Varianten des Spektraltheorems

Willi Schwarz

14. Januar 2021

Inhalt

- Multiplikationsoperatoren
- Funktionalkalkül
  - Polynomiales Spektraltheorem
  - Stetiger Funktionalkalkül
  - Multiplikationsoperator Version

Inhalt

Operatoren auf Hilberträumen

linear	$\mathcal{L}(H)$
beschränkt	$\mathcal{B}(H)$
normal	$A A^* = A^* A$

unitär $A A^* = A^* A = I$

selbstadjungiert $A = A^*$

Multiplikationsoperatoren

f beschränkt	$L^\infty(X; dx) \ni f$	m_f	beschränkt
f stetig, reell	$C(X;\mathbb{R}) \ni f$	m_f	selbstadjungiert

Zum Kontext

- X Hausdorff mit abzählbarer Basis der Topologie
- X lokal-kompakt
- Punkttrennungseigenschaft durch stetige Funktionen

Raum der wesentlich beschränkten Funktionen

Definition

- *Sei* (X, dx) *Radon-Maß*
- *Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{C}$ *heisst wesentlich beschränkt, wenn* $|f(x)| \leqq C$, *mit* $C \in \mathbb{R}, C \geq 0$ *fast überall gilt mit Ausnahme einer Nullmenge* $N_C = \{x \in X| \; |f(x)| > C\}, vol(N_C) = 0$
- *Ein solches* C *heisst auch wesentliche Schranke*
- *Mit* $\|f\|_\infty = inf\{C| \; |f(x)| \leq C, \;\; C \geq 0, \; x \in X \setminus N_C\}$ *wird das Infimum über alle wesentlichen Schranken* C *bezeichnet*
- *Dann bezeichne* $\mathcal{L}^\infty(X, dx)$ *den Raum aller wesentlich beschränkten Funktionen*

$L^\infty(X, dx)$ - Raum der wesentlich beschränkten Funktionen

Aussage

- *Nullfunktionen n sind wesentlich beschränkt, d.h.* $\|n\|_\infty$ *ist 0*
- *Auf* $\mathcal{L}^\infty(X, dx)$ *ist* $\|f\|_\infty$ *eine Semi-Norm, d.h. es sind alle Eigenschaften einer Norm erfüllt bis auf:* $\|f\|_\infty = 0$ *impliziert nicht* $f \equiv 0$.
- *Daher Übergang zum Quotientenraum:* $\mathcal{L}^\infty(X, dx)/\mathcal{N}$, *wobei* $\mathcal{N}$ *den Teilraum der Nullfunktionen bezeichne*
- *Auf dem Quotientenraum* $L^\infty(X, dx)$ *wird die Semi-Norm zu einer Norm*
- $L^\infty(X, dx)$ *ist ein Banachraum, wobei dieser auch als "Limes-Raum" der* L^p*-Räume aufgefasst wird*

Anmerkung

- *Der Satz von Riesz-Fischer besagt die Vollständigkeit der* L^p*-Räume für* $1 \leq p \leq \infty$

Multiplikationsoperatoren - Lemma 1

Lemma

Sei $f \in L^\infty(X, dx)$, sei $g \in L^2(X, dx)$. Dann ist $fg \in L^2(X, dx)$. Die Funktion f definiert einen beschränkten linearen Operator

$$m_f : L^2(X, dx) \to L^2(X, dx), \quad g \mapsto fg$$

Für die Norm von m_f gilt $\|m_f\| = \|f\|_\infty$.

Anmerkung

Das Lemma gilt für allgemeines p, $1 \leq p < \infty$, nicht nur für $p = 2$.

Lemma 1: Beweis

Beweis

Sei $g \in L^2(X, dx)$.

- *Wegen* $|f| \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2 \Rightarrow fg \in L^2(X, dx)$ *,* m_f *ist beschränkter Operator und* $\|m_f\| \leq \|f\|_\infty$
- *Wir zeigen die umgekehrte Ungleichung. Sei zunächst f quadratisch integrierbar. f angewendet auf sich selber ergibt* $\|f\|_\infty \leq \|m_f\|$*. Das sieht man folgendermassen ein:*
- *Ist insbesondere* $C = 0$ *gilt* $\|m_f\| = \|f\|_\infty$*. Sei* $C > 0$ *und setze für* $\epsilon \in]0, C]$, $A_\epsilon = \{x \in X | \, |f(x)| \geq C - \epsilon\}$*. Dann gilt: die "Levelmenge"* A_ϵ *ist messbar,* $vol(A_\epsilon) > 0$ *wg. der Wahl von* ϵ*,* $f\chi_{A_\epsilon} = f_\epsilon$ *ist quadratisch integrierbar und folgende Abschätzung:* $(*) \quad \|m_f f_\epsilon\|_2^2 = \|f f_\epsilon\|_2^2 \geq (C - \epsilon)^2 \|f_\epsilon\|_2^2$
- *Damit folgt* $(**) \quad \|m_f\| \geq (C - \epsilon)$ *für beliebiges* $\epsilon \in]0, C]$ *und somit* $\|m_f\| = C$

Lemma 1: Beweis (cont'd)

Beweis

- *Ist f nicht quadratisch integrierbar, ersetze f_ϵ in (*) durch $f\chi_K$, mit kompaktem $K \subset A_\epsilon$, wobei χ_K die charakteristische Funktion von K bezeichne*
- *Analog folgt (**) für $f\chi_K$ und $\|f\|_\infty \leq \|m_f\|$*
- *Insgesamt folgt die Behauptung*

Multiplikationsoperatoren - Lemma 2

Lemma

Sei f messbare Funktion auf X mit folgender Eigenschaft: mit $g \in L^2(X, dx)$ sei auch $fg \in L^2(X, dx)$. Dann gilt $f \in L^\infty(X, dx)$.

Anmerkung

- *Die durch messbare wesentlich beschränkte Funktionen definierten Operatoren sind die allgemeinsten Multiplikationsoperatoren*
- *Die Voraussetzung mit $g \in L^2(X, dx)$ sei auch $fg \in L^2(X, dx)$ ist die wesentliche, die erzwingt, dass m_f beschränkter Operator ist*

Lemma 2: Beweis

Beweis

- *Zeige zuerst:* m_f *ist beschränkter Operator* $m_f : L^2(X, dx) \to L^2(X, dx)$
- *Wir verwenden den Satz vom abgeschlossenen Graphen: Es seien* X *und* Y *Banachräume und* $A \colon X \to Y$ *ein linearer Operator. Es bezeichne* $\mathcal{G}(A) := \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ *den Graphen von* A*. Dann ist* A *genau dann beschränkt (und somit stetig), wenn* $\mathcal{G}(A)$ *abgeschlossen in* $X \times Y$ *ist*
- A *beschränkt impliziert die Abgeschlossenheit von* $\mathcal{G}(A)$*. Die Projektion von* $\mathcal{G}(A)$ *auf* X *ist bijektiv, linear und stetig. Wegen der Abgeschlossenheit des Graphen ist* $\mathcal{G}(A)$ *ein Banachraum. Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt dann, dass die Umkehrung* $x \mapsto (x, Ax)$ *ebenfalls beschränkt ist, und das impliziert die Stetigkeit von* A
- *Wir zeigen, der Graph* $\mathcal{G}(m_f) = \{(g, fg) \,|g \in L^2(X, dx)\}$ *ist abgeschlossen*

Lemma 2: Beweis (cont'd)

Beweis

- *Betrachte konvergente Folge* (g_n, fg_n) *aus* $\mathcal{G}$*:* $g_n \to g, \quad fg_n \to h$. *Konvergenz in* $L^2(X, dx)$ *impliziert punktweise Konvergenz einer geeigneten Teilfolge außerhalb einer Nullmenge, d.h. außerhalb dieser Nullmenge kann die Konvergenz von* (g_n, fg_n) *als punktweise Konvergenz aufgefasst werden.*
- *Dann gilt wg. Eindeutigkeit des Limes (bis auf eine Nullmenge)* $h = fg \in L^2(X, dx)$.
- *Beschränktheit von* m_f *heißt, es existiert* C *mit* $\|fg\|_2 \leq C\|g\|_2$

Lemma 2: Beweis (cont'd)

Beweis

- *Sei* $0 < a$ *mit* $a^2 > C$. *Setze* $A = \{x \in X \,|\, |f(x)| \geq a\}$ *und bezeichne* χ_A *die charakteristische Funktion von* A; A *ist messbar, da* f *messbar*
- *Zunächst Annahme:* χ_A *ist integrierbar, i.e.* $vol(A) < \infty$. *Dann folgt aus* $a^2\chi_A \leq |f(x)|^2$ *und mit* $\chi_A^2 = \chi_A$ *wegen*

  $$a^2 \int_X \chi_A \, dx \leq \int_X |f(x)|^2 \, \chi_A^2 \, dx \leq C \int_X \chi_A \, dx,$$

  dass χ_A *Nullfunktion und* A *Nullmenge ist. Damit gilt* $|f(x)| \leq a$ *außerhalb einer Nullmenge*
- *Ist* χ_A *nicht integrierbar, multipliziere* χ_A *mit* χ_K *für beliebige Kompakta* $K \subset A$ *wie im Beweis zu Lemma 1*

Inverser Multiplikationsoperator

Definition

Sei $f : X \to \mathbb{C}$ messbar. Bezeichne N die Menge der Nullstellen von f. Ist $vol(N) = 0$, wird $1/f$ folgendermaßen definiert:

$$(1/f)(x) := \begin{cases} 1/f(x) & x \in X \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

Isomorpher Multiplikationsoperator - Lemma 3

Lemma

Sei $f \in L^\infty(X, dx)$. $m_f : L^2(X, dx) \to L^2(X, dx)$ ist Isomorphismus genau dann, wenn $1/f$ existiert und $1/f \in L^\infty(X, dx)$.

Beweis

- *"$\Rightarrow$": $1/f \in L^\infty(X, dx)$: m_f Isom, dann ex. inv. $1/f$ zu f, da f injektiv, dh f hat Nullstellenmenge N mit $vol(N) = 0$, dh $m_f^{-1} = m_{1/f}$. $m_{1/f}$ ist Operator auf $L^2(X, dx)$: für $g \in L^2(X, dx)$ ist $(1/f)g \in L^2(X, dx)$, denn wg. Surjektivität von f ex. $h \in L^2(X, dx)$ mit $fh = g$. Die Funktion $1/f$ ist überall definiert, mit f ist auch $1/f$ messbar und nach Lemma 2 folgt $1/f \in L^\infty(X, dx)$*
- *"$\Leftarrow$": m_f Isomorhismus wg.*
  Surjektivität: sei $h \in L^2(X, dx)$. Gesucht $g \in L^2(X, dx)$ mit $fg = h$. $g := (1/f)h$ macht es.
  Injektivität: es gilt $(1/f)f = 1$ f.ü. (bis auf N).

Selbstadjungierte Multiplikationsperatoren

Definition

- *Sei H komplexer Hilbertraum, $\langle\, , \rangle$ bezeichne sein Skalarprodukt. Ein beschränkter linearer Operator $A : H \to H$ heißt selbstadjungiert, wenn für alle $x, y \in H$ gilt: $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, i.e. $A = A^*$.*
- *Die Exponentialabbildung für beschränkte Operatoren wird folgendermaßen definiert:*

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Selbstadjungierte Multiplikationsoperatoren - Aussagen

Aussage

- *Die Reihe konvergiert im Banachraum $\mathcal{B}(H)$ wegen $\|A^n\| = \|A\|^n$ und $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$*
- *Es gilt zudem: $e^A e^B = e^{A+B}$, wenn $AB = BA$*
- *$U(t) := e^{itA}$ definiert eine unitäre Darstellung von $\mathbb{R}$ auf H. Denn: mit A ist auch e^{tA} selbstadjungiert und U ist unitär wegen $U(t)^* = U(-t) = U(t)^{-1}$.*
- *Spektralsatz für unitäre Operatoren: es ex. ein Radon-Maß (X, dx) und eine reelle stetige Funktion f auf X, sodass U äquivalent zu $\widetilde{U}$ ist, und als Multiplikation $\widetilde{U}(t)g = e^{itf}g$ operiert.*

Selbstadjungierte Operatoren - Spektralsatz

Satz

Ist $A = A^*$ beschränkter Operator auf H, dann ex. Radon-Maß (X, dx), eine reelles stetiges, wesentlich beschränktes f auf X und ein Isomorphismus $H \cong L^2(X, dx)$, sodass A als m_f operiert.

Beweis

Verwende Spektralsatz für unitäre Operatoren. Bleibt zu zeigen: $Ag = fg$ für $g \in L^2(X, dx)$. Für eine geeignete Teilfolge von t_n mit $t_n \to 0,\ t_n \neq 0$ gilt in $L^2(X, dx)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{it_nA}g - g}{t_n} = iAg\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{it_nf}g - g}{t_n} = ifg$$

Damit: $Ag = fg$ in $L^2(X, dx)$
f ist wesentlich beschränkt: folgt aus Lemma 2.

Definition Resolventenmenge - Spektrum - Spektralradius - Resolvente

Definition

Sei $A \in \mathcal{B}(H)$, $\|A\|$ bezeichne die Operatornorm auf $\mathcal{B}(H)$.

(1) *Resolventenmenge* $\rho(A) = \{z \in \mathbb{C} |\, (A - zI) \text{ ist bijektiv}\}$

(2) *Spektrum* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

(3) *Spektralradius* $\|A\|_\sigma = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$

(4) *Resolvente* $R(z) : \rho(A) \to \mathcal{B}(H),\ z \mapsto (A - zI)^{-1}$

Anmerkung:

Die Resolvente ist ein wesentliches Hilfsmittel für manche Beweise des Spektraltheorems

Statt $R(z)$ wird auch $-R(z)$ oder $\pm R(1/z)$ verwendet ($R(z)$ als Potenzreihe oder Laurent-Reihe)

Spektrum

Proposition

Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbsadjungiert. Dann gilt für das Spektrum von A:

(1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ *(reelles Spektrum)*

(2) $\sigma(A)$ *ist kompakt*

(3) $\sigma(A) \neq \varnothing$

Zum Beweis der Proposition werden einige Hilfsaussagen benötigt.

Spektrum

Lemma

(1) *(geometr. Reihe)* $(I - zA)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n, \;\; |z| < \|A\|^{-1}$

(2) *(Kriterium für Invertierbarkeit) Sei* $A : H \to H$ *bijektiv,*
$B \in \mathcal{B}(H)$
Ist $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1} \implies B$ *bijektiv.*

(3) $\rho(A)$ *ist offen (i.e* $\sigma(A)$ *ist abgeschlossen)*

(4) $R(z)$ *ist analytisch auf* $\rho(A)$

(5) $\|A\|_\sigma \leqq \|A\|$

(6) $\sigma(A) \neq \varnothing$

Spektrum cont'd

Beweis

(1) *Nachrechnen: die Folge der Partialsummen ist Cauchy-Folge und konvergent für* $|z| < \|A\|^{-1}$

(2) *Entwickle Inverse der RS von* $B = A(I - A^{-1}(A - B))$ *in eine geometrische Reihe:* $B^{-1} = [\sum_{n=0}^{\infty}(A^{-1}(A - B))^n]A^{-1}$

(3) *Ist* $A - z_0 I$ *invertierbar, dann ist für* $|z - z_0| < \varepsilon$ *genügend klein* $A - zI$ *invertierbar. Folgerung:* $\mathcal{B}(H) \backslash \mathcal{B}^*(H)$ *ist abgeschlossen* $\sigma(A)$ *ist abgeschlossen: sei* $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $\lambda_n \in \sigma(A)$ *mit* $\lambda_n \to \lambda$. *Dann* $A - \lambda_n I \to A - \lambda I \in \mathcal{B}(H) \backslash \mathcal{B}^*(H)$, *somit* $\lambda \in \sigma(A)$

(4) *Wähle* $z_0 \in \rho(A)$, *setze* $B_0 = A - z_0 I$, $B = A - zI$, *so dass* $\|B_0 - B\| \leqq |z - z_0| < \|B_0^{-1}\|^{-1}$. *Dann ist* B *bijektiv wg. (1)*
Invertiere B *via geometrischer Reihe:*

$$\begin{aligned} B^{-1} &= B_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty}(B_0^{-1}(B_0 - B))^n \\ &= R(z_0) \sum_{n=0}^{\infty} R(z_0)^n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} R(z_0)^{n+1} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

d.h. $R(z) = (A - zI)^{-1}$ *ist lokal als Potenzreihe mit Koeffizienten aus* $\mathcal{B}(H)$ *darstellbar, also analytisch auf* $\rho(A)$

Spektrum cont'd

Beweis

(5) *Sei* $z \neq 0$, *setze* $B_0 = A - zI$, $B = -zI$.
Gilt $\|B - B_0\| = \|A\| < \|B^{-1}\|^{-1} = |z|$, *dann ist* $A - zI$ *bijektiv wg (1), damit* $z \notin \sigma(A)$. *Also für* $\lambda \in \sigma(A)$ *gilt:*
$|\lambda| \leqq \|A\|$, *d.h.* $\|A\|_\sigma \leqq \|A\|$, *somit* $\sigma(A)$ *kompakt mit (3)*

(6) *Angenommen* $\sigma(A) = \varnothing$. $R(z)$ *ist in der Kreisscheibe* $|z| \leqq 2\|A\|$ *stetig, damit beschränkt. Für* $|z| \geqq 2\|A\|$, *ergibt sich wg.*
$R(z) = -z^{-1}(I - z^{-1}A)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} A^n z^{-n-1}$
folgende Abschätzung:
$$\|R(z)\| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n |z|^{-n-1} = \frac{1}{|z| - \|A\|} \leqq \frac{1}{\|A\|}$$
Dann ist $R(z)$ *analytisch für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und beschränkt, nach dem Satz von Liouville somit konstant:*
$R(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^n z^{-n-1} \to 0$ *für* $z \to \infty$. *Contradictio.*

Spektrum - Bemerkungen zum Beweis

Anmerkung

- *Der Beweis, dass das Spektrum reell ist, lässt sich ohne Verwendung der Resolvente führen - via Multiplikationsoperatoren oder auch elementar*
- *Via Multiplikationsoperator unter Ausnutzung, dass f reell, lokal beschränkt ist. Ist $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, dann ist $f - \lambda$ nach unten gegen 0 beschränkt (s. (c) unten) und $\dfrac{1}{f-\lambda}$ Isomorphismus. Für $\lambda > \| f \|_\infty$ folgt insb. $\lambda \in \rho(m_f)$ damit die Beschränktheit des Spektrums*
- *elementar: zeige für $A = A^*$, $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $B = A - zI$ bijektiv*
  (a) $Kern(B) = \{0\}$
  (b) $B(H)$ *ist dicht in* H: $B(H)^\perp = \{0\}$
  (c) $\|(A - zI)x\|^2 = \|(A - Re(z)I)x\|^2 + Im(z)^2\|x\|^2 \geqq Im(z)^2\|x\|^2$
  (d) $B(H)$ *abgeschlossen unter Verwendung von (c)*
- *Der Beweis zu (6): verläuft analog zu einem funktionentheoretischen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra*

Spektralradius

Aus dem Beweis des Lemmas ergab sich bereits $\|A\|_\sigma \leqq \|A\|$.

Proposition

Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt für den Spektralradius $\|A\|_\sigma = \|A\|$.

Zum Beweis werden weitere Aussagen bereitgestellt. Aussagen (1) und (2) des Lemmas liefern die Behauptung.

Lemma

(1) (Gelfand Formel) Für $A \in \mathcal{B}(H)$ gilt $\|A\|_\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.
(2) Ist A selbstadjungiert, $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|A^n\| = \|A\|^n$.

Beweis

Der Beweis zu (1) wird nur skiziiert.
(a) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^\infty \lambda^{n+1} A^n$ ist $(\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n})^{-1}$. Ist $|z| > \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty z^{-n-1} A^n$ gegen $R(z)$, d.h. $z \in \rho(A)$ und

$$\|A\|_\sigma \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$$

Spektralradius - cont'd

Beweis

(b) Zeige $\|A\|_\sigma$ *kann nicht echt kleiner sein. Wäre es so, dann wäre* $\sigma(A) \subset B(0,r)$ *für ein* $r < \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ *und*

$$-R(z) = (zI - A)^{-1} = \frac{1}{z}(I - \frac{A}{z})^{-1}$$

wäre analytisch für $|z| > r$*. Daraus folgt aber, dass die Abbildung* $\lambda \mapsto (I - \lambda A)^{-1}$ *analytisch in* $B(0, r^{-1})$ *wäre und für den Konvergenzradius* $\widetilde{R}$ *der Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n$ *gälte:*
$\widetilde{R} \geqq r^{-1} > (\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n})^{-1}$*. Widerspruch.*

Spektralradius - cont'd

Beweis

(c) Die Existenz des Limes erhält man mit folgender Überlegung: aus $a(n) = \|A^n\|^{1/n} \geqq 0,\ \overline{\lim}\, a(n) < \infty,\ \ a(m) \geqq \overline{\lim}\, a(n)$ *und der Submultiplikativität der Operatornorm.*

Betrachte für $m > 0$ *fest,* $n > m$ *und* $n = q(n)m + r(n)$ *mit* $q(n), r(n) \geqq 0,\ r(n) < m$ *die Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|A^n\|^{1/n} &\leqq \|A^{mq(n)}A^{r(n)}\|^{1/n} \\ &\leqq (\|A^m\|^{1/m})^{q(n)m/n}\|A^{r(n)}\|^{1/n} \\ &\leqq (\|A^m\|^{1/m})^{1-r(n)/n}\|A\|^{r(n)/n} \end{aligned}$$

Grenzübergang $n \to \infty : r(n)/n \to 0\,,\ \ q(n)/n \to 1/m$

Polynomiales Spektraltheorem

Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom und bezeichne $\mathcal{A}$ eine assoziative unitale Algebra. Dann lässt sich für jedes $a \in \mathcal{A}$, $P(a) \in \mathcal{A}$ definieren; insbesondere ist für $A \in End(H)$ auch $P(A)$ definiert. Ist A sebstadjungiert, P reell, so ist auch $P(A)$ selbstadjungiert.

Proposition

Sei $A \in End(H)$ selbstadjungiert und $P \in \mathbb{C}[X]$. Gilt $P(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$, so ist $P(A) = 0$.
Die Behauptung folgt aus der nächsten Proposition mit (2), denn $\|P(A)\| = 0$.

Korollar

Sei A wie in der Proposition und gelte $\sigma(A) = \{a\}$. Dann ist $A = aI$ (Vielfaches der Identität).

Beweis

Betrachte $P(x) = x - a$. Dann gilt $P(a) = 0$, nach obiger Proposition $P(A) = A - aI = 0$, also $P(A) = aI$.

Polynomiales Spektraltheorem cont'd

Proposition

Sei A selbstadjungiert, $P \in \mathbb{C}[X]$. Dann gilt:

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & \sigma(P(A)) & = & P(\sigma(A)) \\
(2) & \|P(A)\| & = & \|P(A)\|_{\sigma(A)}
\end{array}
$$

Dabei bezeichnet $\|P(A)\|_{\sigma(A)}$ das Maximum von $|P|$ auf $\sigma(A)$. Die Aussage (2) folgt aus (1) und der Proposition zum Spektralradius.

Polynomiales Spektraltheorem - Beweis

Beweis

Beweis zu (1). Sei A selbstadjungiert, $P \in \mathbb{C}[X]$ oE monisch.

- *Sei $\lambda \in \sigma(P(A))$. Dann ist $P(A) - \lambda I$ nicht invertierbar. Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ die Nullstellen von $P(x) - \lambda$. Dann ist*

$$P(A) - \lambda I = \prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)$$

  Es folgt, dass für ein i, $A - \lambda_i I$ nicht invertierbar ist, damit $\lambda_i \in \sigma(A)$. Wegen $P(\lambda_i) - \lambda = 0$, folgt $\lambda \in P(\sigma(A))$.
- *Sei $\lambda \in P(\sigma(A))$. Dann gilt für ein $\mu \in \sigma(A)$: $P(\mu) - \lambda = 0$, d.h. $\mu = \lambda_{i_0}$ für ein i_0. Da $\lambda_{i_0} \in \sigma(A)$, ist der Faktor $A - \lambda_{i_0} I$ nicht invertierbar (d.h. nicht injektiv oder nicht surjektiv). Es folgt $P(A) - \lambda I$ ist nicht invertierbar (nicht injektiv oder nicht surjektiv, was man durch geeignete Umsortierung der Faktoren einsieht), damit aber $\lambda \in \sigma(P(A))$.*

Stetiger Funktionalkalkül

Satz

*Sei $A \in \mathcal{B}(H)$ und $A = A^*$. Dann gibt es einen Homomorphismus von Banachalgebren (unitären *-Algebren)*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{E}_A : & \mathcal{C}(\sigma(A)) & \to & \mathcal{B}(H) \\ & g & \mapsto & g(A) \\ & \|g(A)\| & = & \|g(A)\|_{\sigma(A)} \end{array}$$

(1) $\mathcal{E}_A$ ist eindeutige Fortsetzung von $\mathbb{C}[X]$ auf $\mathcal{C}(\sigma(A))$
(2) Ist g reell, dann ist $g(A)$ selbstadjungiert
(3) $\sigma(g(A)) = g(\sigma(A))$ (stetiges Spektraltheorem)
(4) Kommutiert $B \in \mathcal{B}(H)$ mit A, dann auch mit $g(A)$

Anmerkung

Zur Anwendung kommen der Satz von Stone-Weierstrass sowie das polynomiale Spektraltheorem. Da $\sigma(A)$ kompakt ist, lässt sich jede stetige Funktion g durch Polynome gleichmäßig approximieren; das stetige Spektrum ist "Limes" des polynomialen.

Stetiger Funktionalkalkül - (cont'd)

Anmerkung

- *Ist* $P_n \to g$*, dann ist* $g(A) = \lim_{n \to \infty} P_n(A)$ *erklärt und wohldefiniert, d.h. unabhängig von der approximierenden Folge* P_n
- *Die Frage stellt sich, wie* $g(A)$ *jeweils zu interpretieren ist*
- *Wir formulieren den stetigen Funktionalkalkül via Multiplikationsoperatoren*
- *Dies führt auf eine "natürliche" Interpretation von* $g(A)$ *als Multiplikationsoperator*
- *Die Formulierung dieser Version folgt aus dem allgemeinen Spektraltheorem und der unitären Äquivalenz des selbstadjungierten Operators* A *zum Multiplikationsoperator* m_f
- *Das Spektrum für ein beschränktes, stetiges, reelles* f *ist beschrieben durch:*

$$\sigma(m_f) = \overline{Bild(f)}$$

Stetiger Funktionalkalkül - Mulitplikationsoperator Version

Satz

*Sei $H = L^2(X, dx)$ und $f \in L^\infty(X, dx)$ reell und stetig. Der Multiplikationsoperator m_f ist selbstadjungiert auf H. Dann gibt es einen Homomorphismus von Banachalgebren (unitären *-Algebren)*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{E}_{m_f} : & \mathcal{C}(\sigma(m_f)) & \to & \mathcal{B}(H) \\ & g & \mapsto & g(m_f) \\ & g(m_f) = & m_{g \circ f} & = g \circ f \end{array}$$

$\sigma(g(m_f)) = g(\sigma(m_f))$ (fü) (stetiges Spektraltheorem für Multiplikationsoperatoren)

Bi-Kommutant

Anmerkung

Als Folgerung aus der stetigen Version des Funktional-Kalküls ergibt sich:
Sei $A : H \longrightarrow H$ *selbstadjungiert. Sei* $B \in \mathcal{B}(H)$ *und gelte* $AB = BA$. *Dann kommutiert* B *mit* $P(A)$, *für alle* $P \in \mathcal{C}(\sigma(A))$.

Definition

Sei A *wie in der Bemerkung. Dann werden Kommutant und Bi-Kommutant folgendermaßen definiert:*

$$\mathcal{B}^{'}(A) := \{B \in \mathcal{B}(H) |\, AB = BA\}$$
$$\mathcal{B}^{''}(A) := \{C \in \mathcal{B}(H) |\, CB = BC, \forall B \in \mathcal{B}^{'}(A)\}$$

Aus obigem folgt: $P(A) \in \mathcal{B}^{''}(A)$.

Bi-Kommutant - ein Schur-Typ-Lemma

Lemma

Sei $A : H \longrightarrow H$ selbstadjungiert. Gelte für alle $C \in \mathcal{B}''(A)$: $Kern(C) = 0$ oder $Kern(C) = H$. Dann ist A Vielfaches der Identität.

Beweis

Angenommen A ist nicht Vielfaches der Identität.
Dann enthält das Spektrum mindestens zwei Punkte $a_1 \neq a_2$ und es gibt $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\sigma(A))$ mit folgender Eigenschaft:
$f_i(a_i) \neq 0,\ f_1 f_2 = 0$ (Punkttrennung durch stetige Funktionen)
Setze $A_i = f_i(A)$. Nach obiger Bemerkung ist $f_i(A) \in \mathcal{B}''(A)$.
Es gilt $A_i \neq 0$, i.e. $Kern(A_i) \neq H$ und weiterhin $A_1 \circ A_2 = 0$.
Es folgt $A_2(H) \subset Kern(A_1)$, damit $Kern(A_1) \neq 0$. Widerspruch.