Automorphe Formen und Darstellungen

4. Februar 2021

Motivation

- Uns interessieren Darstellungen von $G = SL_2(\mathbb{R})$
- Betrachte $\Gamma \backslash G$ mit Γ diskreter UG, sodass $\Gamma \backslash G$ kompakt
- Erhalten Darstellungen von $G = SL_2(\mathbb{R})$ auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ per Rechtstranslation

Folgender Satz ist zentral, um diese Darstellungen zu untersuchen:

Satz (I.8.10)

Sei G eine unimodulare, lokal kompakte Gruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe, sodass $\Gamma \backslash G$ kompakt ist. Dann ist die Darstellung von G auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ (Rechtstranslation) vollständig reduzibel mit endlichen Multiplizitäten.

Welche Darstellungen aus der Bargmann-Klassifikation tauchen auf?

Inhalt

1. Teil 1: Beweis des Satzes
2. Teil 2: Anwendung des Satzes auf $SL_2(\mathbb{R})$, automorphe Formen

Teil 1: Aussage des Satzes

Satz (I.8.10)

Sei G eine unimodulare, lokal kompakte Gruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe, sodass $\Gamma \backslash G$ kompakt ist. Dann ist die Darstellung von G auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ (Rechtstranslation) vollständig reduzibel mit endlichen Multiplizitäten.

$\pi : G \to GL(V)$

- ist **irreduzibel**, wenn es außer $\{0\}$ und V keine weiteren abgeschlossenen, invarianten Unterräume gibt;
- ist **vollständig reduzibel**, wenn sie in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegbar ist;
- hat **endliche Multiplizitäten**, wenn jede irreduzible Unterdarstellung in der direkten Summe nur endlich oft auftaucht.

Teil 1: Voraussetzungen zum Beweis

Satz (Arzela-Ascoli, I.8.2)

Sei X ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Sei M die Menge der gleichgradig stetigen Funktionen auf X, sodass die Mengen der Werte $f(x)$, $f \in M$ für alle $x \in X$ beschränkt sind. Dann gilt: jede Folge in M besitzt eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig konvergiert.

- Eine Menge M von Funktionen auf X ist **gleichgradig stetig in** $a \in X$, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von a existiert, sodass für alle $x \in U$ und $f \in M$ gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- **lokal gleichmäßige Konvergenz**: für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung U_x, sodass die Folge (f_n) eingeschränkt auf diese Umgebung gleichmäßig gegen f konvergiert:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in U_x} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

Hauptmittel zum Beweis unseres Satzes ist Proposition 8.4.

Proposition (I.8.4)

Sei X ein kompakter topologischer Raum (mit abzählbarer Basis) und dx ein Radonmaß. Sei $K \in \mathcal{C}(X \times X)$ eine stetige Funktion. Der Operator

$$L_K : L^2(X, dx) \to L^2(X, dx), L_K(f)(x) := \int_X K(x, y) f(y) dy$$

ist ein kompakter (stetiger und linearer) Operator.

Ein Operator ist **kompakt**, wenn das Bild jeder beschränkten Menge in einem Kompaktum enthalten ist.
Oder äquivalent, wenn das Bild der Einheitskugel in einem Kompaktum enthalten ist.

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

Hauptmittel zum Beweis unseres Satzes ist Proposition 8.4.

Proposition (I.8.4)

Sei X ein kompakter topologischer Raum (mit abzählbarer Basis) und dx ein Radonmaß. Sei $K \in \mathcal{C}(X \times X)$ eine stetige Funktion. Der Operator

$$L_K : L^2(X, dx) \to L^2(X, dx), L_K(f)(x) := \int_X K(x, y) f(y) dy$$

ist ein kompakter (stetiger und linearer) Operator.

Ein Operator ist **kompakt**, wenn das Bild jeder beschränkten Menge in einem Kompaktum enthalten ist.
Oder äquivalent, wenn das Bild der Einheitskugel in einem Kompaktum enthalten ist.

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

$$L_K : L^2(X, dx) \to L^2(X, dx), L_K(f)(x) := \int_X K(x, y)f(y)dy$$

Beweis:

Wir zeigen Folgendes

- Wohldefiniertheit des Integrals
- L_K ist ein linearer, stetiger Operator
- L_K ist ein kompakter Operator (mit Hilfe von Arzela-Ascoli)

Wir verwenden die Cauchy-Schwarz Ungleichung für L^2:

$$|\langle f, g\rangle| = |\int f\overline{g}| \leq (\int |f|^2)^{\frac{1}{2}}(\int |g|^2)^{\frac{1}{2}} = ||f||_2||g||_2$$

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

Schritt 1): Das Integral existiert
Mit Cauchy-Schwarz und da $K(x,\cdot)$ stetig auf Kompaktum X ist, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
|L_K(f)(x)| &= |\int_X K(x,y)f(y)dy| \\
&\leq (\int_X |K(x,y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} (\int_X |f(y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} \leq c \cdot \|f\|_2 < \infty,
\end{aligned}
$$

Schritt 2): L_K ist stetiger, linearer Operator
Linearität ist klar. Mit obiger Ungleichung folgt, dass L_K beschränkt ist:

$$\|L_K f\|_2 = (\int_X |L_K f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq c \cdot \|f\|_2 \cdot (\int_X 1 dx)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \|f\|_2$$

Beschränkte, lineare Operatoren sind auch stetig.

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

Schritt 1): Das Integral existiert
Mit Cauchy-Schwarz und da $K(x,\cdot)$ stetig auf Kompaktum X ist, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
|L_K(f)(x)| &= |\int_X K(x,y)f(y)dy| \\
&\leq (\int_X |K(x,y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} (\int_X |f(y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} \leq c \cdot \|f\|_2 < \infty,
\end{aligned}
$$

Schritt 2): L_K ist stetiger, linearer Operator
Linearität ist klar. Mit obiger Ungleichung folgt, dass L_K beschränkt ist:

$$\|L_K f\|_2 = (\int_X |L_K f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq c \cdot \|f\|_2 \cdot (\int_X 1 dx)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \|f\|_2$$

Beschränkte, lineare Operatoren sind auch stetig.

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

Schritt 3): L_K ist kompakter Operator (das Bild der Einheitskugel ist in einem Kompaktum enthalten)

Sei

$$M = \{L_K f \quad | \quad f \in L^2(X, dx), \quad \|f\|_2 \leq 1\}$$

das Bild der Einheitskugel unter L_K, und $(L_K f_n)$ eine Folge darin, d.h. $f_n \in L^2(X, dx), \|f_n\|_2 \leq 1$. Wir müssen zeigen, dass $(L_K f_n)$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

$M = \{L_K f| \quad f \in L^2(X, dx), ||f||_2 \leq 1\}$ ist gleichgradig stetig:

Sei $a \in X$, sei $\epsilon > 0$. Da $K(\cdot, y)$ stetig, existiert eine Umgebung U von a, sodass

$$|K(x,y) - K(a,y)| < \epsilon/C,$$

mit $C = (\int_X 1dy)^{\frac{1}{2}}$. Somit gilt für alle $x \in U$, $L_K f \in M$:

$$\begin{aligned}
&|L_K f(x) - L_K f(a)| = |\int_X K(x,y)f(y)dy - \int_X K(a,y)f(y)dy| \\
&= |\int_X (K(x,y) - K(a,y))f(y)dy| \\
&\leq (\int_X |K(x,y) - K(a,y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} \cdot ||f||_2 < \epsilon
\end{aligned}$$

Teil 1: Satz 8.4 + Beweis

Wir verwenden den Satz von Arzela-Ascoli.

Satz (Arzela-Ascoli, I.8.2)

Sei X ein lokal kompakter Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Sei M die Menge der gleichgradig stetigen Funktionen auf X, sodass die Mengen der Werte $f(x)$, $f \in M$ für alle $x \in X$ beschränkt sind. Dann gilt: jede Folge in M besitzt eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig konvergiert.

- $\Rightarrow$ lokal gleichmäßig konvergierende und somit punktweise konvergierende Teilfolge

Alle Folgenglieder sind durch eine gemeinsame Konstante beschränkt

- $\Rightarrow$ Da X kompakt ist, sind konstante Funktionen integrierbar

Satz von Lebesgue (dominierte Konvergenz)

- $\Rightarrow$ Konvergenz in $L^2(X, dx)$

Teil 1: Satz 8.5

Wir werden folgenden Satz verallgemeinern:

Satz (I.8.5)

Sei $\pi : G \to GL(H)$ eine unitäre Darstellung von G (lokal kompakte Gruppe). Angenommen es existiert eine Dirac-Folge $\delta_n \in C_c(G)$ sodass $\pi(\delta_n)$ kompakte Operatoren sind. Dann: π kann in irreduzible Darstellungen mit endlichen Multiplizitäten zerlegt werden.

Beweis: mit Hilfe des Spektralsatzes für kompakte, selbstadjungierte Operatoren (vgl. VL)

Teil 1: Satz 8.10 + Beweis

Satz (I.8.10)

Sei G eine unimodulare, lokal kompakte Gruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe, sodass $\Gamma\backslash G$ kompakt ist. Dann ist die Darstellung von G auf $L^2(\Gamma\backslash G)$ (Rechtstranslation) vollständig reduzibel mit endlichen Multiplizitäten.

Beweis:
Schritt 1: Sei $f \in C_c(G)$. Zeige, dass die Operatoren R_f kompakt sind (unter Verwendung von 8.4)
Schritt 2: Die Aussage des Satzes folgt dann mit 8.5

Teil 1: Satz 8.10 + Beweis

Beweis (Schritt 1):
Wir schreiben R_f als Bochner Integral und erhalten:

$$\begin{aligned} R_f(h)(x) &= \int_G f(y) R_y(h)(x) dy = \int_G f(y) h(xy) dy \\ &= \int_G f(x^{-1}y) h(y) dy = \int_{\Gamma\backslash G} \int_\Gamma f(x^{-1}\gamma y) h(\gamma y) d\gamma dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y) h(y) dy \end{aligned}$$

Dies ist ein Integraloperator mit Kern

$$K(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y).$$

Da f kompakten Träger hat, ist diese Summe lokal endlich und $K \in \mathcal{C}(X \times X)$, wobei $X = \Gamma\backslash G$. Wir wenden Prop. 8.4 an.

Teil 1: Zusammenhang zu bereits Gelerntem

Gerade bewiesenes Theorem ist Verallgemeinerung von bereits bekanntem Satz 8.6.

Theorem (I.8.6)

Sei K eine kompakte Gruppe. Die Operation von K auf $L^2(K)$ per Rechtstranslation ist vollständig reduzibel mit endlichen Multiplizitäten.

Beweis: Verwende 8.10 mit $G = K$ und $\Gamma = id$.

Teil 2: Automorphe Formen

Der Satz soll jetzt auf $G = SL(2, \mathbb{R})$ angewendet werden.

Satz (I.8.10)

Sei G eine unimodulare, lokal kompakte Gruppe und $\Gamma \subset G$ eine diskrete Untergruppe, sodass $\Gamma \backslash G$ kompakt ist. Dann ist die Darstellung von G auf $L^2(\Gamma \backslash G)$ (Rechtstranslation) vollständig reduzibel mit endlichen Multiplizitäten.

- Borel: Jede halbeinfache Lie Gruppe besitzt diskrete Untergruppen mit kompaktem Koeffizienten
- Fragestellung: Welche Darstellungen der Bargmann-Klassifikation können auftauchen?

Teil 2: Automorphe Formen

Lemma (1)

Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf der oberen Halbebene und sei $m \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ gegeben durch:

$$F(g) = F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right)(ci+d)^{-m} = f(gi)(ci+d)^{-m}.$$

Es gilt $F(gk_\theta) = e^{im\theta}F(g)$ und jede Funktion auf G mit dieser Transformationseigenschaft kommt von einer Funktion f auf $\mathbb{H}$.

Einführung des Strichoperators: Wir definieren

$$(f|_m g)(\tau) := f(g\tau)(c\tau + d)^{-m}$$

Es gilt $(f|_m g)|_m h = f|_m gh$ (ohne Beweis) und $F(g) = (f|_m g)(i)$.

Teil 2: Automorphe Formen

Beweis:
Wir verwenden folgende Eigenschaften

1) $F(g) = F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := f(\frac{ai+b}{ci+d})(ci+d)^{-m} = f(gi)(ci+d)^{-m}$
2) $(f|_m g)(\tau) := f(g\tau)(c\tau+d)^{-m}$ (Def. Strichoperator)
3) $(f|_m g)|_m h = f|_m gh$ (Eigenschaft Strichoperator)
4) $F(g) = (f|_m g)(i)$

Zu zeigen: $F(gk_\theta) = e^{im\theta}F(g)$

$F(gk_\theta) = (f|_m(gk_\theta))(i) = ((f|_m g)|_m k_\theta)(i)$
$= (f|_m g)(k_\theta i)(-sin\theta i + cos\theta)^{-m} = (f|_m g)(i)(e^{-i\theta})^{-m}$
$= e^{im\theta}F(g)$

Teil 2: Automorphe Formen

Gegeben eine Funktion F mit der Transformationseigenschaft $F(gk_\theta) = e^{im\theta}F(g)$, so kann f durch folgendes Lemma gefunden werden. D.h. jede solche Funktion F kommt von einer Funktion f auf der oberen Halbebene.

Lemma (2)

Weiterhin kann man F schreiben als

$$F\left(\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \sqrt{y}^{-1}x \\ 0 & \sqrt{y}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\right) = f(x+iy)e^{im\theta}\sqrt{y}^{m}.$$

Anmerkung: Hier werden die Iwasawakoordinaten verwendet $(y > 0)$.

Teil 2: Automorphe Formen

Lemma (2)

Weiterhin kann man F schreiben als

$$F\left(\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \sqrt{y}^{-1}x\\ 0 & \sqrt{y}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}\right) = f(x+iy)e^{im\theta}\sqrt{y}^{m}.$$

Beweis: Es gilt $F(gk_\theta) = e^{im\theta}F(g)$, also

$$F\left(\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \sqrt{y}^{-1}x\\ 0 & \sqrt{y}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{pmatrix}\right) = e^{im\theta}F\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \sqrt{y}^{-1}x\\ 0 & \sqrt{y}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$= e^{im\theta}f\left(\frac{\sqrt{y}i+\sqrt{y}^{-1}x}{\sqrt{y}^{-1}}\right)(\sqrt{y}^{-1})^{-m} = e^{im\theta}f(iy+x)\sqrt{y}^{m}$$

$$= f(x+iy)e^{im\theta}\sqrt{y}^{m}.$$

Teil 2: Automorphe Formen

Lemma (3)

F ist invariant unter Γ (d.h. $F(\gamma g) = F(g)$) genau dann, wenn für f und für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ *gilt:*

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^m f(z)$$

Beweis: Verwende Lemma 2 + rechnen
Spezialfall: $F(\gamma) = F(id), \gamma \in \Gamma$

Teil 2: Bargmann Klassifikation

Erinnerung: Sei $\pi : G \to GL(H)$ Banachdarstellung. Schränke π auf K ein. Können annehmen, dass $\pi|_K$ unitär. Die Darstellung zerfällt in eine Hilbertraumsumme

$$H = \bigoplus H(m)$$

mit $H(m) := \{h \in H \mid \pi(k_\theta)h = e^{im\theta}h\}$.

- Struktur der $(\mathfrak{g}, K)$ -Moduln
- Bargmann-Klassifikation, z.B.:
  - gerade Hauptserie, $s \in i\mathbb{R}$, $m \in 2\mathbb{Z}$
  - diskrete Serie mit höchstem Gewicht $n \leq -2$ oder niedrigstem Gewicht $m \geq 2$.

  $\lambda = (s+1)(s-1)$ ist der Eigenwert des Casimir.

Teil 2: Die holomorphe, diskrete Serie

Angenommen es existiert ein irreduzibler abgeschlosseneer Unterraum $H \subset L^2(\Gamma\backslash G)$, der zur holomorphen diskreten Serie mit niedrigstem Gewicht $m \geq 2$ gehört. Sei $h \in H, h \neq 0$ ein Vektor mit niedrigstem Gewicht.

Hier gilt

$$H(m) := \{h \in H \mid R_{k_\theta}(h)(g) = h(gk_\theta) = e^{im\theta}h(g)\}$$

Also h entspricht F von vorhin. Durch das eben gezeigte Lemma finden wir eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit Transformationseigenschaft

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^m f(z).$$

Teil 2: Die holomorphe, diskrete Serie

Erinnerung:

- Für $E^- \in \mathfrak{g}$ gilt $E^-(H(m)) = H(m-2)$ (Wirkung durch derivierte Darstellung)
- Explizite Formel für $\mathcal{L}_{E^-}$:

$$\mathcal{L}_{E^-} = -2iye^{-2i\theta}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}) + ie^{-2i\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Da h Minimalgewicht hat, gilt $E^- h = 0$ und mit der expliziten Formel für E^-

$$(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})f = 0.$$

Das heißt, dass f holomorph, also eine holomorphe automorphe Form ist. Umgekehrt erhält man alle holomorphen automorphen Formen auf diesem Weg.

Teil 2: gerade Hauptserie

Angenommen es existiert ein irreduzibler, abgeschlosseneer Unterraum $H \subset L^2(\Gamma\backslash G)$, der zur geraden Hauptserie mit Parameter s gehört. Sei $h \neq 0$ ein Vektor mit Gewicht 0. Dieser ist invariant unter K (m = 0) und korrespondiert mit einer Funktion f auf der oberen Halbebene.

h ist Eigenform des Casimiroperators mit Eigenwert $\lambda = (s+1)(s-1)$. Mit den expliziten Formeln für $E^{\pm}$ heißt das:

$$y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f = \lambda f.$$

- Maass-Formen
- Verallgemeinerung von Holomorphie durch Differentialgleichungen
- Alle Maass-Formen können durch Unterdarstellungen von $L^2(\Gamma\backslash G)$ gefunden werden.