Steffen Schmidt

Peter-Weyl Theorem

Vorlesung Unitäre Darstellungen der Poincarégruppe

Diese Ausarbeitung ist im Rahmen der Vorlesung *Unitäre Darstellungen der Poincarégruppe* im Wintersemester 2020/2021 an der Universität Heidelberg entstanden.

In dieser Ausarbeitung untersuchen wir den Satz von Peter-Weyl und diskutieren einige Anwendungen in der Theorie der Lie-Gruppen. Der Satz von Peter-Weyl wurde erstmals 1927 in [4] von Hermann Weyl und seinem Studenten Fritz Peter bewiesen und beantwortet für die reguläre Darstellung kompakter topologische Gruppen ein Hauptziel der (abstakten) harmonischen Analysis: Bestimme wie eine beliebige unitäre Darstellung von G aus einer Menge irreduzibler Darstellungen gebildet werden kann. Der Satz besteht dabei aus zwei Teilen: Erstens, die Matrixkoeffizienten einer kompakten topologischen Gruppe G liegen dicht im Raum $\mathcal{C}(G)$ der stetigen komplexwertigen Funktionen, und damit auch im Raum der quadratintegrablen Funktionen $\mathrm{L}^2(G)$. Zweitens, die reguläre Darstellung von G auf $\mathrm{L}^2(G)$ zerfällt in eine direkte Summe irreduzibler unitärer Darstellungen und die Matrix-Koeffizienten der irreduziblen unitären Darstellungen bilden eine Orthonormalbasis für $\mathrm{L}^2(G)$. Wir folgen dabei Kapitel 5.2 in [1] und ergänzen dieses Material mit Kapitel IV, Abschnitt 4 in [3].

Es sei im Folgenden G eine kompakte topologische Gruppe und $\mathrm{d}x$ ein normalisiertes Haar-Maß auf G, das heißt $\int_G \mathrm{d}x = 1$. Weiterhin bezeichnen wir mir $\widehat{G}$ das unitäre Dual von G, das heißt die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von G.

Wir beginnen diese Ausarbeitung mit der Wiederholung einer wichtigen Aussagen über die Darstellungstheorie kompakter Gruppen. Wir erinnern zunächst daran, dass eine *unitäre Darstellung* $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ von G ein Homomorphismus von G in die Gruppe $U(\mathcal{H}_\pi)$ der unitären Operatoren eines nichttrivialen Hilbertraums $\mathcal{H}_\pi$ ist, sodass $g \mapsto \pi(g)v$ eine stetige Abbildung von G nach $\mathcal{H}_\pi$ für alle $v \in \mathcal{H}_\pi$ ist. Eine zentrale Aussage ist nun, dass jede Banachraumdarstellung von G auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ bereits eine unitäre Darstellung ist.

Satz 0.1.
Es sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine Banachraum-Darstellung von G auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existiert eine Hermitesche Form auf $\mathcal{H}$, deren induzierte Norm mit der ursprünglichen Norm übereinstimmt, sodass π unitär ist.

Beweis. Siehe Propisition 8.9 in [2]. □

Als unmittelbare Folgerung aus dieser Aussage erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 0.2.
Endlichdimensionale Darstellungen (π, V) von G sind vollständig reduzibel, das heißt zerfallen in eine direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen.

Ausgehend von diesem Korollar können wir uns nun fragen, ob allgemeine unitäre Darstellungen von G auch zerfallen. In der Tat, in der Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 0.3.
Jede irreduzible Darstellung von G ist endlichdimensional, und jede unitäre Darstellung von G zerfällt in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

Beweis. Siehe Theorem 5.2 in [1]. □

Um unitäre Darstellungen kompakter Gruppen zu verstehen müssen wir mit der Hilbertraumstruktur des Darstellungsraums arbeiten. Dies führt zum Begriff der *Matrix-Koeffizienten.*

Definition 0.4. (Matrix-Koeffizienten)
Es sei $(\pi, (\mathcal{H}_\pi, \langle\cdot,\cdot\rangle))$ eine unitäre Darstellung von G. Dann heißen die Funktionen

$$\Phi_{u,v}(g) := \langle \pi(g)u, v\rangle, \qquad u, v \in \mathcal{H}_\pi,\ g \in G$$

Matrix-Koeffizienten von π. Wir bezeichnen die lineare Hülle der Matrix-Koeffizienten von π mit $\mathcal{E}_\pi$.

Bemerkung 0.5.

(i) Der Name Matrix-Koeffizient stammt aus folgender Beobachtung: Sind u und v Elemente einer Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von $\mathcal{H}_\pi$, dann ist $\phi_{u,v}$ ein Eintrag der Matrix von $\pi(g)$ bezüglich dieser Basis, denn

$$\pi_{ij}(g) = \phi_{e_i,e_j}(g) = \langle \pi(g)e_i, e_j\rangle.$$

(ii) Ist $(\rho, \mathcal{H})$ eine endlichdimensionale Darstellung von G, dann können wir offensichtlich die Darstellung aus ihren Matrixkoeffizienten rekonstruieren.

(iii) $\mathcal{E}_\pi$ liegt offensichtlich in $\mathcal{C}(G)$ und damit auch in $L^p(G)$ für alle p.

Lemma 0.6. *(Eigenschaften von $\mathcal{E}_\pi$)*
Es sei $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ eine unitäre Darstellung von G.

(i) $\mathcal{E}_\pi$ hängt nur von der Äquivalenzklasse unitärer Darstellungen von π ab.

(ii) $\mathcal{E}_\pi$ ist invariant unter Rechts- und Linkstranslation.

(iii) $\mathcal{E}_\pi$ ist ein zweiseitiges Ideal in $L^1(G)$.

(iv) Ist $dim(\mathcal{H}_\pi) = n < \infty$, dann ist $dim(\mathcal{E}_\pi) \leq n^2$.

Beweis.
(i) Es seien π und π' zwei unitäre Darstellungen von G sowie T eine unitäre Äquivalenz zwischen π und π', das heißt der unitäre Operator $T : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_{\pi'}$ erfüllt

$$\pi'(g) = T\pi(g)T^{-1}$$

für alle $g \in G$. Dann gilt für alle $g \in G$ und alle $u, v \in \mathcal{H}_\pi$

$$\langle \pi'(g)Tu, Tv\rangle = \langle T\pi(g)T^{-1}Tu, Tv\rangle = \langle T\pi(g)u, Tv\rangle = \langle \pi(g)u, v\rangle,$$

da T ein unitärer Operator ist.

(ii) Wir haben für $u, v \in \mathcal{H}_\pi$ und $x, y \in G$

$$\phi_{u,v}(y^{-1}x) = \langle \pi(y^{-1}x)u, v\rangle = \langle \pi(y)^*\pi(x)u, v\rangle = \langle \pi(x)u, \pi(y)v\rangle = \phi_{u,\pi(y)v}(x)$$

und ähnlich folgern wir $\phi_{u,v}(xy) = \phi_{\pi(y)u,v}(x)$. Dies zeigt, dass $\mathcal{E}_\pi$ invariant unter Rechts- und Linkstranslation ist.

(iii) Die Aussage folgt aus (ii) und Theorem 2.43 in [1].

(iv) Es gelte nun $\dim(\mathcal{H}_\pi) = n$, dann wird $\mathcal{E}_\pi$ nach Konstruktion von den n^2 Funktionen π_{ij} aufgespannt. □

Lemma 0.7.
Es sei $\pi = \pi_1 \oplus ... \oplus \pi_n$ eine direkte Summe unitärer Darstellungen π_i von G. Dann gilt

$$\mathcal{E}_\pi = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{\pi_i}$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathcal{E}_{\pi_i} \subset \mathcal{E}_\pi$ für alle $i = 1, ..., n$, da $\mathcal{H}_{\pi_i} \subset \mathcal{H}_\pi$. Betrachten wir andererseits $u = \sum_i u_i$ sowie $v = \sum_i v_i$ wobei $u_i, v_i \in \mathcal{H}_{\pi_i}$, dann gilt nach Voraussetzung $\langle \pi(g)u_j, v_k\rangle = 0$ für $j \neq k$ und daher

$$\phi_{u,v} = \sum_i \phi_{u_i,v_i} \in \sum_i \mathcal{E}_{\pi_i}.$$

□

Die Beziehung der Räume $\mathcal{E}_\pi$ und $\mathcal{E}_{\pi'}$ für $[\pi], [\pi'] \in \widehat{G}$ folgt aus den *Schurschen Orthogonalitätsrelationen.*

Proposition 0.8. *(Schursche Orthogonalitätsrelationen)*
Es seien π und π' zwei irreduzible unitäre Darstellungen von G. Wir betrachten die Räume $\mathcal{E}_\pi$ und $\mathcal{E}_{\pi'}$ als Unterräume von $L^2(G)$.

(i) Falls $[\pi] \neq [\pi']$, dann gilt $\mathcal{E}_\pi \perp \mathcal{E}_{\pi'}$.

(ii) Es sei $\{e_j\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_\pi$ und $\pi_{ij} := \phi_{e_i,e_j}$. Dann ist

$$\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} \mid i,j = 1,...,d_\pi\}$$

eine Orthonormalbasis für $\mathcal{E}_\pi$ mit $d_\pi := dim(\mathcal{H}_\pi)$.

Beweis. Es sei $A : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_{\pi'}$ eine lineare Abbildung. Wir definieren

$$\widetilde{A} := \int_G \pi'(x^{-1})A\pi(x)\ \mathrm{d}x.$$

Dann gilt

$$\widetilde{A}\pi(y) = \int_G \pi'(x^{-1})A\pi(xy)\ \mathrm{d}x = \int_G \pi'(yx^{-1})A\pi(x)\ \mathrm{d}x = \pi'(y)\widetilde{A},$$

das heißt $\widetilde{A}$ ist ein Verkettungsoperator. Wir definieren nun A geeignet. Für $v \in \mathcal{H}_\pi$ und $v' \in \mathcal{H}_{\pi'}$ setzen wir

$$Au := \langle u, v\rangle v'.$$

Dann erhalten wir für alle $u \in \mathcal{H}_\pi$ und $u' \in \mathcal{H}_{\pi'}$

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{A}u, u'\rangle &= \int_G \langle A\pi(x)u, \pi'(x)u'\rangle\ \mathrm{d}x \\ &= \int_G \langle \pi(x)u, v\rangle\langle v', \pi'(x)u'\rangle\ \mathrm{d}x \\ &= \int_G \phi_{u,v}(x)\overline{\phi_{u',v'}(x)}\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun das Schursche Lemma. Gilt $[\pi] \neq [\pi']$, dann ist $\widetilde{A} = 0$ und es folgt $\mathcal{E}_\pi \perp \mathcal{E}_{\pi'}$. Dies zeigt a). Gilt andererseits $\pi = \pi'$, dann ist nach dem Schurschen Lemma $\widetilde{A} = cI$ für ein $c \neq 0$. Wählen wir nun $u := e_i, u' := e'_i, v := e_j$ und $v' := e'_j$ dann erhalten wir

$$\int_G \pi_{ij}(x)\overline{\pi_{i'j'}(x)}\ \mathrm{d}x = c\langle e_i, e_{i'}\rangle = c\delta_{ii'}.$$

Weiterhin gilt

$$cd_\pi = \mathrm{tr}(\widetilde{A}) = \int_G \mathrm{tr}(\pi(x^{-1})A\pi(x))\ \mathrm{d}x = \mathrm{tr}(A) = \delta_{jj'}$$

nach Definition von A. Genauer haben wir $Au = \langle u, e_j\rangle e_{j'}$ verwendet. Zusammenfassend

$$\int_G \pi_{ij}(x)\overline{\pi_{i'j'}(x)}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{d_\pi}\delta_{ii'}\delta_{jj'}$$

und wir schließen, dass $\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij}\}$ eine orthonormale Menge ist . Aus $\dim(\mathcal{E}_\pi) \leq d_\pi^2$ nach Lemma 0.6 folgt, dass dies sogar eine Basis ist. $\square$

Im Folgenden betrachten wir

$$\mathcal{E} := \text{lineare Hülle von } \bigcup_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{E}_\pi.$$

Proposition 0.9.
$\mathcal{E}$ ist eine Algebra bzgl. der Multiplikation von Matrixkoeffizienten.

Beweis. Es seien $[\pi], [\pi'] \in \widehat{G}$. Wir wählen Basen für $\mathcal{H}_\pi$ und $\mathcal{H}_{\pi'}$ und identifizieren die Räume mit $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^{n'}$ mit $n := d_\pi$ und $n' = d_{\pi'}$. Wir betrachten $\mathbb{C}^{nn'}$ as Raum der $n \times n'$-Matrizen über $\mathbb{C}$ und definieren die Tensordarstellung $\pi \otimes \pi'$ auf $\mathbb{C}^{nn'}$ durch

$$(\pi \otimes \pi')(x)T = \pi(x)T\overline{\pi}'(x^{-1}).$$

Die Matrizen E_{jk} mit einer Eins in der j-ten Zeile und k-ten Spalte und Nullen sonst bilden eine Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^{nn'}$. Nun gibt eine einfache Rechnung

$$\langle(\pi \otimes \pi')(x)E_{jl}, E_{ik}\rangle = \pi_{ij}(x)\pi'_{kl}(x),$$

das heißt, dass $\pi_{ij}(x)\pi'_{kl}(x)$ eine Matrixelement einer endlichdimensionalen Darstellung von G ist. □

Proposition 0.10. *(Gelfand-Raikov)*
Es sei G eine lokalkompakte Gruppe. Dann trennen die irreduziblen unitären Darstellung von G Punkte.

Beweis. Siehe Theorem 3.34 in [1]. □

Satz 0.11.
$\mathcal{E}$ liegt dicht in $\mathcal{C}(G)$ bezüglich der Supremumsnorm, und dicht in $L^p(G)$ bezüglich der L^p-Norm für $p < \infty$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ dicht in $\mathcal{C}(G)$ liegt. Nach Proposition 0.9 ist $\mathcal{E}$ eine Algebra und nach Proposition 0.10 separariert diese Punkte. Ferner ist $\mathcal{E}$ abgeschlossen unter komplexer Konjugation, da jede Darstellung eine kontragradiente Darstellung besitzt und ist nicht leer (betrachte triviale Darstellung von G auf $\mathbb{C}$). Die Aussage folgt nun nach dem Satz von Stone-Weierstrass.
Den originalen und sehr eleganten Beweis von Peter und Weyl kann in Theorem 5.11 in [1] nachgelesen werden. □

Verbinden wir nun Satz 0.11 mit den Schurschen Orthogonalitätsrelationen, so sehen wir unmittelbar, dass $\mathrm{L}^2(G)$ in eine direkte Summe der Räume $\mathcal{E}_\pi$ zerfällt, wobei $[\pi]$ über $\widehat{G}$ läuft. Ferner erhalten wir eine Orthonormalbasis für $\mathrm{L}^2(G)$, wenn wir ein π der Äquivalenzklasse $[\pi]$ fixieren und die Matrix-Koeffizienten bezüglich einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_\pi$ betrachten. Die Wahl eines solchen π's treffen wir dabei genau einmal. All diese Resultate können zu einem Theorem zusammengefasst werden, dem sogenannten Theorem von Peter-Weyl.

Satz 0.12. *(Peter-Weyl)*
Die Algebra der Matrixkoeffizienten $\mathcal{E}$ einer unitären Darstellung π von G liegt dicht in $\mathcal{C}(G)$ bezüglich der Supremumsnorm und wir haben eine direkte Zerlegung

$$L^2(G) = \bigoplus_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{E}_\pi.$$

Ist ferner π_{ij} gegeben wie in Bemerkung 0.5, dann ist

$$\{\sqrt{d_\pi}\pi_{ij} \mid i,j = 1,...,d_\pi,\ [\pi] \in \widehat{G}\}$$

eine Orthonormalbasis für $L^2(G)$. Jedes $[\pi] \in \widehat{G}$ tritt in der links bzw. rechts regulären Darstellung von G mit Vielfachheit d_π auf.

Beispiel 0.13. Wir betrachten die Kreisgruppe

$$S^1 := \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Da S^1 eine abelsche Gruppe ist, sind nach dem Schurschen Lemma alle irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen eindimensional. Die Matrix-Koeffizienten sind die Funktionen $e^{in\theta}$. Das Peter-Weyl Theorem besagt nun, dass endliche Linearkombinationen dieser Funktionen dicht in $\mathrm{L}^2(S^1)$ liegen. In anderen Worten ist $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis für $\mathrm{L}^2(S^1)$.

Eine wichtige Folgerung, die wir aus dem Satz von Peter-Weyl gewinnen, ist, dass jede kompakte Gruppe eine treue Darstellung besitzt. Wir nennen dabei eine Darstellung $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ von G *treu*, falls der Gruppenhomomorphismus π injektiv ist. Wir benötigen dazu folgendes Lemma.

Korollar 0.14.
Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Dann besitzt G eine treue Darstellung.

Beweis. Ohne Einschränkung sei im Folgenden G nicht trivial. Es sei $g \in G \setminus \{1_G\}$. Dann finden wir eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(G)$, sodass $f(g) \neq f(1_G)$. Nach dem Satz von Peter-Weyl finden wir daher einen Matrixkoeffizienten ϕ, sodass $\phi(g) \neq \phi(1_G)$. Wir folgern, dass eine Darstellung existiert, dessen Kern K_1 eine echte abgeschlossene Untergruppe von G ist. Da G kompakt ist, ist K_1 kompakt. Ist $K_1 \neq \{1_G\}$, können wir ein $h \in K_1 \setminus \{1_G\}$ wählen und einen Matrixkoeffizienten finden mit Kern K_2 sodass $K_2 \cap K_1$ echt in K_1 enthalten ist. Wiederholen wir dieses Verfahren erhalten wir eine absteigende Kette kompakter Gruppen in G und da G kompakt ist diese Kette endlich. Wir haben daher eine endliche Zahl von Darstellungen gefunden deren Kerne trivialen Schnitt haben. Die direkte Summe dieser Darstellungen ist nun treu. $\square$

Literatur

[1] G.B.Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis.* CRC Press, 1995.

[2] E.Freitag. *Unitary representations of the Poincaré group.* Skript, Stand 1.12.2020.

[3] A.W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction.* Second Edition. Progress in Mathematics, vol . 140, Birkhäuser, Boston, 2002.

[4] F. Peter, H. Weyl. *Über die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe.* Mathematische Annalen, Band 97, 1927, S. 737–755.