Cliffordalgebren, Spingruppen und Spindarstellungen

VORLESUNG UNITÄRE DARSTELLUNGEN DER POINCARÉGRUPPE

Diese Ausarbeitung ist im Rahmen der Vorlesung *Unitäre Darstellungen der Poincarégruppe* im Wintersemester 2020/2021 an der Universität Heidelberg entstanden.

In dieser Ausarbeitung untersuchen wir Cliffordalgebren und ihre Eigenschaften und geben erste Beispiele. Ferner werden wir die Pin- und die Spingruppe konstruieren und die Definition der Vorlesung aus den Eigenschaften dieser herleiten. Abschließend erwähnen wir den Begriff der Dirac-Spinordarstellung.

Es bezeichne im Folgenden $\mathbb{K}$ stets den Körper der komplexen oder reellen Zahlen und V einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Wir folgen in dieser Ausarbeitung eng der Darstellung in [3] und ergänzen einige Aussagen aus [5] und [6].

1. Quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen

In diesem Abschnitt wiederholen wir die aus der linearen Algebra bekannte Korrespondenz zwischen quadratischen und symmetrischen Bilinearformen. In Abschnitt 2 werden wir die Cliffordalgebra für einen Vektorraum V mit (nicht-ausgearteter) symmetrischer Bilinearform B definieren. Es ist in der Literatur auch verbreitet eine äquivalente Definition mithilfe quadratischer Formen zu geben. Dieser Abschnitt soll die beiden äquivalenten Betrachtungsweisen erklären.

Definition 1.1. (Symmetrische Bilinearform)
Eine *symmetrische Bilinearform* ist eine Abbildung $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ welche symmetrisch und $\mathbb{K}$-linear ist. Die Form B heißt *nicht-ausgeartet*, falls für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Vektor $w \in V$ existiert, sodass $B(v, w) \neq 0$ gilt.

Für unserer Betrachtungen zentral sind die symmetrischen Standardbilinearformen, welche im folgenden Beispiel eingeführt werden.

Beispiel 1.2. (Symmetrische Standardbilinearformen)

(i) Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^{s,t}$ den Vektorraum $\mathbb{R}^{s+t}$ mit Standardbasis $e_1, ..., e_{s+t}$ und der symmetrischen Standardbilinearform η gegeben durch

$$\eta(e_i, e_i) := \begin{cases} +1 & 1 \leq i \leq s, \\ -1 & s+1 \leq i \leq s+t \end{cases}, \qquad \eta(e_i, e_j) = 0 \;\; \forall i \neq j.$$

Die Bilinearform η hat Signatur (s,t), d.h. Signatur

$$(\underbrace{+,...,+}_{s},\underbrace{-,...,-}_{t})$$

und ist nicht-ausgeartet. $\mathbb{R}^{s,0} = \mathbb{R}^s$ ist dabei der *euklidische Raum* und $\mathbb{R}^{s,1}$ bzw. $\mathbb{R}^{1,t}$ sind die zwei Versionen des *Minkowski-Raums.* η wird in der physikalischen Literatur auch als *Pseudoskalarprodukt* bezeichnet. Eine Menge von Vektoren $v_1,...,v_s$ und $w_1,...,w_t$ in $\mathbb{R}^{s,t}$ bezeichnen wir als *Orthonormalbasis*, wenn

$$\eta(v_i,v_j) = \delta_{ij}, \qquad \eta(w_i,w_j) = -\delta_{ij}, \qquad \eta(v_i,w_j) = 0$$

gilt, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta ist.

(ii) Auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^d$ betrachten wir die nicht-ausgeartete symmetrische komplexe Bilinearform q, welche auf der Standardbasis $e_1,...,e_d$ gegeben ist durch

$$q(e_i,e_i) = +1 \quad \forall 1 \leq i \leq d, \qquad q(e_i,e_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Es ist hierbei zu beachten, dass wir für eine symmetrischen Bilinearform auf einem komplexen Vektorraum keine Signatur haben. In der Tat, wir können einen Vektor v eines $\mathbb{C}$-Vektorraums stets mit der komplexen Einheit i multiplizieren und da die symmetrische Bilinearform B komplex bilinear ist, können wir $B(v,v) = +1$ zu $B(iv,iv) = -1$ tauschen.

In dieser Arbeit arbeiten wir stets über dem Körper der komplexen oder reellen Zahlen. Die Wichtigkeit der in Beispiel 1.2 eingeführten Bilinearformen ergibt sich aus der folgenden Proposition.

Proposition 1.3.
Jede nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform B auf einem reellen oder komplexen Vektorraum V ist isomorph zu genau einem der Beispiele in 1.2. Insbesondere hat jede symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V eine wohldefinierte Signatur.

Beweis. Siehe zum Beispiel Kapitel 7 in [1]. □

Wir werden daher im Folgenden stets mit nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearformen arbeiten. Es ist hierbei wichtig zu erwähnen, dass es in der Literatur verbreitet ist eine äquivalente Form auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V zu verwenden, die *quadratische Form.*

Definition 1.4. (Quadratische Form)
Eine *quadratische Form* über $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $Q : V \to \mathbb{K}$ von einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V nach $\mathbb{K}$, sodass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

(i) $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$.

(ii) Die Funktion $Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$, $u,v \in V$, ist bilinear.

Wir bezeichnen das Paar (V, Q) im Folgenden auch als *quadratischen Raum.*

Bemerkung 1.5. *Ist $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$, so ist eine quadratische Form über $\mathbb{K}$ eine homogenes Polynom vom Grad 2 in n Variablen und Koeffizienten in $\mathbb{K}$:*

$$q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

oder äquivalent

$$q(x) = x^T A x, \qquad x = (x_1, ..., x_n),\ A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}.$$

Ist nun (V, B) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform B, dann können wir eine dazu assoziierte quadratische Form definieren

$$Q : V \to \mathbb{K}, \qquad v \mapsto Q(v) := B(v, v).$$

Ist andererseits (V, Q) ein quadratischer Raum, so ist nach Definition

$$B : V \times V \to \mathbb{K}, \qquad B(v_1, v_2) := \frac{1}{2}(Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2))$$

eine symmetrische Bilinearform. Wir schließen, dass wir eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz haben:

$$\{\text{symmetriche Bilinearformen } B : V \times V \to \mathbb{K}\} \longleftrightarrow \{\text{quadratische Formen } Q : V \to \mathbb{K}\}.$$

2. Cliffordalgebren

Wir sind nun bereit den Begriff der *Cliffordalgebra* zu definieren. In diesem Abschnitt untersuchen wir zudem Eigenschaften der Cliffordalgebra und erklären einen Vektorraum-Isomorphismus mit der äußeren Algebra.

2.1. Definition und Eigenschaften

Definition 2.1. (Clifford-Algebra)
Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und B eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Eine *Cliffordalgebra* des Paares (V, B) ist ein Paar $(\mathrm{Cl}(V, B), \gamma)$ bestehend aus:

1. $\mathrm{Cl}(V, B)$ ist eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Einselement 1.
2. *Clifford-Relation*: $\gamma : V \to \mathrm{Cl}(V, B)$ ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung mit

$$\{\gamma(v), \gamma(w)\} = \gamma(v)\gamma(w) + \gamma(w)\gamma(v) = -2B(v, w) \cdot 1 \qquad \forall\ v, w \in V.$$

3. *Universelle Eigenschaft*: Es sei $\mathcal{A}$ eine weitere $\mathbb{K}$-Algebra mit Einselement 1 und $\delta : V \to \mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung, welche

$$\{\delta(v), \delta(w)\} = -2B(v,w) \cdot 1 \qquad \forall\ v, w \in V$$

erfüllt. Dann existiert ein eindeutiger Algebrenhomomorphismus $\varphi : \mathrm{Cl}(V,B) \to \mathcal{A}$ sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \mathrm{Cl}(V,B) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathcal{A}. \end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.2. *In der Definition genügt es für die Clifford-Relation*

$$\gamma(v)^2 = -B(v,v) \cdot 1 \qquad \forall v \in V$$

zu fordern. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von B, der $\mathbb{K}$-Linearität von γ sowie dem Anwenden der obigen Cliffordrelation auf v, w und $v + w$. Diese Beobachtung ermöglicht es uns insbesondere die Clifford-Relation in

$$\gamma(v)^2 = -Q(v) \cdot 1 \qquad \forall v \in V$$

umzuschreiben, wobei nun Q die zu B assoziierte quadratische Form bezeichnet. Dies ist eine in der Literatur häufig anzutreffende Beschreibung der Clifford-Relation (cf. [6]).

Nachdem wir die Cliffordalgebra definiert haben müssen wir nun die Existenz und Eindeutigkeit untersuchen. Der Existenzbeweis erfolgt mithilfe einer Standardkonstruktion der Tensoralgebra. Für mehr Informationen zur Tensoralgebra verweisen wir auf Kapitel A in [4].

Satz 2.3. *(Existenz)*
Für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit symmetrischer nicht-ausgearteter Bilinearform B existiert eine Cliffordalgebra $(Cl(V,B), \gamma)$.

Beweis. Wir betrachten die Tensoralgebra von V

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V, \qquad T^k(V) := V^{\otimes k}$$

mit $T^0(V) := \mathbb{K}$. Die Multiplikation auf $T(V)$ ist eindeutig bestimmt durch den kanonischen Isomorphismus

$$T^k(V) \otimes T^l(V) \longrightarrow T^{k+l}(V), \qquad k, l \in \mathbb{N}_0.$$

Dies macht $T(V)$ zu einer $\mathbb{N}_0$-graduierten, unitären, assoziativen Algebra. In $T(V)$ betrachten wir das zweiseitige Ideal $I(V,B)$, welches durch die Menge

$$\{v \otimes v + B(v,v) \cdot 1 \mid v \in V\}$$

erzeugt wird. Da $I(V,B)$ ein zweiseitiges Ideal ist, erhalten wir eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra

$$\mathrm{Cl}(V,B) := T(V)/I(V,B), \qquad [a]\cdot[b] := [a\otimes b] \qquad \forall a,b \in T(V).$$

Als nächstes konstruieren wir die Cliffordabbildung γ. Dazu bezeichne $\iota : V \to T(V)$ die kanonische Inklusion und $\pi : T(V) \to \mathrm{Cl}(V,B)$ die kanonische Projektion. Wir setzen

$$\gamma := \pi \circ \iota : V \longrightarrow \mathrm{Cl}(V,B).$$

Diese Abbildung ist nach Konstruktion $\mathbb{K}$-linear, wohldefiniert und erfüllt

$$\gamma(v)^2 = \gamma(v)\gamma(v) = [v\otimes v] = -B(v,v)\cdot 1 \qquad \forall v \in V.$$

Wir können nun die aus der linearen Algebra bekannte Polarisation anwenden und erhalten

$$\{\gamma(v),\gamma(w)\} = -2Q(v,w)\cdot 1$$

für alle $v,w \in V$. Aus diesen Betrachten können wir ferner feststellen, dass das Bild $\gamma(V)$ die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(V,B)$ multiplikativ erzeugt, da der Vektorraum V die Tensoralgebra $T(V)$ durch tensorieren erzeugt.
Es bleibt abschließend die universelle Eigenschaft zu zeigen. Diese folgt aus der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra (siehe Proposition A.14 in [4]). In der Tat, jede lineare Abbildung $\delta : V \to \mathcal{A}$ in eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra $\mathcal{A}$ lässt sich nach Definition der Tensoralgebra zu einem Algebrenhomomorphismus $\Delta : T(V) \to \mathcal{A}$ fortsetzen. Nehmen wir nun zusätzlich an, dass die Abbildung δ die Cliffordrelation

$$\{\delta(v),\delta(w)\} = -2B(v,w)\cdot 1 \qquad v,w \in V$$

erfüllt, dann ist $I(V,B) \subset \ker(\Delta)$ nach Definition und die Abbildung Δ schränkt sich auf einen Algebrenhomomorphismus $\varphi : \mathrm{Cl}(V,B) \to \mathcal{A}$ ein, welcher $\varphi\circ\gamma = \delta$ erfüllt. Dieser Homomorphismus φ ist eindeutig bestimmt, da $\gamma(V)$ die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(V,B)$ multiplikativ erzeugt und φ auf dem Bild $\gamma(V)$ bestimmt ist. □

Korollar 2.4. *(Eindeutigkeit)*
Es seien ($Cl(V,B),\gamma$) und ($Cl'(V,B),\gamma'$) zwei Cliffordalgebren über dem selben Vektorraum (V,B). Dann existiert ein eindeutiger Algebrenisomorphismus $f : Cl(V,B) \to Cl'(V,B)$ sodass $f\circ\gamma = \gamma'$ gilt.

Beweis. Es seien also $(\mathrm{Cl}(V,B),\gamma)$ und $(\mathrm{Cl}'(V,B),\gamma')$ zwei Cliffordalgebren über dem selben Vektorraum (V,B). Da $\gamma' : V \to \mathrm{Cl}'(V,B)$ nach Voraussetzung die Cliffordrelation erfüllt, erhalten wir nach der universellen Eigenschaft von $\mathrm{Cl}(V,B)$ einen eindeutigen Algebrenhomomorphismus $f : \mathrm{Cl}(V,B) \to \mathrm{Cl}'(V,B)$, sodass dass folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\gamma'"'] & \mathrm{Cl}(V,B) \arrow[d, "f"] \\ & \mathrm{Cl}'(V,B). \end{tikzcd}$$

Andererseits erfüllt $\gamma : V \to \mathrm{Cl}(V,B)$ die Cliffordrelation und wir erhalten nach der universellen Eigenschaft von $\mathrm{Cl}'(V,B)$ einen eindeutigen Algebrenhomomorphismus $f' : \mathrm{Cl}'(V,B) \to \mathrm{Cl}(V,B)$, sodass dass folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathrm{Cl}'(V,B) \arrow[d, "f'"] \\ & \mathrm{Cl}(V,B). \end{tikzcd}$$

Wir erhalten damit

$$f' \circ \gamma' = \gamma,$$
$$f \circ \gamma = \gamma'$$

und daher

$$f \circ f' \circ \gamma = \gamma, \qquad f' \circ f \circ \gamma' = \gamma'.$$

Andererseits gilt $\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}(V,B)} \circ \gamma = \gamma$ und $\mathrm{id}_{\mathrm{Cl}'(V,B)} \circ \gamma' = \gamma'$ und aus der Eindeutigkeit folgt $f \circ f' = \mathrm{id}_{\mathrm{Cl}(V,B)}$ und $f' \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{Cl}'(V,B)}$. □

Wir erhalten unmittelbar aus den obigen Beweisen das folgende Korollar.

Korollar 2.5. *(Eigenschaften)*

(i) *Das Bild des Vektorraums V unter γ erzeugt $Cl(V,B)$.*

(ii) *Ist $B = 0$, dann existiert ein Algebrenisomorphismus*

$$(Cl(V,0), \cdot) \cong (\bigwedge(V), \wedge)$$

wobei γ durch die Standardeinbettung von V in $\bigwedge(V)$ gegeben ist.

(iii) *Es sei $dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ und $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis für (V,B). Dann bildet die Menge*

$$\{\gamma(e_{i_1}) \cdot \gamma(e_{i_2}) ... \gamma(e_{i_k}) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < .... < i_k \leq n, \ 0 \leq k \leq n\}$$

ein Erzeugendensystem für $Cl(V,Q)$ als Vektorraum. Wir verstehen das leere Produkt für $k = 0$ als 1. Dies impliziert insbesondere

$$dim_{\mathbb{K}} Cl(V,B) \leq 2^n.$$

Wir werden einige Beispiele für Cliffordalgebren in Abschnitt 3 für Vektorräume kennenlernen, welche mit einer nicht-ausgearteten symmetrischen Bilinearform ausgestattet sind. Diese Beispiele werden uns insbesondere die Struktur der Cliffordalgebren offenbaren. Hier zunächst ein kleines nicht-triviales Beispiel.

Beispiel 2.6.
Wir betrachten die Cliffordalgebra über einem eindimensionalen Vektorraum $(\mathbb{K}, B)$. Es sei $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann ist $\mathrm{Cl}(\mathbb{K}, B)$ zweidimensional und wird als $\mathbb{K}$-Vektorraum aufgespannt durch $\{1, \gamma(x)\}$ mit der Relation

$$\gamma(x) \cdot \gamma(x) = -B(x, x) \cdot 1.$$

Abschließend untersuchen wir noch eine wichtige Graduierung von Cliffordalgebren, die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung. Dazu sei $T(V)_{\bar{0}}$ der Untervektorraum der Tensoralgebra von Elementen von geradem Grad und $T(V)_{\bar{1}}$ der Untervektorraum von Elementen von ungeradem Grad, d.h.

$$T(V)_{\bar{0}} := \bigoplus_{k \text{ even}} T^k(V), \qquad T(V)_{\bar{1}} := \bigoplus_{k \text{ odd}} T^k(V).$$

Wir haben nun

$$I(V, B) = (T(V)_{\bar{0}} \cap I(V, B)) \oplus (T(V)_{\bar{1}} \cap I(V, B))$$

und sehen damit, dass $\mathrm{Cl}(V, B)$ die Struktur einer assoziativen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Algebra trägt, einer Superalgebra:

$$\mathrm{Cl}(V, B) = \mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{0}} \oplus \mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{1}}$$

wobei

$$\mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{0}} = T(V)_{\bar{0}} / (T(V)_{\bar{0}} \cap I(V, B)), \qquad \mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{1}} = T(V)_{\bar{1}} / (T(V)_{\bar{1}} \cap I(V, B))$$

und

$$\mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{i}} \cdot \mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{j}} \subset \mathrm{Cl}(V, B)_{\overline{i+j}}, \qquad \bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_2.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{0}}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{Cl}(V, B)$. Die Räume $\mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{0}}$ und $\mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{1}}$ lassen sich auch eleganter konstruieren. Dazu greifen wir auf Abschnitt 2.3 vor. Dort werden wir sehen, dass die lineare Abbildung $-\mathrm{id}_V : V \to V$ einen Algebrenautomorphismus

$$\alpha : \mathrm{Cl}(V, B) \longrightarrow \mathrm{Cl}(V, B)$$

induziert, welcher $\alpha^2 = 1$ erfüllt. Die Unterräume $\mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{i}}$ entsprechen dann dem $(-1)^{\bar{i}}$-ten Eigenraum von α. Insbesondere erkennen wir aus dieser Betrachtung

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{0}} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cl}(V, B)_{\bar{1}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Cl}(V, B).$$

Man sagt auch, dass $\mathrm{Cl}(V, B)$ eine Superalgebra ist.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer schönen Zerlegung von Superalgebren $\mathrm{Cl}(V, B)$ in $\mathbb{Z}_2$-graduierte Tensorprodukte. Betrachten wir zwei Superalgebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit Einselement über $\mathbb{K}$, dann ist das Tensorprodukt von Algebren $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ diejenige Algebra, deren zugrundeliegender Vektorraum das Tensorprodukt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist und die Multiplikation auf (einfachen Elementen) gegeben ist durch

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb'), \qquad a, a' \in \mathcal{A},\ b, b' \in \mathcal{B}.$$

Betrachten wir nun Superalgebren

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} + \mathcal{A}_{\bar{1}}, \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{B}_{\bar{1}}$$

so können wir eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte Multiplikation einführen durch

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|}(aa') \otimes (bb')$$

für einfache Elemente $a, a' \in \mathcal{A}$ und $b, b' \in \mathcal{B}$. Die resultierende Algebra bezeichnen wir auch als $\mathbb{Z}_2$-graduiertes Tensorprodukt und schreiben $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$. Dies ist wieder eine Superalgebra mit

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B})_{\bar{0}} &= \mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}} + \mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}},\\ (\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B})_{\bar{1}} &= \mathcal{A}_{\bar{1}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{0}} + \mathcal{A}_{\bar{0}} \otimes \mathcal{B}_{\bar{1}}.\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_2$-graduierte Tensorprodukte ermöglichen es uns eine Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(V, B)$, welche eine B-orthogonale Zerlegung besitzt, in ein $\mathbb{Z}_2$-graduiertes Tensorprodukt dieser Unterräume zu zerlegen.

Proposition 2.7.
Es sei $V = V_1 \oplus V_2$ eine B-orthogonale Zerlegung des Vektorraums V. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus von Cliffordalgebren

$$Cl(V, B) \longrightarrow Cl(V_1, B_1)\hat{\otimes} Cl(V_2, B_2),$$

wobei die B_i die Einschränkungen von V auf V_i bezeichnen und $\hat{\otimes}$ das $\mathbb{Z}_2$-graduierte Tensorprodukt ist.

Beweis. Wir definieren die Abbildung

$$f : V \longrightarrow \mathrm{Cl}(V_1, B_1)\hat{\otimes}\mathrm{Cl}(V_2, B_2), \qquad v = v_1 + v_2 \mapsto v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2.$$

Diese Abbildung erfüllt unter Ausnutzung der B-Orthogonalität der Zerlegung

$$f(v)^2 = (v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2)^2 = v_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes v_2^2 = -(B_1(v_1, v_1) + B_2(v_2, v_2))1 \otimes 1 = -B(v, v)1 \otimes 1.$$

Nach der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra setzt sich f zu einem Algebrenhomomorphismus fort

$$f : \mathrm{Cl}(V, B) \longrightarrow \mathrm{Cl}(V_1, B_1)\hat{\otimes}\mathrm{Cl}(V_2, B_2).$$

Das Bild von f ist dabei eine Unteralgebra mit

$$1 \otimes \mathrm{Cl}(V_2, B_2) \in \mathrm{Im}(f), \qquad \mathrm{Cl}(V_1, B_1) \otimes 1 \in \mathrm{Im}(f).$$

Wir folgern, dass f surjektiv ist. Die Injektivität folgt aus Dimensionsgründen. $\square$

2.2. Cliffordalgebren und äußere Algebren

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Beziehung zwischen Cliffordalgebren und äußeren Algebren. Wir werden sehen, dass wir die Multiplikation in der Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(V, B)$ als eine Deformation des Wedgeproduktes auf $\bigwedge(V)$ betrachten können.

Wir haben bereits in Korollar 2.5 gesehen, dass im Fall einer trivialen symmetrischen Bilinearform $B = 0$ wir einen Algebrenisomorphismus

$$(\mathrm{Cl}(V, 0), \cdot) \cong (\bigwedge(V), \wedge)$$

erhalten, wobei γ durch die Standardeinbettung von V nach $\bigwedge(V)$ gegeben ist. Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass für eine beliebige nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform B die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(V, B)$ immer noch als Vektorraum isomorph zur äußeren Algebra ist. Daraus können wir insbesondere auf die Dimension der Cliffordalgebra schließen. Um dies zu zeigen benötigen wir den Begriff der Kontraktion.

Lemma 2.8. *(Kontraktion)*
Es sei $v \in V$ und $\sigma \in \bigwedge^k(V)$. Dann existiert eine eindeutige $(k-1)$-Form $v \lrcorner \sigma \in \bigwedge^{k-1}(V)$, genannt Kontraktion von v und σ, sodass die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) ist $\sigma \in V$, dann ist $v \lrcorner \sigma = B(v, \sigma)$ und

(ii) für alle $\sigma \in \bigwedge^k(V), \omega \in \bigwedge^l(V)$ gilt

$$v \lrcorner (\sigma \wedge \omega) = (v \lrcorner \sigma) \wedge w + (-1)^k \sigma \wedge (v \lrcorner w).$$

Beweis. Dieses Lemma ist aus den Grundvorlesungen bekannt. Genauer definieren wir die Kontraktion in $\bigwedge(V)$ wie folgt: Für $v \in V$ definieren wir die Kontraktion als lineare Abbildung

$$(v \lrcorner) : \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k-1} V$$

mit

$$v \lrcorner (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} B(v_i, v) v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge \hat{v}_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_k$$

wobei das mit $\widehat{(\cdot)}$ bezeichnete Element ausgelassen wird. Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass dies die gewünschten Eigenschaften liefert. $\square$

Mithilfe dieses Lemmas können wir nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 2.9.
Es existiert ein (kanonischer) Isomorphismus von Vektorräumen $\bigwedge(V) \to Cl(V, B)$. Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von (V, B), dann ist dieser Isomorphismus gegeben durch

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mapsto \gamma(e_{i_1}) \cdot \gamma(e_{i_2}) \cdot \dots \cdot \gamma(e_{i_k}).$$

Insbesondere ist die Dimension der Cliffordalgebra

$$dim_{\mathbb{K}}(Cl(V, B)) = 2^n, \qquad n = dim_{\mathbb{K}}(V).$$

Beweis. Wir betrachten die folgende lineare Abbildung

$$\delta : V \longrightarrow \mathrm{End}\left(\bigwedge(V)\right), \qquad v \mapsto \delta(v)\,\left(\alpha \mapsto v \wedge \alpha - v \lrcorner \alpha\right).$$

Diese Abbildung erfüllt

$$\{\delta(v), \delta(w)\}\alpha = -2B(v,w)\alpha$$

wie eine einfache Rechnung zeigt. Oder anders gesagt, zeigt eine "kleine"Rechnung

$$\delta(v)(\delta(v)(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k})) = -2B(v,v)(e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k})$$

Nach der universellen Eigenschaft der Cliffordalgebra können wir nun δ zu einem Algebrenhomomorphismus

$$\varphi : \mathrm{Cl}(V,B) \longrightarrow \mathrm{End}\left(\bigwedge(V)\right)$$

erweitern. Wir definieren nun

$$f : \mathrm{Cl}(V,B) \longrightarrow \bigwedge(V), \qquad x \mapsto (\varphi(x))\left(1_{\bigwedge(V)}\right).$$

Es sei ferner $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis für (V,B), dann gilt nach Konstruktion

$$f(\gamma(e_{i_1}) \cdot \gamma(e_{i_2}) \cdot ... \cdot \gamma(e_{i_k})) = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_k}.$$

Damit ist die Abbildung f surjektiv. Ferner gilt nach dem Dimensionssatz aus der linearen Algebra

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + \dim\underbrace{\left(\bigwedge(V)\right)}_{=2^{\dim_{\mathbb{K}}(V)}} = \dim(\mathrm{Cl}(V,B)).$$

Andererseits wissen wir nach Korollar 2.5, dass $\dim(\mathrm{Cl}(V,B)) \leq 2^{\dim_{\mathbb{K}}(V)}$ gilt. Wir schließen, dass $\dim(\ker(f)) = 0$ gilt, das heißt f ist injektiv und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 2.10.

(i) Die Abbildung $f : Cl(V,B) \to \bigwedge(V)$ heißt auch Symbolabbildung und ihre Inverse Quantisierungsabbildung.

(ii) Man kann sogar zeigen, dass die Symbolabbildung f einen Isomorphismus graduierter Algebren $gr(Cl(V,B)) \to \bigwedge(V)$ erzeugt (siehe z.B. Proposition 2.6 in [5]).

Korollar 2.11.
Es sei $(Cl(V,B), \gamma)$ eine Cliffordalgebra. Dann ist die lineare Abbildung $\gamma : V \to Cl(V,B)$ injektiv und wir können das Bild von γ mit dem Vektorraum V identifizieren.

2.3. Isomorphismen von Cliffordalgebren

Mit den Resultaten aus den Abschnitten 2.1 und 2.2 können wir nun erklären wie man Isomorphismen zwischen Cliffordalgebren $\mathrm{Cl}(V, B)$ und assoziativen unitären $\mathbb{K}$-Algebren $\mathcal{A}$ konstruiert. Genauer benutzen wir dazu die universelle Eigenschaft sowie die Dimension der Cliffordalgebra (cf. Theorem 2.9).

1. Finde eine lineare Abbildung $\delta : V \to \mathcal{A}$, welche die Relation

$$\delta(v)^2 = -B(v, v) \cdot 1$$

   für alle $v \in V$ erfüllt. Diese Abbildung induziert dann einen Algebrahomomorphismus $\varphi : \mathrm{Cl}(V, B) \to \mathcal{A}$ nach der universellen Eigenschaft.
2. Wähle eine Orthonormalbasis $e_1, ..., e_n$ von V und zeige, dass die Bilder $\delta(e_i)$ die Algebra $\mathcal{A}$ aufspannen. Dann ist ϕ surjektiv.
3. Zeige, dass die Algebren $\mathrm{Cl}(V, B)$ und $\mathcal{A}$ die selbe Dimension haben. Dann ist φ ein Isomorphismus.

Wir werden diese Methodik in den Folgenden Abschnitten verwenden um Isomorphismen zu konstruieren.

3. Cliffordalgebren für die symmetrischen Standardbilinearformen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Cliffordalgebren für die symmetrischen Standardbilinearformen. In der Tat werden wir diese als Matrixalgebren beschreiben können und vollständig klassifizieren.

Notation 3.1.

(i) Wir bezeichnen die Cliffordalgebra zum Raum $(\mathbb{R}^{s,t}, \eta)$ (cf. Beispiel 1.2) mit $Cl(s, t)$ und setzen $n := s + t$. Ferner schreiben wir für $(s, t) = (n, 0)$ einfach $Cl(n)$.

(ii) Die Cliffordalgebra für den Raum $(\mathbb{C}^d, q)$ bezeichnen wir im folgenden mit $\mathbb{C}l(d)$. Dies ist eine komplex assoziative Algebra.

Lemma 3.2. *(Komplexifizierte Cliffordalgebra)*
Es existiert ein Isomorphismus komplexer assoziativer Algebren

$$\mathbb{C}l(s + t) \cong Cl(s, t) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Beweis. Zum Beweis des Lemmas verwenden wir die Methodik von Abschnitt 2.3. Wir betrachten die komplex-lineare Abbildung

$$\delta : \mathbb{C}^{s+t} \cong \mathbb{R}^{s,t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Cl}(s, t) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad (v \otimes z) \mapsto \gamma(v) \otimes z.$$

Die Abbildung δ erfüllt

$$\delta(v \otimes z)^2 = -\gamma(v,v)z^2 = -q(v \otimes z, v \otimes z)$$

für alle $v \otimes z \in \mathbb{R}^{s,t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Die Behauptung folgt nun aus Dimensionsgründen. $\square$

Bemerkung 3.3. *Das Lemma besagt insbesondere, dass komplexe Darstellungen von $Cl(s,t)$ äquivalent zu komplexen Darstellungen von $\mathbb{C}l(s+t)$ sind.*

Lemma 3.4.
Für alle $n \geq 1$ haben wir den folgenden Isomorphismus von komplexen Cliffordalgebren

$$\mathbb{C}l(n)_{\bar{0}} = \mathbb{C}l(n-1).$$

Beweis. Wir verwenden für den Beweis wieder die Methodik von Abschnitt 2.3. Es sei dazu e_n das n-te Standardbasiselement des Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Wir definieren dann

$$\delta : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}l(n)_{\bar{0}}, \qquad x \mapsto x \cdot e_n.$$

Diese Abbildung erfüllt

$$\delta(x)^2 = x \cdot e_n \cdot x \cdot e_n = x \cdot x = -q(x,x)$$

und aus Dimensionsgründen folgt die Aussage. $\square$

Bemerkung 3.5. *Man kann ferner zeigen, dass es einen Algebrenisomorphismus*

$$Cl(s,t) \cong Cl(s+1,t)_{\bar{0}}$$

gibt, also auch $Cl(n) \cong Cl(n+1)_{\bar{0}}$.

Wir haben gesehen, dass für jede Orthonormalbasis $e_1, ..., e_{s+t}$ von $\mathbb{R}^{s+t} \subset \mathrm{Cl}(s,t)$ die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(s,t)$ als Algebra erzeugt wird durch $e_1, ..., e_{s+t}$ bzgl. der Relationen

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} +2\delta_{ij} & \text{falls } i \leq s, \\ -2\delta_{ij} & \text{falls } i > s. \end{cases}$$

Zerlegen wir nun $\mathbb{R}^{s+t}$ in eindimensionale η-orthogonale Unterräume, so erhalten wir unter Anwendung von Proposition 2.7 die folgende Zerlegung in Termen des $\mathbb{Z}_2$-graduierten Tensorprodukts.

Proposition 3.6.
Es gibt einen Isomorphismus

$$Cl(s,t) \cong \underbrace{Cl(1,0)\hat{\otimes}...\hat{\otimes}Cl(1,0)}_{s\ mal} \hat{\otimes} \underbrace{Cl(0,1)\hat{\otimes}...\hat{\otimes}Cl(0,1)}_{t\ mal}.$$

Dabei ist $Cl(1,0) \cong \mathbb{C}$ und $Cl(0,1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ nach Kapitel 3.1.

3.1. Beispiele von Cliffordalgebren

Wir bezeichnen mit

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die *Pauli-Matrizen*. Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Pauli-Matrizen die folgenden Identitäten erfüllen:

(i) $\sigma_i^2 = I_2$ für $j = 1, 2, 3$.

(ii) $\sigma_j \sigma_{j+1} = -\sigma_{j+1}\sigma_j = i\sigma_{j+2}$ für $j = 1, 2, 3$ wpbei $j+1$ und $j+2$ mod 3 zu verstehen ist.

Wir erhalten nun die folgenden wichtigen Beispiele:

1. Die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(1, 0)$ wird als reeller Vektorraum aufgespannt von den Elementen $1, \gamma(e_1)$ mit $\gamma(e_1)^2 = -1$. Wir folgern, dass $\mathrm{Cl}(1, 0)$ als reelle Algebra isomorph zur zweidimensionalen reellen Algebra $\mathbb{C}$ mit $\gamma(e_1) = i$ ist.

2. Die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(0, 1)$ wird aufgespannt als reeller Vektorraum von den Elementen $1, \gamma(e_1)$ mit $\gamma(e_1)^2 = 1$. Damit ist $\mathrm{Cl}(0, 1)$ als reelle Algebra isomorph zur zweidimensionalen reellen Algebra $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ mit komponentenweiser Multiplikation und Einselement $(1, 1)$ sowie $\gamma(e_1) = (1, -1)$.

3. Die komplexe Algebra $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ wird als Vektorraum durch die Elemente $1 = (1, 1)$ und $\gamma(e_1) = (i, -i)$ aufgespannt. Wir folgern damit, dass $\mathbb{C}l(1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ gilt.

4. Die Matrizen $I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = -i\sigma_1\sigma_2$ spannen den Raum der komplexen 2×2-Matrizen auf $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ als komplexer Vektorraum. Wir folgern
$$\mathbb{C}l(2) \cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^2).$$

5. Wir zeigen nun $\mathrm{Cl}(0, 2) \cong \mathbb{H}$. Die Cliffordalgebra $\mathrm{Cl}(0, 2)$ wird von den Elementen $1, \gamma(e_1), \gamma(e_2)$ und $\gamma(e_3)$ aufgespannt. Unter Ausnutzung der Cliffordrelationen erfüllen diese die folgenden Relationen
$$\begin{aligned}
(\gamma(e_1))^2 &= (\gamma(e_2))^2 = -1, \\
(\gamma(e_3))^2 &= e_1e_2e_1e_2? - e_1e_1e_2e_2 = -1, \\
e_1e_2 &= -e_2e_1 = e_3, \\
e_2e_3 &= -e_3e_2 = e_1, \\
e_3e_1 &= -e_1e_3 = e_2.
\end{aligned}$$
Identifizieren wir nun
$$e_1 \hat{=} i, \qquad e_2 \hat{=} j, \qquad e_3 \hat{=} k$$
wobei i, j und k die imaginären Einheiten der Quaternionen sind, so erhalten wir dein Isomorphismsu $\mathrm{Cl}(0, 2) \cong \mathbb{H}$.

3.2. Struktur von Cliffordalgebren

Wir sind nun bereit die Struktur von Cliffordalgebren zu untersuchen. Im vorherigen Abschnitt 3.1 haben wir bereits die folgenden Isomorphismen gefunden:

$$\mathrm{Cl}(1,0) \cong \mathbb{C}, \quad \mathrm{Cl}(0,1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \mathrm{Cl}(0,2) \cong \mathbb{H}, \quad \mathrm{Cl}(2,0) \cong \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}), \quad \mathrm{Cl}(1,1) \cong \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}).$$

Unser Ziel ist es eine Matrixbeschreibung der Cliffordalgebren $\mathrm{Cl}(s,t)$ und $\mathbb{C}l(n)$ zu finden. Dabei werden wir unter Verwendnung von Periodizität und Zerlegung der Cliffordalgebren in Tensorprodukte das Problem auf die obigen Beispiele zurückführen können. In der Tat benötigen wir dazu die folgenden bekannten Algebrenisomorphismen von Tensorprodukten über $\mathbb{R}$.

Lemma 3.7.
Es gelten die folgenden Isomorphismen zwischen $\mathbb{R}$-Algebren

(i) $Mat(n,\mathbb{R}) \otimes Mat(m,\mathbb{R}) \cong Mat(mn,\mathbb{R})$ *für alle* m,n.

(ii) $Mat(n,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K} \cong Mat(n,\mathbb{K})$ *für* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{H}\}$.

(iii) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

(iv) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong Mat(2,\mathbb{C})$.

(v) $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong Mat(4,\mathbb{R})$.

Wir lassen den Beweis aus und verweisen auf Proposition 4.2 in [6]. Der Kern des Beweises der Klassifikation der Cliffordalgebren liegt in dem folgenden Theorem.

Satz 3.8.
Es gibt Isomorphismen

$$\begin{aligned} Cl(n,0) \otimes Cl(0,2) &\cong Cl(0,n+2), \\ Cl(0,n) \otimes Cl(2,0) &\cong Cl(n+2,0), \\ Cl(s,t) \otimes Cl(1,1) &\cong Cl(r+1,s+1) \end{aligned}$$

für alle $n,s,t \geq 0$. *Wir verwenden hierbeit das nicht graduierte Tensorprodukt.*

Beweis. Es sei $e_1,...,e_{n+2}$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^{n+2}$ bzgl. des Standardskalarprodukts. Es seien $e'_1,...,e'_n$ die Standarderzeuger für $\mathrm{Cl}(n,0)$ und e''_1,e''_2 die Standarderzeuger für $\mathrm{Cl}(0,2)$. Wir definieren

$$f: \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathrm{Cl}(n,0) \otimes \mathrm{Cl}(0,2), \qquad e_i \mapsto \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2 & \text{für } 1 \leq i \leq n, \\ 1 \otimes e''_{i-n} & \text{für i=n+1,n+2,} \end{cases}$$

wobei die Definition dann linear fortgesetzt wird. Es gilt nun für $1 \leq i,j \leq n$

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = (e'_ie'_j + e'_je'_i) \otimes 1 = -2\delta_{ij} 1 \otimes 1$$

und für $n+1 \leq \alpha, \beta \leq n+2$

$$f(e_\alpha)f(e_\beta) + f(e_\beta)f(e_\alpha) = 1 \otimes (e''_{\alpha-n}e''_{\beta-n} + e''_{\beta-n}e''_{\alpha-n}) = -2\delta_{\alpha\beta} 1 \otimes 1$$

sowie

$$f(e_i)f(e_\beta) + f(e_\beta)f(e_i).$$

Nach der universellen Eigenschaft setzt sich nun f zu einem Algebrenhomormophismus $f : \mathrm{Cl}(0, n+2) \longrightarrow \mathrm{Cl}(n, 0) \otimes \mathrm{Cl}(0, 2)$ fort. f ist nach Konstruktion surjektiv und aus Dimensionsgründen daher ein Isomorphismus. Analog zeigt man den zweiten Isomorphismus. Für den dritten Isomorphismus betrachten wir eine η-orthogonale Basis $e_1, ..., e_{s+1}, \epsilon_1, ..., \epsilon_{t+1}$ für $\mathbb{R}^{s+t+2}$ sodass $\eta(e_i, e_i) = 1$ und $\eta(\epsilon_j, \epsilon_j) = -1$ für alle i, j. Es seien nun $e'_1, ..., e'_s, \epsilon'_1, ..., \epsilon'_t$ und e''_1, ϵ''_1 für korresponiderenden Basen für $\mathbb{R}^{s+t}$ und $\mathbb{R}^2$. Wir definieren dann

$$f : \mathbb{R}^{s+t+2} \longrightarrow \mathrm{Cl}(s, t) \otimes \mathrm{Cl}(1, 1)$$

mit

$$f(e_i) := \begin{cases} e'_i \otimes e''_1\epsilon''_1 & \text{für } 1 \leq i \leq s, \\ 1 \otimes e''_1 & \text{für } i = s+1 \end{cases} \qquad f(\epsilon_j) := \begin{cases} \epsilon'_j \otimes e''_1\epsilon''_1 & \text{für } 1 \leq j \leq t, \\ 1 \otimes \epsilon''_1 & \text{für } j = t+1. \end{cases}$$

□

Satz 3.9. *(Periodizitätsisomorphismen)*
Für alle $n \geq 0$ gibt es die folgenden Periodizitätsisomorphismen

$$Cl(n+8, 0) \cong Cl(n, 0) \otimes Cl(8, 0),$$
$$Cl(0, n+8) \cong Cl(0, n) \otimes Cl(0, 8),$$
$$\mathbb{C}l(n+2) \cong \mathbb{C}l(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l(2).$$

Dabei sind $Cl(8, 0) = Cl(0, 8) \cong Mat(16, \mathbb{R})$ und $\mathbb{C}l(2) \cong Mat(2, \mathbb{C})$. Insbesondere schließen wir, dass die Cliffordalgebren $Cl(0, n)$, $Cl(n, 0)$ und $\mathbb{C}l(n)$ durch die folgende Tabelle vollständig beschrieben werden.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$Cl(n,0)$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$Mat(2,\mathbb{H})$	$Mat(4,\mathbb{C})$	$Mat(8,\mathbb{R})$	$Mat(8,\mathbb{R}) \oplus Mat(8,\mathbb{R})$	$Mat(16,\mathbb{R})$
$Cl(0,n)$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$Mat(2,\mathbb{R})$	$Mat(2,\mathbb{C})$	$Mat(2,\mathbb{H})$	$Mat(2,\mathbb{H}) \oplus Mat(2,\mathbb{H})$	$Mat(4,\mathbb{H})$	$Mat(8,\mathbb{C})$	$Mat(16,\mathbb{R})$
$\mathbb{C}l(n)$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$Mat(2,\mathbb{C})$	$Mat(2,\mathbb{C}) \oplus Mat(2,\mathbb{C})$	$Mat(4,\mathbb{C})$	$Mat(4,\mathbb{C}) \oplus Mat(4,\mathbb{C})$	$Mat(8,\mathbb{C})$	$Mat(8,\mathbb{C}) \oplus Mat(8,\mathbb{C})$	$Mat(16,\mathbb{C})$

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis des Isomorphismus

$$\mathrm{Cl}(n+8, 0) \cong \mathrm{Cl}(n, 0) \otimes \mathrm{Cl}(8, 0).$$

Nach Satz 3.8 haben wir

$$\mathrm{Cl}(n+8,0) \cong \mathrm{Cl}(n,0) \otimes \mathrm{Cl}(0,2) \otimes \mathrm{Cl}(2,0) \otimes \mathrm{Cl}(0,2) \otimes \mathrm{Cl}(2,0).$$

Unter Verwendung der Isomorphismen in Abschnitt 3.1 erhalten wir daher mit Lemma 3.7

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(n+8,0) &\cong \mathrm{Cl}(n,0) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) \\ &\cong \mathrm{Cl}(n,0) \otimes \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R}) \\ &\cong \mathrm{Cl}(n,0) \otimes \mathrm{Mat}(16,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Dies zeigt den ersten Isomorphismus. Der Beweis für den zweiten Isomorphismus erfolgt analog.
Wir zeigen nun den Isomorphismus $\mathbb{C}l(n+2) \cong \mathbb{C}l(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l(2)$. Dazu verwenden wir Lemma 3.2 und erhalten unter Verwendung von Satz 3.8

$$\mathbb{C}l(n+2) \cong \mathrm{Cl}(n+2,0) \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Cl}(n,0) \otimes \mathrm{Cl}(0,2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}l(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l(2).$$

Unter Verwendung dieser Isomorphismen kann man nun Zeile für Zeile das Ergebnis der Tabelle erhalten, wobei wir für das Ergebnis der letzten Zeile den korrespondierenden Term aus einer der ersten beiden Zeilen komplexifizieren. $\square$

Wir können nun dieses Ergebnis verwenden, um mithilfe von $\mathrm{Cl}(1,1) \cong \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ sowie des Isomorphismus

$$\mathrm{Cl}(s,t) \otimes \mathrm{Cl}(1,1) \cong \mathrm{Cl}(s+1,t+1)$$

die Cliffordalgebren $\mathrm{Cl}(s,t)$ vollständig zu klassifizieren. Als Ergebnis erhalten wir die folgende Tabelle:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(16,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(64,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(128,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(128,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(128,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(256,\mathbb{R})$
7	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(8,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(64,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(64,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(64,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(128,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(128,\mathbb{C})$
6	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(4,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(32,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(64,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(64,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(64,\mathbb{H})$
5	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(2,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(32,\mathbb{H})$
4	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(8,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(16,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{H})$
3	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(8,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{C})$
2	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(4,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(32,\mathbb{R})$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(2,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{H})$	$\mathrm{Mat}(4,\mathbb{C})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(8,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(8,\mathbb{R})$	$\mathrm{Mat}(16,\mathbb{R})$

4. Die Dirac-Spinordarstellung

In diesem Abschnitt führen wir die Dirac-Spinordarstellung ein und diskutieren einige interessante Eigenschaften. Die Spinordarstellung spielt eine zentrale Rolle in der mathematischen Physik.

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass wir für gerades n die folgenden Isomorphismen haben

$$\begin{aligned}\mathbb{C}l(n) &\cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^N),\\ \mathbb{C}l(n)_{\bar{0}} &\cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^N) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)\end{aligned}$$

wobei $N := 2^{n/2}$ ist. Für ungerades n haben wir die folgenden Isomorphismen

$$\begin{aligned}\mathbb{C}l(n) &\cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^N) \oplus \mathrm{End}(\mathbb{C}^N),\\ \mathbb{C}l(n)_{\bar{0}} &\cong \mathrm{End}(\mathbb{C}^N)\end{aligned}$$

mit $N := 2^{(n-1)/2}$. Diese Isomorphismen führen zum Begriff der (Dirac-) Spinordarstellung.

Definition 4.1. (Spinordarstellung)
Wir bezeichnen den Vektorraum $\Delta_n := \mathbb{C}^N$ als den Vektorraum der *(Dirac)-Spinoren*, wobei N gegeben ist durch

$$N := \begin{cases} 2^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2^{(n-1)/2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die *(Dirac-)Spinordarstellung* der komplexen Cliffordalgebra

$$\rho : \mathbb{C}l(n) \longrightarrow \mathrm{End}(\Delta_n)$$

ist definiert durch das Strukturtheorem der komplexen Cliffordalgebren $\mathbb{C}l(n)$ (siehe Abschnitt 3).

Bemerkung 4.2. *Nach Lemma 3.2 induzieren (Dirac)-Spinordarstellungen komplexe Spinordarstellungen von $Cl(s,t)$.*

Bemerkung 4.3. *Der Raum Δ_n der Diracspinoren ist ein komplexer Vektorraum gerader Dimension welche exponentiell mit n wächst.*

Als nächstes führen wir den Begriff der Weyl-Spinordarstellungen ein. Wir erinnern dazu zunächst an Lemma 3.4, in welchem wir den Isomorphismus

$$\mathbb{C}l(n)_{\bar{0}} \cong \mathbb{C}l(n-1)$$

konstruiert haben. Aus dem Strukturtheorem erhalten wir unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar 4.4.
Wir betrachten die Einschränkung der Dirac-Spinordarstellung auf die gerade Unteralgebra $\mathbb{C}l(n)_{\bar{0}}$.

(i) Ist n ungerade, dann ist die induzierte Darstellung irreduzibel

$$\mathbb{C}l(n)_{\bar{0}} \xrightarrow{\cong} End(\Delta_n).$$

Der Spinorraum ist $\Delta_n = \mathbb{C}^N$ für $N = 2^{(n-1)/2}$.

(ii) Ist n gerade, dann zerfällt die induzierte Darstellung in links-händige (positive) und rechts-händige (negative) Weyl-Spinoren

$$\mathbb{C}l(n)_{\bar{0}} \xrightarrow{\cong} End(\Delta_n^+) \oplus End(\Delta_n^-),$$

wobei die Spinorräume $\Delta_n^{\pm}$ gegeben sind durch $\Delta_n^+ \cong \Delta_n^- \cong \mathbb{C}^{N/2}$ für $N = 2^{n/2}$.

In physikalischen Theorien ist man interessiert an Darstellungen der Spingruppe, welche eine bestimmte Teilmenge der Cliffordalgebra ist und im folgenden Abschnitt eingeführt wird.

5. Die Pingruppe und die Spingruppe

Nachdem wir nun in den letzen Abschnitten die Struktur von Cliffordalgebren untersucht haben, sind wir bereit die Pin- und Spingruppe einzuführen. Die Pin- und Spingruppe sind bestimmte Untergruppen, welche in der Cliffordalgebra eingebettet sind. Es wird sich zeigen, dass die Spingruppe die (glatte) universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}(n)$ ist, was die imense Bedeutung dieser Gruppe in der Physik erklärt.

Definition 5.1. (Gruppe $Cl^{\times}(s,t)$)
Die Gruppe der *invertierbaren Elemente* in der Cliffordalgebra $Cl(s,t)$ is definiert durch

$$Cl^{\times}(s,t) := \{x \in Cl(s,t) \mid \exists y \in Cl(s,t): \ xy = yx = 1\}.$$

Wir definieren $\mathbb{C}l(n)^{\times}$ analog.

Bemerkung 5.2. *Es ist zu beachten, dass $Cl^{\times}(s,t)$ alle Elemente $v \in V$ mit $\eta(v,v) \neq 0$ enthält. Ferner ist $Cl^{\times}(s,t)$ eine Lie-Gruppe der Dimension 2^n, falls $n = dim_{\mathbb{K}}(V)$ gilt. In der Tat, für $n = s+t$ haben wir nach Lemma 3.2*

$$\mathbb{C}l(n) \cong Cl(s,t) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Schreiben wir nun jedes $x \in \mathbb{C}l(n)$ als $x = u + iv$ für $u, v \in Cl(s,t)$, so sehen wir

$$Cl^{\times}(s,t) = \mathbb{C}l^{\times}(n) \cap Cl(s,t)$$

und nach dem Strukturtheorem ist $\mathbb{C}l^{\times}(n)$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}l(n)$ für alle n und damit ist $\mathbb{C}l^{\times}(n) \cap Cl(s,t)$ offen in $Cl(s,t)$. Damit ist $Cl^{\times}(s,t)$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit glatter Gruppenstruktur.

Im Folgenden schreiben wir

$$S_+^{s,t} := \{v \in \mathbb{R}^{s,t} \mid \eta(v,v) = +1\},$$
$$S_-^{s,t} := \{v \in \mathbb{R}^{s,t} \mid \eta(v,v) = -1\},$$
$$S_\pm^{s,t} := S_+^{s,t} \cup S_-^{s,t},$$

wobei wir wie gewöhnlich mit η die symmetrische Standardbilinearform der Signatur (s,t) bezeichnen. Dies führt uns zu den Begriffen der Pin- und der Spingruppe.

Proposition 5.3. *(Pin- und Spingruppe)*
Die folgenden Teilmengen von $Cl(s,t)$ bilden Untergruppen von $Cl^+(s,t)$:

$$Pin(s,t) := \{v_1 v_2 ... v_r \mid v_i \in S_\pm^{s,t},\ r \geq 0\},$$
$$Spin(s,t) := Pin(s,t) \cap Cl(s,t)_{\bar{0}} = \{v_1 v_2 ... v_{2r} \mid v_i \in S_\pm^{s,t}, r \geq 0\},$$
$$Spin^+(s,t) := \{v_1 ... v_{2p} w_1 ... w_{2q} \mid v_i \in S_+^{s,t}, w_j \in S_-^{s,t}, p, q \geq 0\}$$

Wir statten diese Gruppen mit der Teilmengentopologie von $Cl(s,t)$ aus. Ferner definieren wir

$$Pin(n) := Pin(n,0), \qquad Spin(n) := Spin(n,0).$$

Die Gruppe $Pin(s,t)$ heißt Pingruppe und die Gruppe $Spin(s,t)$ heißt Spingruppe sowie $Spin^+(s,t)$ orthochrone Spingruppe.

Bemerkung 5.4. *Es ist zu beachten, dass in der Literatur auch die Gruppe $Spin^+(s,t)$ als Spingruppe bezeichnet wird.*

Die Proposition 5.3 erfolgt durch direktes Nachrechnen und wird daher ausgelassen. Wir sind nun daran interessiert die Eigenschaften der Spingruppe zu untersuchen. Dazu identifizieren wir den Vektorraum $\mathbb{R}^{s,t}$ in kanonischer Weise mithilfe der Einbettung γ mit einem Unterraum von $\mathrm{Cl}(s,t)$ und definieren die folgende Abbildung

$$R : \mathrm{Pin}(s,t) \times \mathbb{R}^{s,t} \longrightarrow \mathbb{R}^{s,t}, \qquad (u,x) \mapsto (-1)^{\deg(u)} u \cdot x \cdot u^{-1}.$$

Dabei haben wir für ein Element $u \in \mathrm{Pin}(s,t)$ den Grad $\deg(u)$ wie folgt definiert

$$\deg(u) := \begin{cases} 0 & \text{falls } u \in \mathrm{Cl}(s,t)_{\bar{0}}, \\ 1 & \text{falls } u \in \mathrm{Cl}(s,t)_{\bar{1}}. \end{cases}$$

Lemma 5.5.

(i) Die Abbildung R ist wohldefiniert, d.h. es hat Bild in dem Unterraum $\mathbb{R}^{s,t}$ der Cliffordalgebra $Cl(s,t)$.

(ii) Für jeden Vektor $v \in S_\pm^{s,t}$ ist die Abbildung

$$R_v := R(v,\cdot) : \mathbb{R}^{s,t} \longrightarrow \mathbb{R}^{s,t}$$

eine Spiegelung in der Hyperebene $v^\perp \subset \mathbb{R}^{s,t}$.

(iii) Die Abbildung

$$\lambda : Pin(s,t) \longrightarrow O(s,t), \qquad u \mapsto R_u = R(u,\cdot).$$

ist ein stetiger Homomorphismus.

Beweis. Wir fixieren einen Vektor $v \in \mathbb{R}^{s,t}$ mit $\eta(v,v) = \pm 1$. Dann ist $v^{-1} = \pm v$ und

$$R(v,x) = -v \cdot x \cdot v^{-1} = \mp v \cdot x \cdot v = \begin{cases} -x & \text{falls } x \parallel v, \\ x & \text{falls } x \perp v. \end{cases}$$

In der Tat, ist $x \parallel v$, dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda v$ und wir erhalten

$$R_v(x) = \pm v \cdot x \cdot v = \mp \lambda \cdot \underbrace{v \cdot v}_{=\pm 1} \cdot v = -\lambda v = -x.$$

Ist andererseits $x \perp v$, dann gilt $B(v,x) = 0$ und daher $x \cdot v = v \cdot x$ und wir erhalten

$$R_v(x) = \pm v \cdot \underbrace{x \cdot v}_{=v \cdot x} = \mp(\mp x) = x.$$

Also $R_v(x) \in \mathbb{R}^{s,t}$ und R_v ist eine Spiegelung in $v^\perp$. Ferner gilt

$$R_{v_1 \dots v_r}(x) = R_{v_1} \circ R_{v_2} \circ \dots \circ R_{v_r}(x)$$

und wir schließen, dass $R(u,x)$ in der Tat ein Element von $\mathbb{R}^{s,t}$ ist für alle $u \in \mathrm{Pin}(s,t)$ und $x \in \mathbb{R}^{s,t}$. Da Spiegelungen Elemente der orthogonalen Gruppe sind, ist λ ein stetiger Homomorphismus der orthogonalen Gruppe. □

Wir benötigen im Folgenden den wunderschönen Satz von Cartan-Dieudonné, welchen wir aus den Grundkursen der linearen Algebra als bekannt voraussetzen.

Satz 5.6. *(Cartan-Dieudonné)*
Jedes Element von $O(s,t)$ kann geschrieben werden als Verknüpfung von höchstens $2(s+t)$ Spiegelungen in den Hyperebenen $v_i^\perp$ mit $v_i \in S_\pm^{s,t}$.

Wir verzichten auf einen Beweis und verweisen auf Theorem 6.5.11 in [3].

Lemma 5.7.
Es sei $R \in O(s,t)$ eine Komposition von Spiegelungen in Hyperebenen $v_i^\perp$ mit Vektoren $v_i \in S_\pm^{s,t}$.

(i) R ist ein Element von $SO(s,t)$ genau dann wenn die Anzahl der Vektoren v_i gerade ist.

(ii) R ist ein Element von $SO^+(s,t)$ genau dann wenn die Anzahl der Vektoren $v_i \in S_+^{s,t}$ und die Anzahl der Vektoren $v_i \in S_-^{s,t}$ gerade sind.

Beweis. Es sei also $v \in S^{s,t}_{\pm}$. Dann können wir $\mathbb{R}^{s,t}$ in maximal positive und negative Unterräume $W_{\pm}$ und W_{-}, respektive, zerlegen, sodass bezüglich einer geeigneten Basis die Spiegelung R_v die folgende Form annimmt.

$$\begin{aligned} R_v &= \operatorname{diag}(-1, 1, ..., 1) && \text{falls } \eta(v,v) = +1, \\ R_v &= \operatorname{diag}(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{s \text{ mal}}, -1, 1, ..., 1) && \text{falls } \eta(v,v) = -1. \end{aligned}$$

Aus dieser Beobachtung folgt nun unmittelbar die Behauptung. □

Bemerkung 5.8. *In der Vorlesung haben wir die Gruppe $SO^+(s,t)$ nicht definiert, sodass wir das Lemma auch als Definition verwenden können.*

Satz 5.9.
Wir betrachten den in Lemma 5.5 eingeführten stetigen Homomorphismus

$$\lambda : Pin(s,t) \longrightarrow O(s,t), \qquad u \mapsto R_u.$$

(i) λ is ein offener und surjektiver Homomorphismus mit Kern $\{\pm 1\}$.

(ii) Die Urbilder unter λ der Untergruppen $SO(s,t)$ und $SO^+(s,t)$ stimmt mit den Gruppen $Spin(s,t)$ und $Spin^+(s,t)$ überein und sind damit offene Untergruppen von $Pin(s,t)$.

(iii) Der Homomorphismus λ lässt sich zu einem surjektiven Homomorphismus

$$\begin{aligned} \lambda &: Spin(s,t) \longrightarrow SO(s,t), \\ \lambda &: Spin^+(s,t) \longrightarrow SO^+(s,t) \end{aligned}$$

einschränken mit Kern $\{\pm 1\}$.

(iv) Als topologischer Raum ist die orthochrone Spingruppe $Spin^+(s,t)$ zusammenhängend falls $s \geq 2$ oder $t \geq 2$.

Beweis.
(i) λ ist surjektiv und offen nach dem Satz von Cartan-Dieudonné. Wir betrachten nun ein $u \in \mathrm{Pin}(s,t)$ mit $\lambda(u) = E_{s,t} \in \mathrm{O}(s,t)$. Dann gilt $\deg(u) = 0$, da R_u aus einer geraden Anzahl von Spiegelungen zusammengesetzt ist. Wir folgern

$$u \cdot e_i \cdot u^{-1} = e_i$$

also

$$e_i \cdot u \cdot e_i = -\eta(e_i, e_i) u$$

für alle $i = 1, ..., s+t$. In der Standardbasis der Cliffordalgebra können wir u schreiben als

$$u = a e_{i_1} ... e_{i_{2k}}$$

für $k \geq 1$ und $a \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$e_{i_{2k}} \cdot u \cdot e_{i_{2k}} = -\eta(e_{i_{2k}}, e_{i_{2k}})u$$

woraus wir $a = 0$ folgern, also $u \in \mathbb{R} \cdot 1$. Andererseits ist $u \in \mathrm{Pin}(s,t)$ und daher muss $u = \pm 1$ gelten.

(ii) und (iii) folgen nach Lemma 5.7 und (i).

(iv) Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Spin}^+(s,t)$ zusammenhängend ist für $s \geq 2$ oder $t \geq 2$. Es ist bekannt, dass $\mathrm{SO}^+(s,t)$ zusammenhängend ist und der Kern von λ gegeben ist durch $\{\pm 1\}$. Es genügt daher zu zeigen, dass wir jedes $u \in \mathrm{Spin}^+(s,t)$ mit $-u$ verbinden können durch eine stetige Kurve in $\mathrm{Spin}^+(s,t)$. Sei also $s \geq 2$ und betrachte die Kurve

$$\gamma(\tau) = -u \cdot (e_1 \cos(\tau) + e_2 \sin(\tau)) \cdot (e_1 \cos(\tau) - e_2 \sin(\tau)), \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Diese Kurve erfüllt $\gamma(0) = u$ und $\gamma(\pi/2) = -u$ und liegt in $\mathrm{Spin}^+(s,t)$, was eine einfache Rechnung zeigt. Ein ähnliches Argument können wir für $t \geq 2$ anwenden. $\square$

Korollar 5.10.
Wir können eine eindeutige Lie-Gruppen-Struktur auf den Gruppen $Pin(s,t)$, $Spin(s,t)$ und $Spin^+(s,t)$ definieren, sodass λ eine glatte zweifache Überlagerung von Lie-Gruppen ist. Ferner sind für $n \geq 3$ sind die Homomorphismen

$$\begin{aligned} \lambda : Spin(n) &\longrightarrow SO(n), \\ \lambda : Spin^+(1,n) &\longrightarrow SO^+(1,n) \\ \lambda : Spin^+(n,1) &\longrightarrow SO^+(n,1) \end{aligned}$$

die universellen Überlagerungen.

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass λ stetig, offen und surjektiv ist und Kern $\{\pm 1\}$ hat sowie der Tatsache, dass für $n \geq 3$ die Lie-Gruppen $\mathrm{SO}(n)$ und $\mathrm{SO}^+(1,n)$ Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}_2$ haben. $\square$

Wir schließen diesen Abschnitt in dem wir den Isomorphismus

$$\mathrm{Spin}^+(1,3) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

zeigen. Dieser dient in der Vorlesung als Definition der Spingruppe in der für uns wichtigen Dimension. Dazu identifizieren wir den Raum $\mathbb{R}^{1,3}$ mit dem Raum der Hermiteschen 2×2-Matrizen

$$\mathcal{H} = \left\{ A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid A = \left(\overline{A}\right)^T \right\}.$$

Eine Orthonormalbasis für $\mathcal{H}$ ist gegeben durch die Pauli-Matrizen $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Hierbei ist Orthonormalität zu verstehen bezüglich des inneren Produkts

$$\langle A, B \rangle := \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB), \qquad A, B \in \mathcal{H}.$$

Ein Isomorphismus ist dann gegeben durch

$$\mathbb{R}^{1,3} \longrightarrow \mathcal{H}, \qquad (t,x,y,z) \mapsto A = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$$

mit Umkehrabbildung

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^{1,3}, \qquad A \mapsto (\langle A, \sigma_0\rangle, \langle A, \sigma_1\rangle, \langle A, \sigma_2\rangle, \langle A, \sigma_3\rangle).$$

Auf $\mathcal{H}$ können wir die Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ durch

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad (X,A) \mapsto A^X := XAX^\dagger$$

wirken lassen. Diese Operation erhält die Determinante und wirkt damit durch lineare Isometrien des Minkowski-Raums. Daher induziert dies eine stetige Abbildung in die Lorentz-Gruppe

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow O(1,3).$$

Es ist ferner bekannt, dass die Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist und wir eralten einen Homomorphismus

$$\Psi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}^+(1,3), \quad X_{\mu\nu} \mapsto Y_{\mu\nu} := \langle \sigma_\mu, X\sigma_\nu X^\dagger\rangle,$$

den sogenannten Spin-Homomorphismus. Der Kern dieses Homomorphismus besteht aus allen Matrizen $X \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, welche $XAX^\dagger = X$ erfüllen für alle Hermiteschen Matrizen A. Wählen wir A als die Identitätsmatrix, so muss gelten $XX^\dagger = I$, d.h. X ist unitär und wir können die Wirkung umschreiben als $A \mapsto XAX^{-1}$. Damit ist aber der Kern des Spin-Homomorphismus

$$\{X \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \mid AX = XA \text{ für alle Hermiteschen } A\}.$$

Da alle reellen Diagonalmatrizen in $\mathcal{H}$ enthalten sind, muss X bereits diagonal sein. Letztlich muss wegen $\det(X) = 1$ auch $X = \{\pm I\}$ gelten. Damit ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ eine universelle Überlagerung von $\mathrm{SO}^+(1,3)$ und der versprochene Isomorphismus folgt.

6. Die Lie-Algebra der Spingruppe

In diesem Abschnitt konstuieren wir die Lie-Algebra der Spingruppe $\mathrm{Spin}^+(s,t)$.

Wir beginnen mit der Beobachtung, dass die Lie algebra $\mathfrak{cl}^\times(s,t)$ kanonisch isomorph ist als Vektorraum zu $\mathrm{Cl}(s,t)$ mit Kommutator

$$[x,y] = x \cdot y - y \cdot x \qquad \forall x,y \in \mathrm{Cl}(s,t),$$

da die Lie-Gruppe $\mathrm{Cl}^\times(s,t)$ eine offene Teilmenge von $\mathrm{Cl}(s,t)$ ist. Da die Lie-Gruppen $\mathrm{Pin}(s,t)$ und $\mathrm{Spin}^+(s,t)$ Lie-Untergruppen von $\mathrm{Cl}^\times(s,t)$ sind, sind auch ihre Lie-Algebren

Unterliealgebren von $\mathfrak{cl}^{\times}(s,t)$. Es sei nun $e_1, ..., e_{s+t}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{s,t}$. Wir definieren

$$M(s,t) := \mathrm{span}\{e_i e_j \in \mathrm{Cl}(s,t) \mid q \leq i < j \leq s+t\}.$$

Dann zeigt eine einfache und direkte Rechnung, dass der Vektorraum $M(s,t)$ eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{cl}^{\times}(s,t)$ ist mit der Dimension

$$\mathrm{dim} M(s,t) = \frac{1}{2}(s+t)(s+t-1).$$

Proposition 6.1. *(Lie-Algebra $\mathfrak{spin}^+(s,t)$)*
Für alle $s,t \geq 0$ gilt die folgende Identität

$$\mathfrak{spin}^+(s,t) = M(s,t).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $M(s,t) \subset \mathfrak{spin}^+(s,t)$ gilt und folgern dann aus Dimensionsgründen Gleihheit. Es sei also $i < j$. Wir müssen eine Kurve in $\mathrm{Spin}^+(s,t)$ durch das Einselement 1 finden mit Geschwindigkeitavektor $e_i e_j$. Wir setzen $\eta_i := \eta(e_i, e_i)$. Es gibt nun zwei Fälle zu unterscheiden:

(i) Es gilt $i \neq j$ und $\eta_i = \eta_j$: Wir betrachten dann die Kurve

$$\gamma(\tau) := \cos(\tau)1 + \sin(\tau)e_i e_j, \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

durch 1. Diese liegt in $\mathrm{Spin}^+(s,t)$, denn

$$\cos(\tau)1 + \sin(\tau)e_i e_j = e_i(-\eta_i \cos(\tau)e_i + \sin(\tau)e_j)$$

und

$$\eta(-\eta_i \cos(\tau)e_i + \sin(\tau)e_j, -\eta_i \cos(\tau)e_i + \sin(\tau)e_j) = \eta_i.$$

(ii) Es gilt $i \neq j$ und $\eta_i = -\eta_j$. Dann betrachten wir die Kurve

$$\gamma(\tau) = \cosh(\tau)1 + \sinh(\tau)e_i e_j, \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

durch 1. Eine ähnliche Argumentation wie in (i) zeigt, dass diese Kurve wieder in $\mathrm{Spin}^+(s,t)$ enthalten ist.

Wir nehmen nun die Ableitung in $\tau = 0$ beider Kurven und erhalten $e_i e_j \in \mathfrak{spin}^+(s,t)$ für alle $i \neq j$. Dies implitiert

$$M(s,t) \subset \mathfrak{spin}^+(s,t)$$

und aus Dimensionsgründen muss bereits Gleichheit gelten. □

Unser nächstes Ziel ist die Isomorphie der Lie-Algebren von $\mathrm{Spin}^+(s,t)$ und $\mathrm{SO}^+(s,t)$ zu zeigen. Dieser ist gegeben durch das Differential der Abbildung λ.

Korollar 6.2.
Das Differential des Homomorphismus $\lambda : Spin^+(s,t) \to SO^+(s,t)$ ist gegeben durch

$$\lambda_* : \mathfrak{spin}^+(s,t) \to \mathfrak{so}^+(s,t), \qquad \lambda_*(x)(y) = ad_x(y) = [x,y].$$

Insbesondere gilt

$$\lambda_*(e_i e_j) = 2(\eta_i E_{ji} - \eta_j E_{ij})$$

wobei E_{ij} die $(s+t) \times (s+t)$-Elementarmatrix ist mit 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und Nullen sonst. Mit anderen Worten ist λ_* ein Isomorphismus.

Beweis. Siehe Korollar 6.5.23 in [3]. □

Literatur

[1] S. Bosch. *Lineare Algebra.*Springer Spektrum, Berlin-Heiselberg, 5., überarbeitet und erweiterte Auflage, 2014.

[2] B.C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians.* Springer, Graduate Texts in Mathematics, 2013.

[3] M. Hamilton. *Mathematical Gauge Theory. With Applications to the Standard Model of Particle Physics.* Springer-Verlag, 2017.

[4] A.W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction.* Second Edition. Progress in Mathematics, vol . 140, Birkhäuser, Boston, 2002.

[5] E. Meinrenken. *Clifford Algebras and Lie Theory.* Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete ; Folge 3, 58, 2013.

[6] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn. *Spin geometry.* Princeton University Press, 1989.