# Integrationstheorie mit Radonmaßen

Lukas Huber

19.11.2020

# Einführung

- Hausdorff-Raum: topologischer Raum $X$ mit Punktetrennungseigenschaft: Für alle $x, y \in X$ gibt es disjunkte offene Punktumgebungen $B(x)$ und $B(y)$
- Annahme: alle topologischen Räume mit einem Maß sind hausdorffsch und haben eine abzählbare Basis der Topologie
- Abzählbare Basis: Es gibt ein abzählbares System offener Teilmengen, sodass offene Mengen als Vereinigung von Mengen aus diesem System geschrieben werden können
- Jeder Unterraum eines Raums, der mit der induzierten Topologie ausgestattet ist, hat eine abzählbare Basis der Topologie
- $X$ lokalkompakter Raum, $\mathscr{C}(X)$ Menge der komplexwertigen stetigen Funktionen, $\mathscr{C}_c(X)$ Teilmenge aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger

# Definition 1: Radonmaß

**Definition**

*Ein Radonmaß ist ein lineares Funktional* $I : \mathscr{C}_c(X) \to \mathbb{C}$*, das im Sinne* $I(\overline{f}) = \overline{I(f)}$ *reell und im Sinne* $I(f) \geq 0$ *für ein reelles* $f \geq 0$ *positiv ist. Wir schreiben*

$$I(f) = \int_X f(x)\, dx.$$

# Festlegung des Zahlenkörpers

- $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ als geordnete Menge ($x \leq \infty$ für alle $x$)
- $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ hat eine kleinste obere Schranke $\sup(M)$ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- Fortsetzung der Addition: $x + \infty = \infty + x = \infty$ für alle $x$
- Fortsetzung der Multiplikation: $C\infty = \infty$ für $C > 0$

# Definition 2: Bairesche Funktionen

- Erster Teil der Daniell-Lebesgueschen Prozesses: Verallgemeinerung des Integrals von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $\Longrightarrow$ von gleichmäßiger zu monotoner Konvergenz
- Satz von Dini: Sei $X$ ein kompakter metrischer Raum und $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die monoton gegen Null fällt. Dann konvergiert $(f_n)$ gleichmäßig gegen Null.
- Satz von Dini ermöglicht uns, das Integral von $\mathscr{C}_c$-Funktionen auf Funktionen auszudehnen, die sich monoton durch $\mathscr{C}_c$-Funktionen approximieren lassen
- Damit erhalten wir das Bairesche Integral

# Definition 2: Bairesche Funktionen

**Definition**

*Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *heißt Bairesche Funktion, wenn es eine wachsende Folge* $f_n \in \mathscr{C}_c(X)$, $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *gibt, sodass* $f(x) = \sup\{f_n(x) \mid x \in X\}$ *ist.*

# Definition 2: Bairesche Funktionen

### Definition

*Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *heißt Bairesche Funktion, wenn es eine wachsende Folge* $f_n \in \mathscr{C}_c(X)$, $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *gibt, sodass* $f(x) = \sup\{f_n(x) \mid x \in X\}$ *ist.*

- $I_B(f) := \sup\{I(f_n)\}$ ist von der Wahl der Folge $(f_n)$ unabhängig
- $\infty$ ist als konstante Funktion Bairesche Funktion
- Erweiterte Definition für nichtnegative Funktionen $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

$$\bar{I}(f) = \inf\{I_B(h) \mid f \leq h \text{ Bairesch}\}$$

- Dreiecksungleichung: $\bar{I}(f+g) \leq \bar{I}(f) + \bar{I}(g)$

# Definition 3: Integrierbarkeit

**Definition**

*Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{R}$ *heißt integrierbar, wenn es eine Folge* $f_n \in \mathscr{C}_c(X)$ *gibt, sodass* $\overline{I}(|f - f_n|)$ *endlich ist und gegen Null konvergiert.*

# Definition 3: Integrierbarkeit

### Definition

*Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn es eine Folge $f_n \in \mathscr{C}_c(X)$ gibt, sodass $\overline{I}(|f - f_n|)$ endlich ist und gegen Null konvergiert.*

- $(I(f_n))$ konvergiert und der Grenzwert $I_L(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ ist unabhängig von $f_n$ (*Integral* von $f$)
- Bairesche Funktionen $f$ mit $I_B(f) < \infty$ integrierbar; dann gilt $I_L(f) = I_B(f)$
- Folglich gelten: $I(f) = I_B(f)$ für Bairesche Funktionen, $I(f) = I_L(f)$ für integrierbare Funktionen
- $I(f) = \overline{I(f)}$ für integrierbare $f$

# Definition 4: Raum der integrierbaren Funktionen

**Definition**

*Wir definieren $\mathcal{L}^1(X, dx)$ als den Raum aller integrierbaren Funktionen.*

# Definition 4: Raum der integrierbaren Funktionen

**Definition**

*Wir definieren $\mathcal{L}^1(X, dx)$ als den Raum aller integrierbaren Funktionen.*

- $f \in \mathcal{L}^1(X, dx)$ ist integrierbar $\Longrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(X, dx)$ ist integrierbar
- Integral lineares Funktional auf $\mathcal{L}^1(X, dx)$
- $f \geq 0 \Longrightarrow I(f) \geq 0$

# Definitionen 5, 6: Nullfunktion, Null(teil)menge

Definition

*Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{C}$ *heißt Nullfunktion, wenn* $\bar{I}(|f|) = 0$ *gilt.*

# Definitionen 5, 6: Nullfunktion, Null(teil)menge

### Definition

*Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt Nullfunktion, wenn $\bar{I}(|f|) = 0$ gilt.*

- Äquivalent: Für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Bairesche Funktion $h$ mit $|f| \leq h$ und $I(h) < \epsilon$.
- Nullfunktionen sind integrierbar

# Definitionen 5, 6: Nullfunktion, Null(teil)menge

### Definition

*Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt Nullfunktion, wenn $\bar{I}(|f|) = 0$ gilt.*

- Äquivalent: Für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Bairesche Funktion $h$ mit $|f| \leq h$ und $I(h) < \epsilon$.
- Nullfunktionen sind integrierbar

### Definition

*Eine Teilmenge von $X$ heißt Nullteilmenge, wenn deren charakteristische Funktion eine Nullfunktion ist.*

# Definitionen 5, 6: Nullfunktion, Null(teil)menge

## Definition

*Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt Nullfunktion, wenn $\bar{I}(|f|) = 0$ gilt.*

- Äquivalent: Für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Bairesche Funktion $h$ mit $|f| \leq h$ und $I(h) < \epsilon$.
- Nullfunktionen sind integrierbar

## Definition

*Eine Teilmenge von $X$ heißt Nullteilmenge, wenn deren charakteristische Funktion eine Nullfunktion ist.*

- $f$ Nullfunktion $\Longleftrightarrow \{x \mid f(x) \neq 0\}$ Nullmenge
- $f$ integrierbar, $g = f$ fast überall $\Longrightarrow g$ integrierbar, $I(f) = I(g)$

# Satz 7: Monotone Konvergenz (Beppo Levi)

**Satz**

*Sei* $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ *eine steigende Folge integrierbarer Funktionen, sodass die Folge ihrer Integrale in* $\mathbb{R}$ *beschränkt ist. Dann existiert der punktweise Grenzwert* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *außerhalb einer Nullmenge. Wenn man* $f(x)$ *willkürlich für diese Nullmenge definiert, erhält man eine integrierbare Funktion mit der Eigenschaft*

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx.$$

# Satz 8: Dominierte Konvergenz (Lebesgue)

### Satz

*Sei $f_n(x)$ eine punktweise konvergierende Folge integrierbarer Funktionen. Angenommen, es gibt eine integrierbare Funktion $h$ mit der Eigenschaft $|f_n(x)| \leq h(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in X$. Dann ist $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ integrierbar und es gilt*

$$\int_X f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\, dx.$$

# Definition 9: Quotientenraum

**Satz**

*Die Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^1(X, dx)$ von Nullfunktionen ist ein Untervektorraum. Wir definieren einen Quotientenraum aller integrierbaren Funktionen via*

$$L^1(X, dx) := \mathcal{L}^1(X, dx)/\mathcal{N}.$$

## Definition 9: Quotientenraum

### Satz

*Die Teilmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^1(X, dx)$ von Nullfunktionen ist ein Untervektorraum. Wir definieren einen Quotientenraum aller integrierbaren Funktionen via*

$$L^1(X, dx) := \mathcal{L}^1(X, dx)/\mathcal{N}.$$

- Beppo Levi + Lebesgue $\Longrightarrow$ $L^1(X, dx)$ ist ein Banachraum mit Norm

$$\|f\|_1 := \int_X |f(x)|\, dx$$

- Seien $(f_n) \subset \mathcal{L}^1(X, dx)$, $f \in \mathcal{L}(X, dx)$. Angenommen $f_n \to f$ in $L^1(X, dx)$. Dann gibt es eine Nullmenge $S$ und eine Teilfolge von $(f_n)$, die punktweise gegen $f$ außerhalb von $S$ konvergiert. (Wichtiger Beweisschritt dafür, dass $L^1(X, dx)$ ein Banachraum ist)

# Definition 9: Quotientenraum

- Radonmaß im folgenden Sinne nicht-trivial: Sei $f \in \mathscr{C}_c(X)$ nichtnegativ, $I(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$
- Damit ist $\mathscr{C}_c(X) \hookrightarrow L^1(X, dx)$ injektiv
- Zusätzlich ist $L^1(X, dx)$ Vervollständigung von $\mathscr{C}(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_1$-Norm
- Integrationstheorie als "Vervollständigung"

# Definition 10: Messbarkeit

**Definition**

*Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn für alle nichtnegativen Funktionen $h \in \mathscr{C}_c(X)$ die Funktion*

$$f_h(x) := \begin{cases} f(x) & \iff -h(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ 0 & \iff sonst \end{cases}$$

*integrierbar ist.*

## Definition 10: Messbarkeit

### Definition

*Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn für alle nichtnegativen Funktionen $h \in \mathscr{C}_c(X)$ die Funktion*

$$f_h(x) := \begin{cases} f(x) & \iff -h(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ 0 & \iff \textit{sonst} \end{cases}$$

*integrierbar ist.*

- Integrierbare und stetige Funktionen sind messbar
- Messbarkeit bleibt unter Addition, Multiplikation sowie Bildung von $\sup$, $\inf$, $\limsup$ und $\liminf$ erhalten
- Teilmenge von $X$ messbar, falls $\chi_X$ messbar ist
- Offene Teilmengen von $X$ messbar

# Definition 10: Messbarkeit

- Komplemente messbarer Mengen sind messbar
- Abzählbare Vereinigungen und Schnitte messbarer Mengen sind messbar
- Borel-Mengen sind messbar (also Mengen, die von offenen und geschlossenen Teilmengen unter abzählbaren Vereinigungen, Schnitten und Komplementen gebildet werden)
- Faktisch alle Funktionen sind messbar; Gegenbeispiele durch das Auswahlaxiom

Satz

*Eine Funktion $f$ ist integrierbar $\iff$ $f$ ist messbar und $\bar{I}(|f|) < \infty$.*

## Satz 11: Messbarkeit/Definition 12: $L^p$-Räume

### Satz

*Eine Funktion $f$ ist integrierbar $\iff$ $f$ ist messbar und $\bar{I}(|f|) < \infty$.*

### Definition

*Sei $p \geq 1$. Dann besteht der Raum $\mathcal{L}^p(X, dx)$ aus allen messbaren Funktionen $f$, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Der Raum hat die Seminorm*

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p \, dx}.$$

# Satz 11: Messbarkeit/Definition 12: $L^p$-Räume

**Satz**

*Eine Funktion $f$ ist integrierbar $\iff$ $f$ ist messbar und $\bar{I}(|f|) < \infty$.*

**Definition**

*Sei $p \geq 1$. Dann besteht der Raum $\mathcal{L}^p(X, dx)$ aus allen messbaren Funktionen $f$, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Der Raum hat die Seminorm*

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_X |f(x)|^p \, dx}.$$

- Dadurch wird eine Norm auf dem Raum

$$L^p(X, dx) = \mathcal{L}^p(X, dx)/\mathcal{N}$$

definiert, wobei $L^p(X, dx)$ mit dieser Norm ein Banachraum ist

# Satz 13: $L^2$-Räume

**Satz**

*Sei $p = 2$. Dann ist der Raum $\mathcal{L}^2(X, dx)$ mit der Hermiteschen Form*

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

*ausgestattet. Diese induziert eine positiv definite Bilinearform auf $L^2(X, dx)$ und induziert, dass $L^2(X, dx)$ ein Hilbertraum ist.*

- Spezielles Beispiel: $X = \mathbb{N}$ mit diskreter Topologie, Radonmaß $I(a) = \sum_n a_n$, der assoziierte $L^2$-Raum ist der Folgenraum $\ell^2$
- Verallgemeinerung auf Banachraum $E$ ist *Bochner-Integral*: Betrachte $\mathscr{C}_c(X, E)$

# Lemma 14: Bochner-Integral

## Lemma

*Sei $(X, dx)$ ein Radonmaß und $E$ ein Banachraum. Dann gibt es eine eindeutige eindeutige lineare Abbildung*

$$\mathscr{C}_c(C, E) \to E, \qquad f \mapsto \int_X f(x)\, dx,$$

*sodass für jedes stetige lineare Funktional $L : E \to \mathbb{C}$ gilt:*

$$L\left( \int_X f(x)\, dx \right) = \int_X L(f(x))\, dx.$$

- Eindeutigkeit: Hahn-Banach
- Existenz: komplizierter; im Fall des Hilbertraums Folge aus dem Satz von Riesz

# Bochner-Messbarkeit

- $E$ separabel $\Longrightarrow$ $E$ besitzt abzählbare dichte Teilmenge
- $f : X \to E$ messbar $\Longleftrightarrow$ das Kompositum mit jeder stetigen Linearform ist messbar
- $f : X \to E$ Nullfunktion $\Longleftrightarrow$ $\|f\|$ ist eine Nullfunktion (d.h. ist Null außerhalb einer Nullmenge)
- $\mathcal{L}^p(X, E, dx)$ analog zu den Räumen im Fall $E = \mathbb{C}$ definiert: enthalten Nullfunktionenmenge $\mathcal{N}$
- Quotientenräume $L^p(X, E, dx)$ Banachräume
- $E = H$ Hilbertraum $\Longrightarrow$ $L^2(X, H, dx)$ Hilbertraum mit innerem Produkt

# Definition 15: Produktmaß

**Definition**

*Seien* $(X, dx)$, $(Y, dy)$ *lokalkompakte Räume mit Radonmaßen. Sei* $f \in \mathscr{C}_c(X \times Y)$. *Wenn wir* $y$ *fest wählen, gibt es eine Funktion* $f(x, y) \in \mathscr{C}_c(X)$. *Damit ist* $\int f(x, y)\, dy$ *in* $\mathscr{C}_c(Y)$ *enthalten. So definieren wir das Produktmaß via*

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, dx\, dy := \int_Y \left[ \int_X f(x, y)\, dx \right] dy.$$

# Definition 15: Produktmaß

**Definition**

*Seien $(X, dx)$, $(Y, dy)$ lokalkompakte Räume mit Radonmaßen. Sei $f \in \mathscr{C}_c(X \times Y)$. Wenn wir $y$ fest wählen, gibt es eine Funktion $f(x, y) \in \mathscr{C}_c(X)$. Damit ist $\int f(x, y)\, dy$ in $\mathscr{C}_c(Y)$ enthalten. So definieren wir das Produktmaß via*

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\, dx\, dy := \int_Y \left[ \int_X f(x, y)\, dx \right] dy.$$

- Reihenfolge der Integration vertauschbar:

$$\int_Y \left[ \int_X f(x, y)\, dx \right] dy = \int_X \left[ \int_Y f(x, y)\, dy \right] dx$$

# Sätze von Fubini und Tonelli

- Dies ist trivial für $f(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$; allgemeiner Fall folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß
- Satz von Fubini:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy := \int_Y \left[\int_X f(x,y)\,dx\right] dy = \int_X \left[\int_Y f(x,y)\,dy\right] dx$$

  erstreckt sich auf eine breitere Funktionenklasse; Annahme $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y, dx\,dy)$
- Vorsicht: Man kann nur annehmen, dass $y \mapsto f(x,y)$ außerhalb einer Nullmenge messbar ist
- Lösung durch Tonelli: Angenommen, $f$ ist messbar, $\bar{I}_Y \bar{I}_X f(x,y)$ ist endlich $\implies f$ integrierbar und Fubini gilt