessus de S .

PROPOSITION 6. - *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_S$-Algèbre finie. Si $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ et $s \in S$, la fibre X_s a un nombre fini de points, en correspondance bijective avec les idéaux maximaux $\mathfrak{n}$ de $\mathcal{A}_s$ tels que : $\mathcal{A}_s/\mathfrak{n} \cong k$. Si $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal qui correspond à un point $x \in X_s$, on a un isomorphisme $\varphi_x : (\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}$.*

On reprend les énoncés des propositions 3 et 4, en remarquant que $\mathcal{A}_s$ est un anneau semi-local (car $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}_s/\mathfrak{m}_s \mathcal{A}_s$ est de rang fini sur k , donc artinien ; de plus tout idéal maximal de $\mathcal{A}_s$ contient $\mathfrak{m}_s \mathcal{A}_s$, d'après le théorème de Cohen-Seidenberg). D'autre part $\hat{\varphi}_x : \widehat{(\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}}} \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ et $(\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}}$ étant séparé, φ_x est injectif ; comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est quasi-fini sur $\mathcal{O}_s$ (puisque $(\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}}$ l'est), il résulte du théorème de préparation que $\mathcal{O}_{X,x}$ est fini sur $\mathcal{O}_s$; on en conclut par le lemme de Nakayama (ou par le théorème de Krull) que φ_x est aussi surjectif.

COROLLAIRE 1. - *Soit (X , x) un germe analytique, et soient $f_1 , \dots , f_n$ des générateurs d'un idéal de définition de $\mathcal{O}_{X,x}$. Considérons (X , x) comme germe au-dessus de $(\underset{\sim}{E}^n , 0)$ au moyen du morphisme $(X , x) \to (\underset{\sim}{E}^n , 0)$ défini par $(f_1 , \dots , f_n)$. Il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\underset{\sim}{E}^n$ et une $\mathcal{O}_U$-Algèbre finie $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{O}_{X,x}$; le spectre $X' = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ a un seul point x' au-dessus de 0 , et (X , x) est $(\underset{\sim}{E}^n , 0)$-isomorphe à (X' , x') .*

Ceci résulte de la proposition 6 en utilisant le corollaire 1.4 (ii) de l'exposé 13, le théorème de préparation et le lemme suivant.

LEMME 1. - *Soient S un espace analytique et $s \in S$; considérons une $\mathcal{O}_{S,s}$-algèbre finie A ; il existe un voisinage ouvert U de s dans S et une*

<u>$\mathcal{O}_U$-Algèbre finie</u> $\mathcal{A}$ <u>telle que</u> $\mathcal{A}_s \cong A$.

On construit d'abord un voisinage V de s et un $\mathcal{O}_V$-Module cohérent $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}_s \cong A$; pour cela on utilise une présentation finie $\mathcal{O}^p_{S,s} \xrightarrow{u} \mathcal{O}^q_{S,s} \to A \to 0$ de A ; si (u_{ij}) est la matrice de u , il existe un voisinage V de s et des sections f_{ij} de $\mathcal{O}_S$ dans V telles que $(f_{ij})_s = u_{ij}$ pour tout couple (i , j) ; la matrice (f_{ij}) définit un homomorphisme $\mathcal{O}^p_V \to \mathcal{O}^q_V$ dont le conoyau est le faisceau $\mathcal{F}$ cherché..

Comme $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{F}$ est cohérent, il existe un voisinage $W \subset V$ de s et un homomorphisme $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{F}|W \to \mathcal{F}|W$ dont le germe en s s'identifie à la multiplication $A \otimes_{\mathcal{O}_s} A \to A$ de l'algèbre A ; on peut alors trouver un voisinage $U \subset W$ de s dans lequel cet homomorphisme munit $\mathcal{A} = \mathcal{F}|U$ d'une structure d' $\mathcal{O}_U$-Algèbre.

COROLLAIRE 2. - <u>Toute algèbre analytique est un anneau local hensélien.</u>

Pour la définition et les caractérisations équivalentes des anneaux locaux henséliens, nous renvoyons à l'appendice. Nous utiliserons ici la caractérisation suivante :

<u>Pour qu'un anneau local</u> A <u>soit hensélien, il faut et il suffit que pour toute</u> <u>A-algèbre finie</u> B <u>et pour tout idéal maximal</u> $\mathfrak{n}$ <u>de</u> B , <u>le localisé</u> $B_{\mathfrak{n}}$ <u>soit fini sur</u> A .

Lorsque A est une algèbre analytique, le lemme 1 et la proposition 6 montrent que $B_{\mathfrak{n}}$ est un algèbre analytique finie sur A , pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B tel que $B/\mathfrak{n} = k$. Considérons un idéal maximal quelconque $\mathfrak{n}$ de B , et posons $K = B/\mathfrak{n}$; c'est une extension finie de k . Nous introduisons les algèbres $A' = A \otimes_k K$ et $B' = B \otimes_k K$; A' est une algèbre analytique sur le corps K , et B' est finie sur A' . A l'idéal $\mathfrak{n}$ de B correspond un idéal maximal $\mathfrak{n}'$ de B' , noyau de l'homomorphisme de B' sur K qui prolonge $B \to K$; de $B'/\mathfrak{n}' = K$, on déduit que $B'_{\mathfrak{n}'}$ est fini sur A' , donc sur A (A' est finie sur A). Il en résulte que $B_{\mathfrak{n}}$ est fini sur A , car l'homomorphisme canonique $B_{\mathfrak{n}} \to B'_{\mathfrak{n}'}$ est visiblement injectif (et A est noethérien). Ceci démontre le corollaire 2.

PROPOSITION 7. - <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>une</u> <u>$\mathcal{O}_S$-Algèbre finie. Le morphisme structural</u> f : $\mathrm{Specan}(\mathcal{A}) \to S$ <u>de son spectre analytique est une application fermée.</u>

Comme la propriété est locale sur S , on se ramène immédiatement au cas où $\mathcal{A}$ est engendrée par des sections σ_1 , ... , σ_n soumises à des relations $F_i(\sigma_i) = 0$,

F_i polynôme unitaire appartenant à $\Gamma(\mathcal{O}_S)[t_i]$ $(i = 1 , \ldots , n)$ et $G_j(\sigma_1 , \ldots , \sigma_n) = 0$ $(j = 1 , \ldots , m)$, de sorte que $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ avec $\mathfrak{B} = \mathcal{O}_S[t_1 , \ldots , t_n]/(F_1 , \ldots , F_n)$ (cf. la démonstration de la proposition 5). On a alors une immersion fermée Specan($\mathfrak{A}$) $\to$ Specan($\mathfrak{B}$) , et il suffit évidemment de prouver la propriété pour le morphisme structural de Specan($\mathfrak{B}$) ; elle résulte de l'énoncé suivant, plus précis :

Soit (x_p) une suite de points de Specan($\mathfrak{B}$) telle que $s_p = f(x_p)$ converge vers un point $s \in S$. Il existe une sous-suite de (x_p) qui converge.

En remarquant que Specan($\mathfrak{B}$) $\simeq$ Specan($\mathcal{O}_S[t]/(F_1)$) $\times_S \ldots \times_S$ Specan($\mathcal{O}_S[t]/(F_n)$) d'après la proposition 2 (ii), on voit qu'il suffit de prouver cet énoncé dans le cas où $n = 1$. Pour Specan($\mathcal{O}_S[t]/(F)$) $\subset S \times E$, le résultat provient du

LEMME 2 (continuité des racines). - Soit (F_p) une suite de polynômes unitaires de même degré $d \geq 1$, à coefficients dans k ; supposons que les coefficients de F_p convergent respectivement (pour p infini) vers ceux d'un polynôme $F \in k[t]$. Si pour tout p , $x_p \in k$ est une racine de F_p , il existe une sous-suite de la suite (x_p) qui converge (sa limite est alors une racine de F).

Comme k est complet, cela signifie que (x_p) contient une sous-suite de Cauchy. Supposons le contraire ; on peut alors trouver $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier N il existe des indices $p_1 , \ldots , p_{d+1} \geq N$ possédant la propriété suivante : si $i \neq j$ $(1 \leq i , j \leq d + 1)$, on a $|x_{p_i} - x_{p_j}| > \varepsilon$.

D'après la formule d'interpolation de Lagrange

$$F(x) = \sum_{i=1}^{d+1} \left((x-x_{p_1})\cdots\widehat{(x-x_{p_i})}\cdots(x-x_{p_{d+1}})/(x_{p_i}-x_{p_1})\cdots(x_{p_i}-x_{p_{d+1}})\right) F(x_{p_i})$$

pour tout $x \in k$, les x_{p_i} étant choisis comme on vient de l'indiquer, avec $p_i \geq N$ entier assez grand pour que $q \geq N$ entraîne $|F(x) - F_q(x)| \leq \eta$ ($\eta > 0$ fixé arbitrairement) quel que soit x dans une boule qui contient toutes les racines des polynômes F_p . Une telle boule existe bien, car les polynômes en question étant unitaires, une majoration de leurs coefficients entraîne une majoration des racines.

Si x appartient à la boule $|x| \leq \rho$ qui a servi à déterminer N , on a

$$|F(x)| \leq (2\rho/\varepsilon)^d \sum |F(x_{p_i})| \leq (d + 1)(2\rho/\varepsilon)^d \eta \qquad ,$$

car

$$|F(x_{p_i})| = |F(x_{p_i}) - F_{p_i}(x_{p_i})| \leqslant \eta \quad .$$

Comme η est arbitraire, il en résulte que $F(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| \leqslant \rho$, donc que $F = 0$ (k n'est pas discret), ce qui est absurde.

COROLLAIRE. - $f : \mathrm{Specan}(\mathfrak{A}) \to S$ <u>est une application propre.</u>

Car f est fermée et ses fibres sont finies, donc quasi-compactes (cf. [1], Chapître 1, § 10, théorème 1).

PROPOSITION 8. - <u>Soit $\mathfrak{A}$ une $\mathcal{O}_S$-Algèbre finie à extensions résiduelles triviales. Pour tout $\mathfrak{A}$-Module $\mathfrak{M}$, l'homomorphisme canonique $\mathfrak{M} \to f_*(\tilde{\mathfrak{M}})$ est un isomorphisme. En particulier,</u> $\mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$ ($X = \mathrm{Specan}(\mathfrak{A})$).

L'hypothèse sur $\mathfrak{A}$ (extensions résiduelles triviales) signifie que pour tout $s \in S$ et pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{A}_s$, $\mathfrak{A}_s/\mathfrak{n} \cong k$; elle est automatiquement vérifiée si k est algébriquement clos.

Par définition

$$f_*(\tilde{\mathfrak{M}})_s = \varinjlim_{U \ni s} \Gamma(f^{-1}(U) , \tilde{\mathfrak{M}}) \qquad ;$$

comme f est fermée, les $f^{-1}(U)$ forment un système fondamental de voisinages de la fibre X_s ; donc, f étant séparée, pour U assez petit $f^{-1}(U) \cong \coprod_{x_i \in X_s} V_i$ (réunion disjointe), et V_i parcourt un système fondamental de voisinages de x_i . Alors

$$\Gamma(f^{-1}(U) , \tilde{\mathfrak{M}}) \cong \prod \Gamma(V_i , \tilde{\mathfrak{M}}) \qquad ,$$

d'où à la limite

$$f_*(\tilde{\mathfrak{M}})_s \cong \prod_{x_i \in X_s} \tilde{\mathfrak{M}}_{x_i} \cong \prod \tilde{\mathfrak{M}}_s \otimes_{\mathfrak{A}_s} \mathcal{O}_{X,x_i} \cong \mathfrak{M}_s \otimes_{\mathfrak{A}_s} \prod (\mathfrak{A}_s)_{\mathfrak{n}_i} \cong \mathfrak{M}_s$$

puisque $\mathfrak{A}_s$ est isomorphe à $\prod (\mathfrak{A}_s)_{\mathfrak{n}_i}$ (propriété hensélienne de $\mathcal{O}_{S,s}$, cf. corollaire 2 de la proposition 6, jointe au fait que tous les idéaux maximaux de

$\mathcal{A}_s$ figurent parmi les $\mathfrak{n}_i$, à cause de l'hypothèse des extensions résiduelles triviales).

PROPOSITION 9. - <u>Soit</u> $\mathcal{A}$ <u>une</u> $\mathcal{O}_S$<u>-Algèbre finie à extensions résiduelles triviales. Posons</u> $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$. <u>Pour tout</u> $\mathcal{O}_X$<u>-Module</u> $\mathcal{F}$ <u>l'homomorphisme canonique</u> $\widetilde{f_*(\mathcal{F})} \to \mathcal{F}$ <u>est un isomorphisme</u>.

En effet, pour tout $s \in S$, on a comme dans la démonstration précédente

$$f_*(\mathcal{F})_s = \prod_{x_i \in X_s} \mathcal{F}_{x_i} \qquad ,$$

d'où

$$\widetilde{f_*(\mathcal{F})}_{x_i} \cong f_*(\mathcal{F})_s \otimes_{\mathcal{A}_s} \mathcal{O}_{X,x_i} \cong \prod_{x_j \in X_s} (\mathcal{F}_{x_j} \otimes_{\mathcal{A}_s} (\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}_i}) \qquad .$$

Or

$$\mathcal{F}_{x_j} \otimes_{\mathcal{A}_s} (\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}_i} \cong \mathcal{F}_{x_j} \otimes_{(\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}_j}} ((\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}_j} \otimes_{\mathcal{A}_s} (\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}_i}) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

et

$$\cong \mathcal{F}_{x_i} \quad \text{si} \quad i = j$$

(on le voit tout de suite en utilisant $\mathcal{A}_s \cong \prod (\mathcal{A}_s)_{\mathfrak{n}_i}$). Ainsi

$$\widetilde{f_*(\mathcal{F})}_{x_i} \cong \mathcal{F}_{x_i}$$

ce qui démontre la proposition, car cet isomorphisme est bien induit par l'homomorphisme canonique

$$\widetilde{f_*(\mathcal{F})} \to \mathcal{F} \qquad .$$

COROLLAIRE 1. - <u>Sous les conditions de la proposition 9, les foncteurs covariants additifs</u> $\hat{f}^*$: $\mathfrak{M} \rightsquigarrow \widetilde{\mathfrak{M}}$ <u>(de la catégorie des</u> $\mathcal{A}$<u>-Modules dans celle des</u>

$\mathcal{O}_X$-Modules) et $f_* : \mathcal{F} \rightsquigarrow f_*(\mathcal{F})$ (de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules dans celle des $\mathcal{A}$-Modules) sont quasi-inverses l'un de l'autre ; ils définissent ainsi une équivalence entre les deux catégories considérées.

COROLLAIRE 2. - Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, $f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent.

$\mathcal{F}$ admet une présentation finie

$$\mathcal{O}_X^p \to \mathcal{O}_X^q \to \mathcal{F} \to 0 \qquad .$$

Comme, d'après le corollaire 1, le foncteur image directe f_* est exact, il transforme cette suite exacte en une suite exacte :

$$\mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^q \to f_*(\mathcal{F}) \to 0$$

qui montre que $f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{A}$-Module de présentation finie ; comme $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent, il en résulte que $f_*(\mathcal{F})$ est aussi un $\mathcal{O}_S$-Module cohérent.

PROPOSITION 10. - Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des $\mathcal{O}_S$-Algèbres de présentation finie. Posons

$$X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad Y = \mathrm{Specan}(\mathcal{B}) \qquad .$$

Si $\mathcal{A}$ est finie et à extensions résiduelles triviales, on a une bijection canonique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(X, Y)$.

L'application canonique $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}(X, Y)$ donnée par la proposition 2 (i) (caractère fonctoriel du spectre analytique) se factorise en effet en

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{B}, f_*(\mathcal{O}_X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}_X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}_S(X, Y)$$

(f = morphisme structural de X ; $\mathcal{B}_X = f^*(\mathcal{B})$). La première flèche est bijective d'après l'hypothèse sur $\mathcal{A}$ et la proposition 8, la deuxième par définition de $\mathcal{B}_X$, et la troisième par définition de $Y = \mathrm{Specan}(\mathcal{B})$.

COROLLAIRE. - Le foncteur contravariant Specan $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_S$-Algèbres finies à extensions résiduelles triviales dans celle des espaces analytiques au-dessus de S , est pleinement fidèle.

4. Cas où le corps de base k est algébriquement clos (Nullstellensatz analytique).

Nous aurons besoin de quelques préliminaires sur les germes. A côté des germes analytiques (cf. exposé 13), on introduit de façon analogue la catégorie des germes d'espaces topologiques, ou germes topologiques. Si (X, x) est un germe analytique, le germe topologique $(|X|, x)$, où $|X|$ désigne l'espace topologique sous-jacent à X, est dit sous-jacent à (X, x) ; on a ainsi un foncteur "germe topologique sous-jacent" de la catégorie des germes analytiques dans celle des germes topologiques.

Soit (X, x) un germe analytique. Si Y est un sous-espace analytique de X contenant x, on dit que le germe (Y, x) muni du morphisme d'inclusion $(Y, x) \to (X, x)$, est un sous-germe analytique de (X, x). On définit d'une manière analogue la notion de sous-germe d'un germe topologique. Si (X, x) est un germe analytique, on dit qu'un sous-germe de $(|X|, x)$ est un germe de partie analytique s'il est sous-jacent à un sous-germe analytique de (X, x), c'est-à-dire de la forme $(|Y|, x)$ où Y est un sous-espace analytique de X contenant x.

Dans la suite, nous ferons constamment l'abus de langage qui consiste à identifier deux sous-germes analytiques isomorphes de (X, x) ; de même pour les sous-germes d'un germe topologique. Nous dirons, par exemple, que deux sous-germes sont distincts, au lieu de dire qu'ils ne sont pas isomorphes, et quand nous parlerons de l'ensemble des sous-germes, il faudra comprendre l'ensemble des classes de sous-germes à un isomorphisme près. Ainsi l'application qui, à un sous-germe analytique (Y, x) de (X, x) associe le noyau de l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,x}$, est une bijection décroissante J de l'ensemble des sous-germes analytiques de (X, x) sur l'ensemble des idéaux de $\mathcal{O}_{X,x}$; si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$, la bijection réciproque de J le transforme en (Y, x), où Y est le sous-espace analytique d'un voisinage ouvert U de x défini par un $\mathcal{O}_U$-Idéal $\mathfrak{J}$ tel que $\mathfrak{J}_x = \mathfrak{a}$. Dans cette correspondance bijective, aux idéaux premiers de $\mathcal{O}_{X,x}$ correspondent les sous-germes intègres de (X, x) (un germe est dit intègre si son anneau local l'est). Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, nous désignerons par $W(\mathfrak{a})$ le germe topologique sous-jacent au sous-germe analytique de (X, x) qui correspond à $\mathfrak{a}$. Avec les notations précédentes,

$$W(\mathfrak{a}) = (\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathfrak{J}), x) \quad .$$

W est une application surjective et décroissante de l'ensemble des idéaux de $\mathcal{O}_{X,x}$ sur l'ensemble des germes de parties analytiques de (X, x).

L'ensemble des sous-germes analytiques de $(X\ ,\ x)$ est réticulé. Si $(Y\ ,\ x)$ et $(Z\ ,\ x)$ sont deux sous-germes analytiques, leur borne inférieure, appelée aussi intersection, est le sous-germe $(Y\ ,\ x) \cap (Z\ ,\ x)$ défini par l'idéal $J(Y\ ,\ x) + J(Z\ ,\ x)$; de même leur borne supérieure ou réunion $(Y\ ,\ x) \cup (Z\ ,\ x)$ est définie par l'idéal $J(Y\ ,\ x) \cap J(Z\ ,\ x)$; on a visiblement

$$(Y\ ,\ x) \cap (Z\ ,\ x) = (Y \cap Z\ ,\ x) \quad \text{et} \quad (Y\ ,\ x) \cup (Z\ ,\ x) = (Y \cup Z\ ,\ x) \qquad .$$

On emploiera les mêmes notations de reunion et intersection pour les sous-germes d'un germe topologique qui forment aussi un ensemble réticulé. Si $(Y\ ,\ x)$ et $(Z\ ,\ x)$ sont deux sous-germes analytiques d'un germe analytique $(X\ ,\ x)$, le germe de partie analytique sous-jacent à $(Y\ ,\ x) \cap (Z\ ,\ x)$ (resp. $(Y, x) \cup (Z\ , x)$) est

$$(|Y \cap Z|\ ,\ x) = (|Y| \cap |Z|\ ,\ x) = (|Y|\ ,\ x) \cap (|Z|\ ,\ x)$$

$$(\text{resp.}\ \ (|Y|\ ,\ x) \cup (|Z|\ ,\ x)\ ).$$

On dit qu'un germe de partie analytique de $(X\ ,\ x)$ est <u>irréductible</u> s'il n'est pas réunion de deux germes de parties analytiques distincts de lui.

THÉORÈME 1 (Nullstellensatz). - <u>Supposons le corps de base</u> k <u>algébriquement clos. Soit</u> $(X\ ,\ x)$ <u>un germe analytique intègre. Pour qu'un sous-germe</u> $(Y\ ,\ x)$ <u>soit distinct de</u> $(X\ ,\ x)$, <u>il faut et il suffit que le germe topologique sous-jacent</u> $(|Y|\ ,\ x)$ <u>soit distinct de</u> $(|X|\ ,\ x)$. <u>Autrement dit, si l'espace analytique</u> X <u>est intègre en un point</u> x , <u>et si un sous-espace analytique</u> Y <u>est un voisinage de</u> x , <u>il est localement isomorphe</u> à X <u>en</u> x .

La condition est évidemment suffisante. Pour prouver qu'elle est nécessaire, considérons un sous-germe $(Y\ ,\ x) \neq (X\ ,\ x)$. L'idéal $J(Y\ ,\ x)$ est non nul. Soit f un élément non nul de $J(Y\ ,\ x)$. Désignons par $(Y'\ ,\ x)$ le sous-germe analytique de $(X\ ,\ x)$ d'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}/(f)$; on a

$$(Y\ ,\ x) \subset (Y'\ ,\ x) \qquad ,$$

donc il suffit de montrer que

$$(|Y'|\ ,\ x) \neq (|X|\ ,\ x) \qquad .$$

On remplacera donc (Y , x) par (Y' , x) , ce qui revient à se placer dans le cas où $J(Y , x) = (f)$ est un idéal principal.

Comme $f \neq 0$ et comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre,

$$\dim(\mathcal{O}_{X,x}/(f)) = \dim \mathcal{O}_{X,x} - 1 \qquad .$$

Soit $(\bar{f}_1 , \dots , \bar{f}_{n-1})$ un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}/(f)$, que nous relevons en $(f_1 , \dots , f_{n-1})$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$; $(f_1 , \dots , f_{n-1} , f)$ est alors un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit φ (resp. ψ) le morphisme de (X , x) dans $(\underset{\sim}{E}^n , 0)$ (resp. de (Y , x) dans $(\underset{\sim}{E}^{n-1} , 0)$) défini par $(f_1 , \dots , f_{n-1} , f)$ (resp. $(f_1 , \dots , f_{n-1})$) ; on va démontrer le théorème en prouvant que φ est <u>surjectif</u> (au sens des germes d'espaces topologiques) ; en effet le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (Y , x) & \hookrightarrow & (X , x) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ (\underset{\sim}{E}^{n-1} , 0) & \hookrightarrow & (\underset{\sim}{E}^n , 0) \end{array}$$

est commutatif, et

$$(|\underset{\sim}{E}^{n-1}| , 0) \neq (|\underset{\sim}{E}^n| , 0) \qquad .$$

D'après le corollaire de la proposition 6, on peut supposer que $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est une Algèbre finie sur un voisinage U de 0 dans $\underset{\sim}{E}^n$: $\mathcal{A}_o \cong \mathcal{O}_{X,x}$ et l'homomorphisme $k\{t_1 , \dots , t_n\} = \mathcal{O}_{\underset{\sim}{E}^n,o} \to \mathcal{A}_o$ est injectif puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est de dimension n (corollaire 3 (b) du théorème 1, exposé 18).

LEMME 1. - <u>Soient</u> S <u>un espace analytique sur le corps algébriquement clos</u> k , <u>et</u> $\mathcal{A}$ <u>une</u> $\mathcal{O}_S$<u>-Algèbre finie. L'image de</u> $X = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$ <u>par son morphisme structural</u> $\varphi : X \to S$ <u>est le support du faisceau</u> $\mathcal{A}$.

En effet la fibre X_s de X en un point $s \in S$ est en correspondance bijective avec l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{A}_s$, puisque k est algébriquement clos, donc $\mathcal{A}_s/\mathfrak{n} \cong k$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ (proposition 6). Pour que s appartienne à $\varphi(X)$, il faut et il suffit que $\mathcal{A}_s$ possède au moins un idéal maximal, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}_s \neq 0$.

LEMME 2. - *Soient* $\mathfrak{a}$ *une Algèbre finie sur un espace analytique* S *et* $s \in S$; *si l'homomorphisme* $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathfrak{a}_s$ *est injectif,* $\mathrm{Supp}(\mathfrak{a})$ *est un voisinage de* s.

En effet le noyau de $\mathcal{O}_S \to \mathfrak{a}$ est nul en s, donc nul dans un voisinage de s puisque c'est un faisceau cohérent.

Ces deux lemmes terminent la démonstration.

COROLLAIRE 1. - *Soit* (X, x) *un germe analytique (sur un corps algébriquement clos* k *).*

a. *Si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont des idéaux de* $\mathcal{O}_{X,x}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $W(\mathfrak{a}) \subset W(\mathfrak{b})$;

(ii) $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ (*racine de* $\mathfrak{a}$) ;

(iii) $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$;

(iv) *il existe un entier* $n \geqslant 1$ *tel que* $\mathfrak{b}^n \subset \mathfrak{a}$.

b. *Pour que* $W(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{b})$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$.

c. W *induit une bijection :* $\mathfrak{p} \rightsquigarrow W(\mathfrak{p})$ *de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ *sur l'ensemble des germes de parties analytiques irréductibles de* (X, x).

Les assertions (b) et (c) se déduisent immédiatement de (a). L'équivalence de (ii), (iii) et (iv) est connue ; (iv) entraîne (i) car si U est un voisinage ouvert de x dans X, et si $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont des $\mathcal{O}_U$-Idéaux de type fini, $\mathfrak{J}^n \subset \mathfrak{I}$ entraîne $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathfrak{I}) \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_U/\mathfrak{J})$. Réciproquement, pour prouver que (i) entraîne (ii), il suffit de montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$, la condition : $W(\mathfrak{p}) \subset W(\mathfrak{b})$ entraîne $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$ (puisque $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ est l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$). Désignons par (Y, x) le sous-germe analytique intègre défini par l'idéal premier $\mathfrak{p}$, et par (Z, x) le sous-germe analytique défini par $\mathfrak{b}$; l'intersection $(Y, x) \cap (Z, x)$ est un sous-germe analytique de (Y, x) dont le germe topologique sous-jacent est

$$(|Y|, x) \cap (|Z|, x) = W(\mathfrak{p}) \cap W(\mathfrak{b}) = W(\mathfrak{p}) \quad \text{si} \quad W(\mathfrak{p}) \subset W(\mathfrak{b}) .$$

Comme (Y, x) est intègre, on peut appliquer le théorème 1 qui montre que $(Y, x) \cap (Z, x) = (Y, x)$ c'est-à-dire $(Y, x) \subset (Z, x)$ ou encore $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$.

Pour toute partie T de l'espace X, nous désignerons par T_x l'ensemble des idéaux premiers $p \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ tels que $W(p) \subset (T, x)$. Le corollaire 1 peut encore s'exprimer en disant que l'application $(T, x) \rightsquigarrow T_x$ induit une bijection croissante l'ensemble des germes de parties irréductibles de (X, x) sur l'ensemble des parties fermées de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$.

COROLLAIRE 2. - *Soient* (X, x) *un germe analytique et* (Y, x) *un sous-germe. Pour que* $(|Y|, x) = (|X|, x)$, *il faut et il suffit que* $J(Y, x) = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,x})$ *soit nilpotent.*

Si $\dim(\mathcal{O}_{Y,x}) < \dim(\mathcal{O}_{X,x})$, *alors* $(|Y|, x) \neq (|X|, x)$.

Nous allons traduire les résultats précédents, relatifs à des germes d'espaces analytiques, en des énoncés portant sur les espaces analytiques eux-mêmes.

COROLLAIRE 3. - *Soit* X *un espace analytique. Considérons un sous-espace analytique fermé* Y *défini par un Idéal* $\mathfrak{I}$. *Pour que* $|Y| = |X|$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{I}$ *soit localement nilpotent.*

Si $\mathfrak{I}$ *et* $\mathfrak{J}$ *sont deux faisceaux d'idéaux de type fini de* $\mathcal{O}_X$, *pour que* $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{I}) \subset \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{J})$, *il faut et il suffit que pour tout point* x *de* X *il existe un voisinage* U *de* x *et un entier* $n \geq 1$ *tels que* $\mathfrak{J}^n|U \subset \mathfrak{I}|U$.

COROLLAIRE 4. - *Soit* X *un espace analytique. Considérons une section* $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ *de son faisceau structural. Pour que* f *s'annule en chaque point de* X, *c'est-à-dire que* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in X$, *il faut et il suffit que* f *soit localement nilpotente.*

COROLLAIRE 5. - *Soient* X *et* Y *deux espaces analytiques. Supposons* X *réduit, et considérons deux morphismes* f *et* f' *de* X *dans* Y. *Pour que* $f = f'$, *il faut et il suffit que* f *et* f' *aient même application continue sous-jacente.*

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on se ramène immédiatement au cas où $Y = \underset{\sim}{E}^n$; cela résulte alors du corollaire 5 et de $\mathrm{Hom}(X, \underset{\sim}{E}^n) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ (théorème 1.1 de l'exposé 10).

COROLLAIRE 6. - *Pour qu'un point* x *d'un espace analytique* X *soit isolé, il faut et il suffit que son anneau local* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit artinien (i. e. de dimension* 0 *).*

Car dire que x est isolé, c'est dire que $(|X|, x) = (\{x\}, x)$. On applique le corollaire 2.

COROLLAIRE 7. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Pour qu'un point x de X soit isolé dans sa fibre $f^{-1}(f(x))$, il faut et il suffit que f soit quasi-fini en x, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit quasi-fini, donc fini sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$.

Posons $y = f(x)$. D'après le corollaire 6, pour que x soit isolé dans $f^{-1}(y) = |X_y|$, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_{X_y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/m_y\,\mathcal{O}_{X,x}$ soit artinien (m_y est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,y}$) c'est-à-dire de rang fini sur k ; ceci signifie que $\mathcal{O}_{X,x}$ est quasi-fini sur $\mathcal{O}_{Y,y}$, ce qui équivaut à fini sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ grâce au théorème de préparation (exposé 18, théorème 1).

5. Morphismes finis.

DÉFINITION. - On dit qu'un morphisme $f : X \to S$ d'espaces analytiques est fini s'il est séparé et fermé, et si ses fibres sont finies.

Remarquons que ces conditions sont de nature purement topologique ; elles sont équivalentes aux suivantes : f est séparé et propre et ses fibres sont discrètes (cf. [1], chapître 1, § 10, théorème 1).

Si $f : X \to S$ est un morphisme fini, on dit que (X, f) est un espace analytique fini au-dessus de S.

Exemple : Pour toute $\mathcal{O}_S$-Algèbre finie $\mathcal{A}$, Specan($\mathcal{A}$) est un espace analytique fini au-dessus de S (propositions 1, 5 et 7).

THÉORÈME 2. - Soit S un espace analytique sur un corps k valué complet non discret et algébriquement clos. Le foncteur Specan : $\mathcal{A} \rightsquigarrow$ Specan($\mathcal{A}$) définit une équivalence de la catégorie opposée à celle des $\mathcal{O}_S$-Algèbres finies avec la catégorie des espaces analytiques finis au-dessus de S.

En effet, ce foncteur est pleinement fidèle : comme le corps de base algébriquement clos, les extensions résiduelles d'une Algèbre finie sont automatiquement triviales. On applique le corollaire de la proposition 10.

Il reste à prouver que si (X, f) est un espace analytique fini au-dessus de S, il existe une $\mathcal{O}_S$-Algèbre finie $\mathcal{A}$ tellle que X soit S-isomorphe à Specan($\mathcal{A}$). Remarquons que s'il en est ainsi, on a nécessairement $\mathcal{A} \simeq f_*(\mathcal{O}_X)$ (proposition 8). Il en résulte que la question est locale sur S : si (U_i) est un recouvrement ouvert de S tel que pour tout i il existe une $\mathcal{O}_{U_i}$-Algèbre finie $\mathcal{A}_i$ avec $X_{U_i} \simeq$ Specan($\mathcal{A}_i$), on a

$$\mathcal{A}_i \simeq (f|U_i)_* (\mathcal{O}_{X_{U_i}}) = f_*(\mathcal{O}_X)|U_i \qquad ,$$

ce qui montre que $\mathcal{A} = f_*(\mathcal{O}_X)$ est finie et que $X \simeq \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$.

On peut donc remplacer S par un voisinage U d'un point $s \in S$ tel que

$$f^{-1}(U) \simeq \coprod_{x \in X_s} V_x$$

où V_x est un voisinage du point x de la fibre X_s en s (f est fermée, donc pour U assez petit $f^{-1}(U)$ est un voisinage arbitrairement petit de $f^{-1}(s)$; comme f est séparée et $f^{-1}(s)$ finie, les voisinages assez petits de $f^{-1}(s)$ sont de la forme indiquée). Supposons établi que pour tout $x \in X_s$, V_x est U-isomorphe au spectre d'une Algèbre finie $\mathcal{A}_x$; alors

$$X_U \simeq \mathrm{Specan}(\prod \mathcal{A}_x) \qquad .$$

En effet il résulte immédiatement des propositions 2 et 6 que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux Algèbres finies sur un espace analytique S on a

$$\mathrm{Specan}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \simeq \mathrm{Specan}(\mathcal{A}) \amalg \mathrm{Specan}(\mathcal{B}) \qquad .$$

En remplaçant S par U et X par l'un des V_x , on se ramène ainsi au cas où $f^{-1}(s) = \{x\}$ en un point s choisi dans S . Le corollaire 7 du théorème 1 montre alors que $\mathcal{O}_{X,x}$ est fini sur $\mathcal{O}_{S,s}$; donc il existe un voisinage W de s et une $\mathcal{O}_W$-Algèbre finie $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{A}_s \simeq \mathcal{O}_{X,x}$ (lemme 1). Posons $X' = \mathrm{Specan}(\mathcal{A})$; la fibre X'_s est réduite à un point x' et le germe (X' , x') est (S , s)-isomorphe à (X , x) ; comme les morphismes structuraux de X et de X' sont fermés, on en déduit qu'il existe un voisinage $V \subset W$ de s tel que X_V soit V-isomorphe à $X'_V = \mathrm{Specan}(\mathcal{A}|V)$. Ceci achève la preuve.

COROLLAIRE. - <u>Soit</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme fini d'espaces analytiques. Le foncteur image directe</u> f_* <u>est exact dans la catégorie des</u> $\mathcal{O}_X$<u>-Modules. L'image directe</u> $f_*(\mathcal{F})$ <u>d'un</u> $\mathcal{O}_X$<u>-Module cohérent est un</u> $\mathcal{O}_S$<u>-Module cohérent.</u>

(D'après le théorème précédent et les corollaires de la proposition 9.)

Appendice : Anneaux locaux henséliens (cf. [2], chapitre 3, § 4, exercices 2, 3, 4).

Soient A un anneau local, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $k = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel, et $f : A \to k$ l'homomorphisme canonique. Si $P = \sum a_i X^i$ est un polynôme dans $A[X]$, on désignera par $\overline{f}(P)$ le polynôme $\sum f(a_i) X^i$ dans $k[X]$; si P est unitaire, $\overline{f}(P)$ est unitaire et de même degré que P. L'application : $P \rightsquigarrow \overline{f}(P)$ est un homomorphisme de $A[X]$ dans $k[X]$ qui prolonge f et applique X sur X.

THÉORÈME. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout polynôme unitaire $P \in A[X]$, et toute décomposition de $\overline{f}(P) \in k[X]$ en produit $\overline{f}(P) = \overline{Q}.\overline{Q}'$ de polynômes étrangers unitaires, il existe deux polynômes unitaires Q, Q' dans $A[X]$ tels que $\overline{f}(Q) = \overline{Q}$, $\overline{f}(Q') = \overline{Q}'$ et $P = Q.Q'$.

(ii) Toute algèbre commutative sur A, qui est un A-module de type fini, est composée directe de A-algèbres qui sont des anneaux locaux.

(iii) Pour toute algèbre commutative B sur A qui est un A-module de type fini, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, le localisé $B_{\mathfrak{n}}$ est un A-module de type fini.

Notons d'abord quelques résultats faciles ou connus. Toute A-algèbre finie B est un anneau semi-local et ses idéaux maximaux contiennent $\mathfrak{m}B$ (théorème de Cohen-Seidenberg).

Si un anneau B est composé direct d'une famille finie d'anneaux locaux, c'est un anneau semi-local, et les anneaux locaux de la décomposition de B sont les localisés $B_{\mathfrak{n}}$ par rapport aux différents idéaux maximaux $\mathfrak{n}$ de B.

Si B est un anneau, l'homomorphisme canonique $B \to \prod_{\mathfrak{n}} B_{\mathfrak{n}}$ ($\mathfrak{n}$ décrivant l'ensemble des idéaux maximaux de B) est injectif. Si B est un anneau semi-local séparé et complet (pour la filtration définie par les puissances de son radical), cet homomorphisme est un isomorphisme.

On en déduit immédiatement que (ii) entraîne (iii), car si B est une A-algèbre finie composée directe de A-algèbres qui sont des anneaux locaux, ces composants locaux sont les localisés $B_{\mathfrak{n}}$ de B par rapport à ses différents idéaux maximaux ; les $B_{\mathfrak{n}}$ sont donc isomorphes à des quotients de B et sont par suite finis sur A.

On en déduit aussi qu'un anneau local séparé et complet satisfait à la condition (ii). Pour prouver que (iii) entraîne (ii), considérons une A-algèbre finie B telle que $B_{\mathfrak{n}}$ soit finie sur A pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B ; alors $B' = \prod_{\mathfrak{n}} B_{\mathfrak{n}}$ est finie sur A et on a une injection canonique : $B \to B'$. Par passage aux complétés (pour les filtrations $\mathfrak{m}$-adiques qui sont équivalentes aux filtrations d'anneaux semi-locaux de B et B'), cet homomorphisme devient un isomorphisme $\hat{B} \tilde{\to} \hat{B}'$; comme B' est fini sur A, on en déduit par le lemme de Nakayama que $B \tilde{\to} B'$.

Pour l'équivalence de (i) et (ii) (que nous n'utiliserons pas dans la suite), nous renvoyons aux exercices 2 et 3 de Bourbaki [2], chapitre 3, § 4.

On dit qu'un anneau local A est <u>hensélien</u> s'il satisfait aux conditions équivalentes (i), (ii), (iii) du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chapitres 1-2. - Paris, Hermann, 1940 (Act. scient. et ind., 858 ; Eléments de Mathématique, 2).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chapitres 3 et 4. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1293 ; Eléments de Mathématique, 28).