Seminar:

Anwendungen in der Physik

Marcel Renkert

Universität Heidelberg

11.02.2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Unitäre Darstellungen der Poincaré Gruppe spielen eine herausragende Rolle innerhalb der Physik. Sie sind grundlegend zum Verständnis der speziell-relativistischen Quantenmechanik und bilden den Ausgangspunkt zur theoretischen Klassifizierung der Elementarteilchen. Ziel dieser kurzen Zusammenstellung soll es sein, herauszuarbeiten in welchem Kontext unitäre Darstellungen der Poincaré Gruppe auftreten und insbesondere aufzuzeigen, dass sie keineswegs nur eine theoretische Spielerei darstellen, sondern vielmehr in stringenter Weise fundamentalen physikalischen Forderungen entspringen. Hierzu wird es notwendig sein einige bekannte Konzepte der Physik anzuführen und zu analysieren. Dieser Seminarvortrag meldet dabei keinen Anspruch auf Vollständigkeit an und dient lediglich zur Orientierung. Insbesondere wird der physikalische Gesichtspunkt nur durch knappe Einschübe motiviert werden. Eine weitere physikalische Vorbildung ist daher vorteilhaft.
Ohne weitere Umschweife werden wir im Folgenden damit beginnen, die Bedeutung von Gruppen und Darstellungen in der Physik zu analysieren.

2 | Gruppen in der klassischen Mechanik

Bereits in der klassischen Mechanik spielen Gruppen und die mit ihnen einhergehenden Symmetrieüberlegungen, eine wichtige Rolle. Um diesen Sachverhalt besser zu verstehen, beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung der Newton'schen Mechanik.
Die zentrale Fragestellung der Newton'schen Mechanik befasst sich mit der Bewegung von Körpern im Raum unter dem Einfluss von externen Kräften. Hierbei denken wir uns unsere Testkörper als idealisierte, punktförmige Objekte mit definierter Masse m. Der Raum der klassischen Mechanik ist dreidimensional und wird modelliert durch $\mathbb{R}^3$. Kräfte werden in diesem Setting durch Vektoren $\vec{F}$ dargestellt.
Zur Beantwortung der Fragestellung führen wir zunächst ein Koordinatensystem ein, innerhalb dessen wir den Ort unseres Testkörpers mit $\vec{x}$ bezeichnen. Da wir explizit erlauben, dass sich der Ort des Körpers im Laufe des Prozesses ändert, fassen wir $\vec{x}$ als Funktion der Zeit auf und schreiben $\vec{x}(t)$ für diese Abhängigkeit. Im Sinne dieser Notationen wird des Problem nun durch das Newton'sche Bewegungsgesetz gelöst. Dieses besagt:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}\,, \tag{2.1}$$

wobei wir mit $\ddot{\vec{x}}$ die zweifache Ableitung von $\vec{x}$ nach der Zeit meinen. Das Newton'sche Gesetz führt demnach auf eine Differentialgleichung von zweiter Ordnung in der Zeit, dessen Lösungen die erlaubten Trajektorien unseres Testkörpers beschreiben.
Bemerkenswert ist, dass wir zur Lösung des Problems im Sinne der klassischen Mechanik die explizite Wahl eines Koordinatensystems treffen mussten. Dies wirft die Frage auf, inwiefern diese Wahl einen Einfluss auf die physikalische Beschreibung des Systems hat. Finden wir physikalisch inäquivalente Lösungen der Bewegungsgleichungen in verschiedenen Bezugssystemen? Im Allgemeinen ist die Antwort auf diese Frage, ja. Nichtsdestotrotz gibt es eine Klasse von Koordinatentransformationen, die die Gleichungen invariant lassen. Um diese zu finden nutzen wir das Wirkungsprinzip der klassischen Mechanik aus. Dieses besagt, dass man Gleichung (2.1) als Variation aus einem Funktional S erhalten kann. Dieses Wirkungsfunktional ist definiert über

$$S[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\big(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t\big)\,\mathrm{d}t\,, \tag{2.2}$$

wobei L die Lagrange-Funktion bezeichnet, die nur vom Ort $\vec{x}(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t)$ des Teilchens zur Zeit t abhängt. Weiterhin betrachten wir die Bewegung des Körpers nur zwischen festen Zeitpunkten $t_0 \leq t_1$. Nach geeigneter Wahl einer Lagrange-Funktion gilt dann

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \text{ erfüllt Gleichung (2.1)}\,. \tag{2.3}$$

Die assoziierten Euler-Lagrange-Gleichungen reproduzieren daher die Newton'schen Bewegungsgleichungen.
Das Wirkungsprinzip besitzt eine intrinsische Eichfreiheit. Es zeigt sich, dass das physikalische System die Lagrange-Funktion nicht eindeutig festlegt. Jede Transformation der Art

$$L \mapsto L + \frac{df}{dt}\,, \tag{2.4}$$

für eine beliebige Funktion f, lässt die Äquivalenz aus (2.3) unberührt. Dieser intrinsische Freiheitsgrad ist maßgebend zur Bestimmung derjenigen Koordinatentransformationen, die kompatibel sind mit dem Newton'schen Bewegungsgesetz. Ist nämlich $(\vec{x}, t) \mapsto (\vec{x}', t')$ eine

Transformation, so lässt diese die Bewegungsgleichungen invariant, falls für die transformierte Lagrange-Funktion $L^{'}\big(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t\big) := L\big(\vec{x}^{'}(t), \dot{\vec{x}}^{'}(t), t^{'}\big)$ gilt:

$$L^{'} = L + \frac{df}{dt}\,, \tag{2.5}$$

für eine geeignete Funktion f. Führt man dieses Prinzip durch, erhält man folgende Klasse von kompatiblen Transformationen:

$$t \mapsto t + t_0 \;\text{ Homogenität der Zeit} \tag{2.6}$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{x}_0 \;\text{ Homogenität im Ort} \tag{2.7}$$
$$\vec{x} \mapsto R\vec{x}\,,\; R \in O(3) \;\text{ Isotropie} \tag{2.8}$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{v}t \;\text{ gleichförmige Bewegung} \tag{2.9}$$

wobei wir $t_0, \vec{x}_0$ als konstante Verschiebungen ansehen, R eine Drehmatrix in drei Dimensionen beschreibt und wir $\vec{v}$ als konstante Geschwindigkeit verstehen. Diese Transformationen lassen sich bezüglich der Hintereinanderausführung als Gruppe zusammen fassen. Diese Gruppe heißt Galilei-Gruppe $Gal(3)$ und beschreibt die Symmetrien der klassischen Mechanik. Sie ist grundlegend für unser Verständnis der physikalischen Naturbeschreibung. Die in ihr kodierten Transformationen garantieren, dass die klassische Mechanik überprüfbare Hypothesen zulässt und somit der empirischen Analyse zugänglich wird. Es ist demnach von zentraler Bedeutung, dass die Wahl des Koordinatensystems die Physik nicht ändert. Anders ausgedrückt, entspricht der Wechsel eines Koordinatensystems dem Wechsel eines Beobachters und die Galilei-Gruppe stellt sicher, dass die physikalische Beschreibung nicht vom Beobachter abhängt.
Aus mathematischer Sicht ist die Galilei-Gruppe eine zehn-dimensionale Lie Gruppe und ihre Beschreibung als Transformationsgruppe korrespondiert zu einer speziellen Darstellung auf dem Raum aller möglichen Trajektorien unseres Testkörpers. Der Aspekt der Gruppenoperation lässt sich besser verstehen, wenn man zum Hamilton-Formalismus übergeht. Hierfür führen wir zunächst den Phasenraum ein. Wie wir gesehen haben, werden klassische Trajektorien durch das Newton'sche Bewegungsgesetz (2.1) beschrieben. Dabei handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösungen eindeutig sind nach Angabe des Ortes $\vec{x}(t=0)$ und der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t=0)$ des Teilchens. Der Zustand des physikalischen Systems ist demnach bestimmt durch diese Daten

$$\text{Trajektorie} \leftrightarrow (\vec{x}(t=0), \dot{\vec{x}}(t=0)) \in \mathbb{R}^6\,. \tag{2.10}$$

Anstatt der Geschwindigkeit können wir auch (äquivalent) den Impuls $\vec{p}$ des Teilchens betrachten. In einfachen Fällen ist dieser definiert als

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}}^T\,. \tag{2.11}$$

Der Phasenraum $\mathcal{P}$ wird nun aufgespannt von den Orts- und Impulskoordinaten unseres Testkörpers.
Zusammenfassend können wir physikalische Systeme nun durch einen Phasenraum beschreiben, dessen Punkte genau den möglichen (Bewegungs-)Zuständen unseres Systems entsprechen. Im Allgemeinen zeigt es sich, dass der Phasenraum die Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit besitzt. Weiterhin lässt sich leicht verifizieren, dass die Galilei-Gruppe auf diesem Raum operiert:

$$Gal(3) \to Aut(\mathcal{P})\,, \tag{2.12}$$

hierbei meint $Aut(\mathcal{P})$ die Gruppe der Symplektomorphismen auf $\mathcal{P}$.
Dieses Schema werden wir im Folgendem als Grundlage zur Beschreibung der Quantenmechanik verwenden. Zuvor müssen wir jedoch einen kurzen Exkurs in die spezielle Relativitätstheorie machen.

3 | Spezielle Relativitätstheorie

In diesem Abschnitt möchten wir kurz auf die notwendigen Modifikationen eingehen, die man einführen muss, um physikalische Systeme speziell-relativistisch zu behandeln. Eines der Ausgangspostulate der SRT ist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom gewählten Bezugssystem. Dieses Postulat besitzt starke experimentelle Evidenz und muss deswegen auch in jeder physikalischen Beschreibung der Natur beachtet werden. Wie wir allerdings gesehen haben, erlaubt die Galilei-Gruppe Relativbewegungen zu beliebigen Geschwindigkeiten und kann deswegen das obige Postulat nicht gewährleisten. Aus diesem Grund muss die Galilei-Gruppe zur Beschreibung von speziell-relativistischen Systemen ersetzt werden durch eine geeignetere Transformationsgruppe. Diese Gruppe ist die inhomogene Lorentz-Gruppe $O(3,1)\mathbb{R}^4$. Sie ist definiert als semidirektes Produkt zwischen der Lorentz-Gruppe $O(3,1)$ und der vierdimensionalen Translationsgruppe $\mathbb{R}^4$. Dabei gilt:

$$O(3,1) \coloneqq \{A \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R}) \,|\, A^T \eta A = \eta\}\,, \tag{3.1}$$

wobei η definiert ist als Diagonalmatrix $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$.
Die inhomogene Lorentz-Gruppe besitzt analog zur Galilei-Gruppe zehn Parameter und ist eine Lie Gruppe. Ihre Transformationen lassen sich folgendermaßen beschreiben:

$$t \mapsto t + t_0 \tag{3.2}$$
$$\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{x}_0 \tag{3.3}$$
$$\vec{x} \mapsto R\vec{x}\,,\ R \in O(3) \tag{3.4}$$
$$(t,\vec{x}) \mapsto \text{ Lorentz-Boost}\,. \tag{3.5}$$

Die inhomogene Lorentz-Gruppe unterscheidet sich demnach nur in den Relativbewegungen von der Galilei-Gruppe. Diese werden beschrieben durch sogenannte Lorentz-Boosts, die nicht nur die Orts- sondern auch die Zeitkoordinate transformieren. Aus diesem Grund finden wir in bewegten Bezugssystemen die Effekte der Zeitdilatation und Längenkontraktion. Dieser kurze Einschub zur speziellen Relativitätstheorie zeigt uns, dass die physikalische Beschreibung der Natur im Einklang mit den Transformationen der inhomogenen Lorentz-Gruppe geschehen muss. Darüber hinaus bleibt jedoch unser allgemeine Formalismus aus (2.12) unberührt. Physikalische Systeme werden demnach weiterhin durch einen Zustandsraum beschrieben, der zudem eine Gruppenoperation einer ausgezeichneten Symmetriegruppe zulässt. Die Symmetriegruppe der relativistischen Physik ist die inhomogene Lorentz-Gruppe.
Bekanntermaßen wird unsere Welt nicht durch die klassische Mechanik beschrieben, sondern basiert auf den Gesetzen der Quantenmechanik. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden den formalen Aufbau der QM studieren und unseren Zustandsraum diesem Formalismus anpassen.

4 | Unitarität und der quantenmechanische Zustandsraum

Der formale Aufbau der Quantenmechanik ist fundamental verschieden zu dem der klassischen Mechanik. Wir definieren ein quantenmechanisches System anhand der folgenden Axiome:

i) Ein physikalisches System wird beschrieben durch einen separablen komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$.

ii) Die Zustände des Systems sind den eindimensionalen Unterräumen von $\mathcal{H}$ zugeordnet. Hierbei bezeichnen wir den eindimensionalen Unterraum, der durch einen Vektor $\Psi \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ aufgespannt wird, mit $\langle\Psi\rangle_{\mathbb{C}}$.

iii) Beobachtbare Größen (Observablen) werden durch (nichtnotwendigerweise beschränkte) selbst-adjungierte lineare Operatoren A auf $\mathcal{H}$ dargestellt.

iv) Kopenhagener Deutung: Ist A eine Observable und $(a_i) \subseteq \mathcal{H}$ die zugehörige Eigenbasis, so haben wir folgende Zuordnungen

- die Eigenwerte $(\alpha_i) \subseteq \mathbb{R}$ von A, definiert durch $Aa_i = \alpha_i a_i$, spiegeln die möglichen Messwerte der Observablen wieder und

- ist $\Psi \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ ein normierter Vektor und $\Psi = \sum_i p_i a_i$, wobei $p_i = \langle a_i, \Psi\rangle$ gilt, seine Zerlegung bezüglich der Eigenbasis von A, so interpretieren wir die reellen Zahlen $|p_i|^2$ als Wahrscheinlichkeit den Messwert α_i im Zustand $\langle\Psi\rangle_{\mathbb{C}}$ zu finden.

Damit können wir ablesen, dass der Zustandsraum der QM durch den projektiven Raum

$$\mathbb{P}\mathcal{H} := {}^{\mathcal{H}\backslash\{0\}}\!\big/_{\mathbb{C}^*} \tag{4.1}$$

gegeben ist. Zusammen mit unseren vorherigen Ergebnissen benötigen wir zur speziell-relativistischen Beschreibung eines quantenmechanischen Systems eine Darstellung

$$O(3,1)\mathbb{R}^4 \to Aut(\mathbb{P}\mathcal{H}) \tag{4.2}$$

in einer geeigneten Automorphismengruppe.
Es bleibt somit abschließend zu klären, welche Art von Automorphismen unsere quantenmechanische Beschreibung invariant lassen. Hierfür machen wir Gebrauch von der zuvor angeführten Kopenhagener Deutung. Diese legt nahe, dass geeignete Automorphismen stets Wahrscheinlichkeiten erhalten müssen. Allgemein fordern wir daher, dass für Zustände $\langle\Psi\rangle_{\mathbb{C}}, \langle\Phi\rangle_{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ der Ausdruck

$$\frac{|\langle\Psi,\Phi\rangle|^2}{||\Psi||^2||\Phi||^2} \tag{4.3}$$

eine invariante Größe darstellen muss. Wir sehen sofort ein, dass jede unitäre Transformation U auf $\mathbb{H}$ einen solchen Automorphismus liefert, wenn wir definieren

$$\mathbb{P}U : \mathbb{P}\mathcal{H} \to \mathbb{P}\mathcal{H}\,;\, \langle\Psi\rangle_{\mathbb{C}} \mapsto \langle U\Psi\rangle_{\mathbb{C}}\,. \tag{4.4}$$

Damit erhalten wir eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}) \to Aut(\mathbb{P}\mathcal{H})\,;\, U \mapsto \mathbb{P}U\,. \tag{4.5}$$

Neben den unitären Transformationen auf $\mathcal{H}$, liefern aber auch anti-unitäre Operatoren geeignete Automorphismen auf dem Zustandsraum. Hierbei verstehen wir unter einem anti-unitären Operator V eine anti-lineare Abbildung auf $\mathcal{H}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\langle V\Psi, V\Phi\rangle = \langle \Phi, \Psi\rangle \text{ für alle } \Psi, \Phi \in \mathcal{H} \tag{4.6}$$

gilt.
Tatsächlich belegt ein Ergebnis von Wigner, dass alle Elemente in $Aut(\mathbb{P}\mathcal{H})$ entweder von unitären oder anti-unitären Operatoren auf $\mathcal{H}$ herkommen. Damit erhalten wir folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{U}(\mathcal{H}) \\ & & \downarrow \\ O(3,1)\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & Aut(\mathbb{P}\mathcal{H}) \end{array}$$

Somit stellt sich die Frage, ob die Darstellung der inhomogenen Lorentz-Gruppe auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}\mathcal{H}$ zu einer unitären Darstellung auf $\mathcal{H}$ geliftet werden kann? Im Allgemeinen ist dies allerdings nicht möglich. Nichtsdestotrotz erhält man ein vergleichbares Resultat durch den Übergang zur Poincaré Gruppe $P(3)$. Diese ist zunächst definiert als

$$P(3) \coloneqq SL(2,\mathbb{C})\mathbb{R}^4\,. \tag{4.7}$$

Die Definition macht dabei Gebrauch von der Spin-Überlagerung

$$SL(2,\mathbb{C}) \to SO^+(3,1) \tag{4.8}$$

auf die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe $SO^+(3,1) \subseteq O(3,1)$. Die Spin-Überlagerung liefert uns zudem eine natürliche Abbildung der folgenden Form:

$$P(3) \to O(3,1)\mathbb{R}^4\,. \tag{4.9}$$

Es zeigt sich nun, dass eine jede Darstellung der inhomogenen Lorentz-Gruppe auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}\mathcal{H}$ von einer unitären Darstellung der Poincaré Gruppe auf $\mathcal{H}$ herkommt:

$$\begin{array}{ccc} P(3) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O(3,1)\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & Aut(\mathbb{P}\mathcal{H}) \end{array}$$

Dies zeigt, dass unitäre Darstellungen der Poincaré Gruppe in völlig natürlicher Weise den Postulaten der Physik entspringen und somit grundlegend sind zum Verständnis der speziell-relativistischen Quantenmechanik.
Im Folgenden möchten wir dazu übergehen die Lie Algebra der Poincaré Gruppe zu studieren und die physikalische Bedeutung ihrer Generatoren zu analysieren.

5 | Poincaré Algebra

Als Poincaré Algebra $\mathfrak{p}$ bezeichnen wir die Lie Algebra der Poincaré Gruppe $P(3)$. Mit Hilfe der Spin-Überlagerung aus (4.8) sehen wir sofort ein, dass die Poincaré Algebra isomorph ist zu den Lie Algebren der Gruppen $O(3,1)\mathbb{R}^4$ und $SO(3,1)\mathbb{R}^4$. Aus diesem Grund werden wir zur Bestimmung von $\mathfrak{p}$ die Lie Algebra der inhomogenen Lorentz Gruppe berechnen. Dafür verschaffen wir uns zunächst eine (einfache) Matrixdarstellung von $O(3,1)\mathbb{R}^4$. Diese können wir beispielsweise in $GL(5,\mathbb{R})$ finden, indem wir folgende Zuordnung machen:

$$O(3,1)\mathbb{R}^4 \to GL(5,\mathbb{R})\,;\ (g,a) \mapsto \begin{bmatrix} g & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,, \tag{5.1}$$

wobei wir explizit $a \in \mathbb{R}^4$ als Spaltenvektor einsetzen. Man verifiziert umgehend, dass diese Abbildung ein stetiger Gruppenmonomorphismus ist und wir daher $O(3,1)\mathbb{R}^4$ als abgeschlossene Untergruppe von $GL(5,\mathbb{R})$ auffassen können. Diese Identifikation erlaubt es uns nun, die Poincaré Algebra zu definieren als

$$\mathfrak{p} = \{A \in Mat_{5\times 5}(\mathbb{R}) \,|\, \exp(tA) \in O(3,1)\mathbb{R}^4 \ \text{ für alle } \ t \in \mathbb{R}\}\,. \tag{5.2}$$

Ist nun $A \in \mathfrak{p}$, so zeigt eine einfache Rechnung, dass A von der folgenden Gestalt sein muss:

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\,, \tag{5.3}$$

wobei $\tilde{A} \in so(3,1)$ ist und $\tilde{a} \in \mathbb{R}^4$. Damit sehen wir umgehend, dass $\mathfrak{p}$ als reeller Vektorraum identifiziert werden kann mit:

$$\mathfrak{p} = so(3,1) \times \mathbb{R}^4\,. \tag{5.4}$$

In diesem Sinne schreiben wir Elemente $A = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{p}$ als Paare $(\tilde{A}, \tilde{a})$. Die Lie Klammer ist in dieser Notation gegeben durch:

$$[(\tilde{A},\tilde{a}),(\tilde{B},\tilde{b})] = ([\tilde{A},\tilde{B}], \tilde{A}\tilde{b} - \tilde{B}\tilde{a})\,. \tag{5.5}$$

Dieser Ergebnis zeigt uns insbesondere, dass die Poincaré Algebra zehndimensional ist. Generatoren können wir nun getrennt für die einzelnen Faktoren $so(3,1)$ und $\mathbb{R}^4$ angeben. Wir bezeichnen die Standardbasis auf $\mathbb{R}^4$ mit $e_0, \dots, e_3$. Die sechs Erzeuger von $so(3,1)$ klassifizieren wir in dem antisymmetrischen Schema $\omega^{\mu\nu}$ und meinen für $\mu < \nu$ damit die nachfolgenden reellen 4×4-Matrizen:

$$\omega^{0j} := \ \text{symmetrische Matrix mit 1 an } (0,j)\text{-Stelle, sonst } 0 \tag{5.6}$$

$$\omega^{ij} := \ \text{antisymmetrische Matrix mit } -1 \text{ an } (i,j)\text{-Stelle, sonst } 0\,, \tag{5.7}$$

wobei $i,j = 1,2,3$ und $i < j$ gilt.
Die Elemente $\{e_\mu, \omega^{\mu\nu}\}$ bilden dann eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathfrak{p}$.
In der Physik ist es üblich zur Komplexifizierung $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ überzugehen und dort die folgende $\mathbb{C}$-Basis einzuführen:

$$P_\mu := -\mathrm{i}e_\mu; \ \ J^{\mu\nu} := \mathrm{i}\omega^{\mu\nu}\,. \tag{5.8}$$

Bezeichnen wir weiterhin mit $\eta^{\mu\nu}$ die Komponenten der Diagonalmatrix $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, so können wir die Lie Algebren Struktur von $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ wie folgt niederschreiben:

$$\mathrm{i}[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu} \tag{5.9}$$

$$\mathrm{i}[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho}P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma}P^{\rho} \tag{5.10}$$

$$[P^\mu, P^\rho] = 0\,. \tag{5.11}$$

Die Generatoren der komplexifizierten Poincaré Algebra spielen in der Physik eine zentrale Rolle. Sie symbolisieren verschiedene Messgrößen, die zu den Transformationen der inhomogenen Lorentz-Gruppe assoziiert sind. Aus diesem Grund fasst man sie folgendermaßen zusammen:

- Hamilton-Operator: $H := P_0$
- Impuls-Operator: $\vec{P} := (P_1, P_2, P_3)$
- Drehimpuls-Operator: $\vec{L} := (J^{23}, -J^{13}, J^{12})$
- Boost-Operator: $\vec{K} := (J^{01}, J^{02}, J^{03})$

Insbesondere der Hamilton-Operator hat eine fundamentale Bedeutung in der Physik. Er beschreibt die Energie eines physikalischen Systems und ist damit das quantenmechanische Analogon zur Hamilton-Funktion in der klassischen Mechanik. In seiner Beschreibung als Generator von Zeittranslationen innerhalb der inhomogenen Lorentz Gruppe, kommt ihm zudem die Funktion einer infinitesimalen Zeitentwicklung zu. Daher definiert man allgemein die Bewegungsgleichung eines quantenmechanischen Zustands $\langle\Psi\rangle_{\mathbb{C}} \in \mathbb{P}\mathcal{H}$ durch:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi\,. \tag{5.12}$$

Diese Gleichung ist benannt nach Erwin Schrödinger und ihre Lösung beschreibt die zeitliche Entwicklung des Zustands. Hierbei versteht man die Operation des Hamilton-Operators auf $\mathcal{H}$ mithilfe der derivierten Darstellung. Ist nämlich $\pi : P(3) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung, so induziert die derivierte Darstellung $d\pi : \mathfrak{p} \to End(\mathcal{H}^\infty)$ eine Operation $d\pi_{\mathbb{C}}$ der komplexifizierten Poincaré Algebra auf dem dichten Unterraum der glatten Vektoren $\mathcal{H}^\infty \subseteq \mathcal{H}$. In vielen Fällen schreibt man unpräzise H für das Bild $d\pi_{\mathbb{C}}(H)$ und spricht von dem Hamilton-Operator auf $\mathcal{H}$. Gleichung (5.8) liefert uns den Zusammenhang

$$d\pi_{\mathbb{C}}(H) := -\mathrm{i}d\pi(e_0)\,. \tag{5.13}$$

Damit können wir nun folgende Rechnung durchführen, für $a, b \in \mathcal{H}^\infty$:

$$\begin{aligned}
\langle d\pi_{\mathbb{C}}(H)a, b\rangle &= -\mathrm{i}\langle d\pi(e_0)a, b\rangle && (5.14)\\
&= -\mathrm{i}\langle \frac{d}{dt}\pi\big(\exp(te_0)\big)a|_{t=0}, b\rangle && (5.15)\\
&= -\mathrm{i}\frac{d}{dt}\langle \pi\big(\exp(te_0)\big)a, b\rangle|_{t=0} && (5.16)\\
&= -\mathrm{i}\frac{d}{dt}\langle a, \pi\big(\exp(te_0)\big)^*b\rangle|_{t=0} && (5.17)\\
&= -\mathrm{i}\frac{d}{dt}\langle a, \pi\big(\exp(-te_0)\big)b\rangle|_{t=0} && (5.18)\\
&= \langle a, \mathrm{i}\frac{d}{dt}\pi\big(\exp(-te_0)\big)b|_{t=0}\rangle && (5.19)\\
&= \langle a, \mathrm{i}d\pi(-e_0)b\rangle && (5.20)\\
&= \langle a, -\mathrm{i}d\pi(e_0)b\rangle && (5.21)\\
&= \langle a, d\pi_{\mathbb{C}}(H)b\rangle\,. && (5.22)
\end{aligned}$$

Der Formalismus stellt daher sicher, dass der Hamilton-Operator stets symmetrisch ist und somit nur reelle Eigenwerte erlaubt. Da wir eingangs gesehen haben, dass die Eigenwerte

einer Observablen ihre möglichen Messwerte beschreiben, ist also garantiert, dass die beobachtbaren Energien an einem quantenmechanischen System reell sind.
Nichtsdestotrotz können wir im Allgemeinen keine Angaben darüber machen, ob die beobachtbaren Energien stets positiv sind. Da in der Physik negative Energien keine sinnvolle Interpretation haben, betrachtet man in der Regel nur solche unitäre Darstellungen, die positive Energie haben. Diese definiert man in der folgenden Weise:
Ist $\pi : P(3) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung und existiert für alle $a \in \mathcal{H}^\infty$ ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft

$$\langle d\pi_{\mathbb{C}}(H)a, a\rangle \geq \epsilon\langle a, a\rangle \,, \tag{5.23}$$

so sprechen wir von einer Darstellung mit positiver Energie. In diesem Fall sind die Eigenwerte des Hamilton-Operators positiv.
Insgesamt konnten wir damit einsehen, dass unitäre Darstellungen der Poincaré Gruppe von großer Bedeutung in der Physik sind.