Einleitung

Es sei Γ eine Gruppe vom Typ der Hilbertschen Modulgruppe zu einem total reellen Zahlkörper L. Diese operiert auf dem Produkt von n oberen Halbebenen. Der Raum H^n/Γ kann durch Hinzunahme endlich vieler Spitzen zu einer normalen projektiven algebraischen Mannigfaltigkeit X (mit Singularitäten) kompaktifiziert werden.

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist der Beweis folgender Formel

$$
\begin{aligned}
g\big(K(\Gamma)\big) &= 1 + (-1)^n \dim\,[\Gamma, 1]_0 \\
&= P_\Gamma(0) - h \qquad (h = \text{Anzahl der Spitzen}) \qquad (n > 1).
\end{aligned}
$$

Dabei ist $g\big(K(\Gamma)\big)$ das arithmetische Geschlecht des Körpers der Modulfunktionen.

Mit $[\Gamma, r]$ bzw. $[\Gamma, r]_0$ wird der Vektorraum der Modul- bzw. Spitzenformen vom Gewicht r bezeichnet.

Es gibt ein Polynom P_Γ vom Grade n mit der Eigenschaft

$$P_\Gamma(r) = \dim\,[\Gamma, r] \quad \text{für} \quad r \equiv 0 \bmod r_0,\ r \gg 0,\ r_0 \text{ geeignet}.$$

Dieses Polynom kann mit Hilfe der Selbergschen Spurformel berechnet werden [2, 12].

Der Beweis obiger Formel, die ihrer Gestalt nach völlig elementar ist, erfordert tiefe Hilfsmittel. Von Bedeutung sind

1) die algebraische Kompaktifizierung von H^n/Γ,

2) die Desingularisierungstheorie von Hironaka,

3) die Dualitätstheorie von Hodge ($h^{pq} = h^{qp}$),

4) die allgemeine Dualitätstheorie auf algebraischen Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten (Grothendieck, Hartshorne).

5) Verschwindungssätze „von Kodaira“ für Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten (Grauert, Riemenschneider).

Ein elementarer Beweis obiger Formeln wäre natürlich wünschenswert.

Kurze Skizze des Beweises

Mit $\tilde{X}$ werde ein singularitätenfreies Modell des Körpers der Modulfunktionen $K(\Gamma)$ bezeichnet. Nach Hironaka existiert ein solches Modell und man kann sogar annehmen, daß $\tilde{X}$ eine Modifikation von X ist.

Man kann dann mit Hilfe der Hodgetheorie zeigen:

$$\dim H^\nu(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n.$$

Außerdem folgt aus der üblichen Dualitätstheorie (Serre)

$$\dim H^n(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \dim [\Gamma, 1]_0,$$

$$\dim H^n(X, \mathcal{O}_X) = \dim [\Gamma, 1] = \dim [\Gamma, 1]_0 + h.$$

Das entscheidende Problem ist daher, $H^\nu(X, \mathcal{O}_X)$ zu berechnen und zwar für $1 < \nu < n$, denn $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ verschwindet, wie man mit Hilfe der Lerayschen Spektralsequenz zeigt.

Mit Hilfe eines Verschwindungssatzes von Grauert und Riemenschneider kann man

$$H^\nu(X, \mathcal{K}_X) = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n$$

$$(\mathcal{K}_X = \text{kanonische Garbe im Sinne von Serre})$$

zeigen.

Die Gruppen $H^\nu(X, \mathcal{O}_X)$ können nun mit Hilfe der Dualitätstheorie von Grothendieck/Hartshorne berechnet werden. Sie setzen sich zusammen aus $H^\nu(X, \mathcal{K}_X)$ und den lokalen Kohomologiegruppen $H^\nu_{\{x\}}(X, \mathcal{O}_X)$ (x eine Spitze).

Die letzteren sind rein lokale Invarianten. Ist x speziell die Spitze ∞, so führt man die Berechnung der lokalen Kohomologiegruppen zurück auf

$$H^\nu(H^n/\Gamma_\infty, \text{Strukturgarbe}).$$

Da die Struktur des Stabilisators Γ_∞ sehr einfach ist, kann man diese Gruppen explizit berechnen.

§ 1. Hyperabelsche Gruppen

Mit

$$H = \{z \in \mathbb{C};\ z = x + iy, y > 0\}$$

werde die obere Halbebene bezeichnet und mit

$$G = Sl(2, \mathbb{R})/\{+E, -E\}$$

die Gruppe ihrer analytischen Automorphismen. Eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{R})$$

operiert auf H durch

$$M\langle z\rangle=(\alpha z+\beta)(\gamma z+\delta)^{-1}.$$

Auf dem Produkt von n oberen Halbebenen H^n operiert die symmetrische Gruppe S_n durch

$$\sigma(z_1,\ldots,z_n)=(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(n)}).$$

Die volle Gruppe der analytischen Automorphismen von H^n ist

$$G_n=G^n\cdot S_n \qquad \text{(semidirektes Produkt)}.$$

Im folgenden sei $\hat{\Gamma}\subset G_n$ eine diskrete Untergruppe und

$$\Gamma=\hat{\Gamma}\cap G^n.$$

Dies ist ein Normalteiler von endlichem Index in $\hat{\Gamma}$.

Man kann die Gruppe G_n auch auf dem Raum $\overline{H}^n$ operieren lassen, wobei $\overline{H}$ der Abschluß von H in der Riemannschen Zahlkugel sei:

$$\overline{H}=H\cup\overline{\mathbb{R}}; \qquad \overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}.$$

Gewisse Randpunkte

$$\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)\in\overline{\mathbb{R}}^n$$

heißen Spitzen von $\hat{\Gamma}$, wenn der Stabilisator $\hat{\Gamma}_\kappa$ Maximalitätsbedingungen genügt, die wir nun formulieren wollen. Zunächst transformiert man κ durch eine Substitution $g\in G_n$ nach ∞

$$g(\kappa)=\infty=(\infty,\ldots,\infty).$$

Die Gruppe $\hat{\Gamma}$ hat definitionsgemäß genau dann die Spitze κ, wenn $g\hat{\Gamma}g^{-1}$ die Spitze ∞ hat.

Man kann also $\kappa=\infty$ annehmen. Die Elemente aus G^n, die ∞ festlassen, sind die affinen Substitutionen

$$z\to\varepsilon z+\alpha, \alpha\in\mathbb{R}^n; \qquad \varepsilon\in\mathbb{R}^n_+.$$

Die Gesamtheit der Translationen

$$\mathfrak{t}=\{\alpha\in\mathbb{R}^n;\ z\to z+\alpha \text{ liegt in } \Gamma\}$$

ist eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^n$.

1. Bedingung. $\mathfrak{t}$ ist ein Gitter (vom Rang n) in $\mathbb{R}^n$.

Ein n-Tupel $\varepsilon\in\mathbb{R}^n_+$ heißt Multiplikator, wenn es ein $\alpha\in\mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$z\to\varepsilon z+\alpha$$

in Γ enthalten ist.

Die Gruppe aller Multiplikatoren werde mit

$$\Lambda = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+, z \to \varepsilon z + \alpha \text{ liegt in } \Gamma \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}^n\}$$

bezeichnet. Diese Gruppe operiert auf dem Translationsgitter durch

$$(\varepsilon, \alpha) \to \varepsilon \alpha.$$

Wenn t maximalen Rang n hat, sind infolgedessen die Multiplikatoren algebraische Einheiten, und es gilt

$$N\varepsilon = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = 1$$

(Allgemein definieren wir

$$N: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \qquad Nz = z_1 \dots z_n$$

$$S: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \qquad Sz = z_1 + \dots + z_n.)$$

Die Gruppe Λ ist eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^n_+$ und hat daher einen Rang $\leqq n-1$.

2. Bedingung. Rang $\Lambda = n-1$.

Die Spitzen von $\hat{\Gamma}$ und irgendeiner Untergruppe $\hat{\Gamma}_0$ von endlichem Index stimmen überein.

Wenn ∞ Spitze von $\hat{\Gamma}$ ist, so operiert der Stabilisator $\hat{\Gamma}_\infty$ auf

$$U_C = \{z \in \mathbb{C}^n;\ Ny > C\} \quad (y = \operatorname{Im} z).$$

Man erhält also eine Abbildung

$$U_C/\hat{\Gamma}_\infty \to H^n/\hat{\Gamma}.$$

1.1. Lemma. *Die Gruppe $\hat{\Gamma}$ habe die Spitze ∞. Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß die natürliche Abbildung*

$$U_C/\hat{\Gamma}_\infty \to H^n/\hat{\Gamma}$$

eine (offene) Einbettung ist (siehe [8]).

Offenbar ist

$$U_C/\hat{\Gamma}_\infty = \text{Kompaktum} \times \{x \in \mathbb{R}, x > C\}.$$

Es ist daher möglich, den Raum $H^n/\hat{\Gamma}$ durch Hinzunahme eines Punktes ∞ zu erweitern, so daß gilt:

a) $H^n/\hat{\Gamma} \cup \{\infty\}$ ist lokal kompakt.

b) Eine Umgebungsbasis von $\{\infty\}$ hat man in

$$U_C/\hat{\Gamma}_\infty \cup \{\infty\} \quad (C > 0).$$

In entsprechender Weise kann man die anderen Spitzen von $\hat{\Gamma}$ zu $H^n/\hat{\Gamma}$ hinzunehmen. Man erhält so einen lokal kompakten Raum

$$X = H^n/\hat{\Gamma} \cup \text{Klassen der bezüglich } \hat{\Gamma} \text{ äquivalenten Spitzen von } \hat{\Gamma}.$$

Die Spitzenklassen bilden eine diskrete Teilmenge von X.

1.2. Definition. Die Gruppe $\hat{\Gamma}$ heiße hyperabelsch, wenn der Raum

$$X = H^n/\hat{\Gamma} \cup \{\text{Spitzenklassen}\}$$

kompakt ist.

Es gibt dann insbesondere nur endlich viele Klassen äquivalenter Spitzen.

Es gibt hyperabelsche Gruppen $\hat{\Gamma}$ ohne Spitzen, die in dieser Arbeit allerdings nur eine untergeordnete Rolle spielen. Die Resultate dieser Arbeit gelten jedoch auch für solche Gruppen, wenn man eine gewisse Irreduzibilitätsbedingung fordert und zwar soll bei den n-Projektionen

$$G^n \to G^{n-1} \quad \text{(Streichen einer Komponente)}$$

das Bild von Γ dicht in G^{n-1} sein.

Eine hyperabelsche Gruppe heiße irreduzibel, wenn sie entweder Spitzen hat, oder der eben genannten Bedingung genügt. Bei Gruppen mit Spitzen ist diese Bedingung vermutlich automatisch erfüllt, aber das benötigen wir im folgenden nicht. Beispiele für hyperabelsche Gruppen sind die Hilbertschen Modulgruppen.

Sei L ein total reeller Zahlkörper von Rang n. Die n verschiedenen Einbettungen

$$L \to \mathbb{R}; \qquad \alpha \to \alpha^{(\nu)} (1 \leqq \nu \leqq n)$$

fassen wir zu einer Abbildung

$$L \to \mathbb{R}^n; \qquad \alpha \to (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)})$$

zusammen. Wir werden im folgenden α und $(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)})$ identifizieren.

Die Hauptordnung

$$\mathfrak{O} = \{\alpha \in L; \ \alpha \text{ ganz algebraisch}\}$$

definiert ein Gitter in $\mathbb{R}^n$. Die Hilbertsche Modulgruppe zu L ist definiert durch

$$\Gamma_L = Sl(2, \mathfrak{O})/\{\pm E\} \hookrightarrow G^n.$$

Die Struktur des Raumes $X = \overline{H^n/\hat{\Gamma}}$.

Es ist bekannt, daß X eine Struktur als normalen komplexen Raum besitzt.

Wir beschreiben den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,[\infty]}$ in der Spitze ∞. Ein Element $\mathcal{O}_{X,[\infty]}$ wird definiert durch eine holomorphe Funktion

$$f: U_C \to \mathbb{C} \quad (C \text{ hinreichend groß}),$$

welche bei $\hat{\Gamma}_\infty$ invariant ist. Insbesondere gilt

$$f(z+\alpha)=f(z) \quad \text{für} \quad \alpha\in\mathfrak{t}.$$

Die Funktion f gestattet daher eine Entwicklung in eine Fourierreihe

$$f(z)=\sum_{\gamma\in\mathfrak{t}^0} a_\gamma e(\gamma z) \quad \text{mit} \quad e(\ldots)=e^{2\pi i S(\ldots)}.$$

Dabei ist $\mathfrak{t}^0$ das zu $\mathfrak{t}$ duale Gitter

$$\mathfrak{t}^0=\{\alpha\in\mathbb{R}^n, S(\alpha\xi)\in\mathbb{Z} \text{ für alle } \xi\in\mathfrak{t}\}.$$

1.3. Hilfssatz. *Die Reihe*

$$\sum_{\gamma\in\mathfrak{t}^0} a_\gamma e(\gamma z)$$

konvergiert dann und nur dann in U_C, wenn es zu jedem $\alpha\in\mathbb{R}^n_+$ mit $N\alpha>C$ eine Konstante K gibt, so daß

$$|a_\gamma|\leqq K\, e^{2\pi S(\alpha\gamma)}$$

gilt.

Man beweist dies mit Hilfe des Fourierintegrals.

Der Raum X ist nicht nur analytisch, sondern algebraisch.

1.4. Satz. *Es gibt eine Einbettung von X in einen projektiven Raum $P^N\mathbb{C}$ als abgeschlossene algebraische Mannigfaltigkeit.*

Man kann dann das Verschwindungsideal $\mathfrak{A}\subset\mathbb{C}[T_0,\ldots,T_N]$ von X betrachten und diesem den graduierten Ring

$$A=\mathbb{C}[T_0,\ldots,T_N]/\mathfrak{A}$$

zuordnen.

Diesen Ring kann man mit Hilfe von automorphen Formen beschreiben.

Eine automorphe Form vom Gewicht $r(=0,1,2,\ldots)$ ist eine holomorphe Funktion

$$f\colon H^n\to\mathbb{C},$$

die der Transformationsformel

$$f(gz)=j(g,z)^{-r}f(z) \qquad \text{für } g\in\hat{\Gamma}$$

genügt. Dabei ist $j(g,z)$ die Funktionaldeterminante von $z\to g(z)$. Die Differentialform $f(dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n)^r$ ist also $\hat{\Gamma}$-invariant. Im Falle $n=1$ ist außerdem noch die Beschränktheit von f in den Spitzen zu fordern.

Der Vektorraum der automorphen Formen vom Gewicht r werde mit $[\hat{\Gamma},r]$ bezeichnet.

Die direkte Summe dieser Vektorräume

$$A(\hat{\Gamma}) = \sum_{r=0}^{\infty} [\hat{\Gamma}, r]$$

ist eine endlich erzeugte graduierte Algebra über $\mathbb{C}$.

Die projektive Einbettung von X wird gerade so konstruiert, daß

$$A = A^{(r_0)}(\Gamma) = \sum_{r \equiv 0 \bmod r_0} [\Gamma, r]$$

gilt.

Dabei ist r_0 eine (möglicherweise große) natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit $P_{\hat{\Gamma}}$ das Hilbertpolynom zu dieser Einbettung. Dies ist also ein Polynom vom Grade n, so daß

$$\dim [\hat{\Gamma}, r] = P_{\hat{\Gamma}}(r) \qquad \text{für } r \equiv 0 \bmod r_0$$

r hinreichend groß gilt. Man kennt dieses Polynom in vielen Fällen.

1) $\hat{\Gamma} = \Gamma \subset G^n$.

In diesem Falle wurde $\dim [\hat{\Gamma}, r]$ für $r > 1$ von Shimizu mit Hilfe der Selbergschen Spurformel berechnet [12].

2) Im Falle $\hat{\Gamma} \neq \Gamma$, $n=2$, hat Busam $\dim [\hat{\Gamma}, r]$ für $r > 1$ analog zu 1) berechnet [2].

Es ist ein Ziel dieser Arbeit, auch $\dim [\hat{\Gamma}, 1]$ zu berechnen, genauer, $\dim [\hat{\Gamma}, 1]$ durch den konstanten Koeffizienten von $P_{\hat{\Gamma}}$ auszudrücken.

§ 2. Differentialformen auf $H^n/\hat{\Gamma}$

Auf einer beliebigen n-dimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit X_0 sind die holomorphen Differentialformen vom lokalen Typ

$$\omega = \sum_{1 \leqq j_1 \ldots < j_\nu \leqq n} f_{j_1, \ldots, j_\nu} dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_\nu}$$

von Interesse. Diese bilden einen Vektorraum $\Omega_\nu(X_0)$, dessen Dimension wir mit

$$g_\nu(X_0) = \dim \Omega_\nu(X_0)$$

bezeichnen, sofern sie endlich ist. Das differentielle Geschlecht von X_0 ist durch

$$g(X_0) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^n g_\nu(X_0)$$

definiert.

Es sei nun Γ eine irreduzible hyperabelsche Gruppe und

$$X_0 = X - S; \qquad S = \text{singulärer Ort von } X.$$

Da X normal ist, gilt

$$\dim X - \dim S \geqq 2 \qquad (n \geqq 2 \text{ vorausgesetzt}).$$

2.1. Satz. *Es sei $\hat{\Gamma}$ eine irreduzible hyperabelsche Gruppe und*

$$X_0 = \text{regulärer Ort von } X = H^n/\hat{\Gamma}.$$

Es gilt

$$g_1(X_0) = \cdots = g_{n-1}(X_0) = 0.$$

Dieser Satz stammt im Falle, daß $\hat{\Gamma}$ keine Spitzen und Fixpunkte hat, von Matsushima-Shimura [9].

Die Verallgemeinerung auf Gruppen mit Spitzen ist nicht schwierig. Der Vollständigkeit halber wollen wir den Beweis hier durchführen.

Sei

$$\omega_0 \in \Omega_v(X_0).$$

Das Urbild von ω_0 auf H^n bei der Projektionsabbildung

$$p\colon H^n \to H^n/\hat{\Gamma}$$

werde mit ω^* bezeichnet. Diese Differentialform ist invariant bei Γ und holomorph außerhalb $p^{-1}(S)$. Da die Kodimension von $p^{-1}(S)$ größer als eins ist, kann man ω^* auf ganze H^n holomorph fortsetzen. Es ist

$$\omega^* = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_v \leq n} f_{j_1, \ldots, j_v}(z)\, dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_v}$$

mit holomorphen Funktionen

$$f_{j_1, \ldots, j_v}\colon H^n \to \mathbb{C}.$$

Die Invarianz von ω^* bei Γ bedeutet offenbar

$$f(M\langle z\rangle) = \prod_{\mu \in \{j_1, \ldots, j_v\}} (\gamma_\mu z_\mu + \delta_\mu)^2 f(z);\; M = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$f = f_{j_1, \ldots, j_v}.$$

Satz 2.1 ist daher ein Spezialfall von

2.2. Hilfssatz. *Sei*

$$f\colon H^n \to \mathbb{C}$$

eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft

$$f(M\langle z\rangle) = \sum_{v=1}^{n} (\gamma_v z_v + \delta_v)^{2r_v} f(z) \qquad \text{für } M \in \Gamma$$

mit ganz rationalen Zahlen r_v, von denen gewisse, aber nicht alle verschwinden. Dann verschwindet f identisch.

Beweis. Die Funktion

$$g(z) = \sum_{v=1}^{n} y^{r_v} f(z)$$

ist in gewissen Variablen noch holomorph. Außerdem ist $|g(z)|$ invariant unter Γ.

1. Fall. H^n/Γ ist kompakt.

Die Funktion $|g(z)|$ nehme ihr Maximum in $z^0=(z_1^0, \ldots, z_n^0)$ an. Wir können annehmen, daß

$$r_1=0$$

ist. Nach dem Maximumprinzip ist die holomorphe Funktion

$$h(z)=g(z, z_2^0, \ldots, z_n^0)$$

konstant. Wegen der Γ-Invarianz von $|g(z)|$ gilt daher

$$|g(z^0)|=|g(z, M_2\langle z_2^0\rangle, \ldots, M_n\langle z_n^0\rangle)|.$$

Die Irreduzibilität der Gruppe Γ besagt nun gerade, daß die Menge der Punkte

$$\{(M_2\langle z_2^0\rangle, \ldots, M_n\langle z_n^0\rangle), M\in\Gamma\}$$

dicht in H^{n-1} liegt.

Aus Stetigkeitsgründen ist daher $|g(z)|$ konstant. Jetzt ist leicht zu sehen, daß f verschwindet.

2. Fall. Die Gruppe Γ hat Spitzen.

Zunächst zeigen wir, daß die Γ-invariante Funktion $|g(z)|$ in den Spitzen verschwindet. Dies ist eine Variante des Koecherprinzips.

Zunächst kann man f in eine Fourierreihe entwickeln

$$f(z)=\sum_{\gamma\in t^0} a_\gamma e(\gamma z); \qquad e(\gamma z)=e^{2\pi i S(\gamma z)}.$$

Ist $\varepsilon\in\Lambda$ ein Multiplikator, so gilt offenbar

$$|a_{\gamma\varepsilon}|=\left(\prod_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu^{r_\nu}\right)|a_\gamma|.$$

Da gewisse, aber nicht alle r_ν verschwinden, folgt $a_0=0$. Es muß noch gezeigt werden

$$a_\gamma\neq 0 \Rightarrow \gamma>0.$$

Dazu benutzt man die Abschätzung

$$|a_\gamma|\leqq C e^{S(\gamma)} \qquad (\text{s. } (1.3)).$$

Aus der Koeffizientenrelation folgt nun

$$|a_\gamma|\leqq C\left(\prod_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu^{r_\nu}\right)^k e^{S(\gamma\varepsilon^k)} \qquad \text{für } k\in\mathbb{Z}.$$

Es sei etwa die erste Komponente γ_1 von γ negativ. Mit Hilfe eines einfachen Gitterarguments findet man einen Multiplikator ε mit der Eigenschaft

$$\varepsilon_1 > 1, \varepsilon_\nu < 1 \quad \text{für } 2 \leqq \nu \leqq n.$$

Durch Grenzübergang $k \to \infty$ zeigt man nun $a_\gamma = 0$.

Damit ist gezeigt, daß $|g(z)|$ in den Spitzen verschwindet. Die Funktion $g(z)$ nimmt daher ein Maximum in $z^0 \in H^n$ an. Die Funktion

$$h(z) = g(z, z_2^0, \ldots, z_n^0)$$

ist holomorph (es wird wieder $r_1 = 0$ angenommen) und daher konstant. Mit Hilfe des Grenzübergangs $\operatorname{Im} z \to \infty$ beweist man

$$h(z) = 0.$$

Insbesondere gilt

$$g(z^0) = 0, \qquad \text{also } g(z) = 0.$$

2.3. Bemerkung. (*Voraussetzung wie in* 2.1.) *Es ist*

$$g_0(X_0) = 1; \qquad g_n(X_0) = \dim [\Gamma, 1].$$

Das differentielle Geschlecht von X_0 ist daher

$$g(X_0) = 1 + (-1)^n \dim [\Gamma, 1].$$

Das differentielle Geschlecht einer kompakten singularitätenfreien Mannigfaltigkeit X kann nach der Hodgetheorie über eine projektive Einbettung berechnet werden.

2.4. Satz (s. etwa [7]). *Ist X eine kompakte singularitätenfreie projektive Mannigfaltigkeit und ist P das Hilbertpolynom einer Einbettung von X in einen projektiven Raum $P^N \mathbb{C}$, so gilt*

$$g(X) = P(0).$$

Wenn X nicht singularitätenfrei ist, so ist der Zusammenhang zwischen $g(X_0)$ und $P(0)$ komplizierter.

Es werde mit $K(\hat{\Gamma})$ der Körper der automorphen Funktionen zu $\hat{\Gamma}$ bezeichnet. Die Elemente von $K(\hat{\Gamma})$ sind $\hat{\Gamma}$-invariante mermorphe Funktionen auf H^n, die im Falle $n=1$ noch einer Wachstumsbedingung in den Spitzen genügen. Die automorphen Funktionen entsprechen umkehrbar eindeutig den rationalen Funktionen auf X. Daher ist $K(\hat{\Gamma})$ ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n.

Man kann jedem algebraischen Funktionenkörper eine gewisse Invariante, das arithmetische Geschlecht $g(K)$ zuordnen.

Hat man ein kompaktes singularitätenfreies Modell X von K, so ist

$$g(K)=g(X).$$

Man kann dies als Definition von $g(K)$ wählen, muß dann allerdings wissen, daß $g(X)$ birational invariant ist und daß ein singularitätenfreies Modell X existiert.

Es stellt sich nun folgendes

Problem. *Es sei $\hat{\Gamma}$ eine irreduzible hyperabelsche Gruppe und X_0 der reguläre Ort von $X=H^n/\hat{\Gamma}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Größen*

$$g(K(\Gamma)), g(X_0)=1+(-1)^n \dim[\hat{\Gamma}, 1], P_{\hat{\Gamma}}(0)?$$

§ 3. Fortsetzbarkeit von Differentialformen

Es sei X eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension n und $X_0 \subset X$ ein offener dichter Teil. Wann ist eine holomorphe Differentialform ω_0 von X_0 auf X holomorph fortsetzbar?

Diese Frage ist leicht zu beantworten, wenn ω_0 vom Typ Ω_n ist.

3.1. Hilfssatz[1]. *Sei X eine n-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit und $\omega_0 \in \Omega_n(X_0)$ eine holomorphe Differentialform auf einem offenen dichten Teil $X_0 \subset X$, welche auf ganz X meromorph sei. Eine solche Form ist in einem Punkt $s \in X - X_0$ genau dann holomorph, wenn es eine Umgebung U von s gibt, so daß gilt:*

$$\int_{U \cap X_0} \omega \wedge \overline{\omega} < \infty.$$

Beweis. Wir nehmen an, das Integral sei endlich. Dann ist ω sogar in ganz U holomorph, wie nun indirekt bewiesen werden soll.

Wenn die Polstellenmenge $S \subset U$ von ω in U nicht leer ist, so kann man einen regulären Punkt $s_0 \in S$ finden. Nach eventueller Verkleinerung von U kann man dann annehmen

$$U=\{z \in \mathbb{C}^n;\ |z_\nu| < r\ (1 \leqq \nu \leqq n)\}, r>0,$$

$$S=\{z \in U;\ z_1=0\} \qquad \text{und } s=0.$$

In U besitzt ω eine Darstellung

$$\omega = f\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

mit einer in U meromorphen Funktion f, deren Pole in S liegen. Ersetzt man ω durch $z_1^k \omega$, $k \geqq 0$, so bleibt das Integral immer noch endlich. Man

[1] Eine Variante dieses Hilfssatzes findet man in [4], der Beweis ist dort allerdings nicht korrekt.

kann daher annehmen, daß ω in S einen Pol erster Ordnung hat, d.h.

$$f(z)=z_1^{-1}a(z_2,\ldots,z_n)+b(z_1,\ldots,z_n)$$

mit holomorphen Funktionen a, b. Diese sind in U beschränkt, wenn man r etwas verkleinert. Nach Voraussetzung sollte das Integral

$$\int_{U-S}|f(z)|^2\,dx_1\,dy_1\ldots dx_n\,dy_n$$

endlich sein. Wenn a von Null verschieden ist, so muß infolgedessen das uneigentliche Integral

$$\int_{|z_1|\leq r}(x_1^2+y_1^2)^{-1}\,dx_1\,dy_1$$

konvergieren. Dies ist aber nicht der Fall.

Dieses Kriterium soll nun auf eine Desingularisierung

$$X\to U_C/\hat{\Gamma}_\infty\cup\{\infty\}$$

angewendet werden, wobei X_0 der reguläre Ort von $U_C/\hat{\Gamma}_\infty$ sei.

Eine holomorphe Differentialform $\omega_0\in\Omega_n(X_0)$ induziert zunächst eine $\hat{\Gamma}$-invariante holomorphe Differentialform $f\cdot dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$ auf U_C. Die holomorphe Funktion f ist dann insbesondere Γ_∞-invariant und gestattet daher eine Entwicklung in eine Fourierreihe

$$f(z)=a_0+\sum_{\gamma>0}a_\gamma\,e(\gamma z).$$

Bezeichnet man mit F_{C^*} einen Fundamentalbereich von Γ_∞ in U_{C^*}, so ist

$$\int_{U_{C^*}/\Gamma_\infty}\omega\wedge\overline{\omega}=\int_{F_{C^*}}|f(z)|^2\,dz\wedge d\bar{z}.$$

Es ist zu untersuchen, wann dieses Integral für große C^* (und damit faktisch für $C^*>C$) endlich ist.

1. Fall $a_0\neq 0$. Für hinreichend großes C^* gilt

$$|f(z)|\geqq\tfrac{1}{2}|a_0|>0,\qquad z\in U_{C^*}.$$

Da F_{C^*} kein endliches Euklidsches Volumen hat, kann obiges Integral nicht endlich sein.

2. Fall $a_0=0$. Es wird sich zeigen, daß das Integral endlich ist. Dazu ist

$$\int_{F_{C^*}}|e(\gamma z)|\,dz\wedge d\bar{z}$$

abzuschätzen. Man kann den Fundamentalbereich F_{C^*} so konstruieren, daß

$$x_\nu\quad\text{für }1\leqq\nu\leqq n\quad\text{und}\quad\frac{y_\nu}{\sqrt[n]{Ny}}\quad\text{für }1\leqq\nu\leqq n-1$$

in einem Kompaktum variieren. In diesem Bereich gilt dann

$$y_\nu \geqq C \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, n$$

mit einer Konstanten C, die von C^* abhängt und mit C^* über alle Grenzen wächst.

Es gilt

$$\int\limits_{y_\nu \geqq C} e^{-2\pi S(\gamma y)}\, d y_1 \ldots d y_n = \frac{e^{-2\pi C S(\gamma)}}{(2\pi)^n N\gamma}$$

$$\leqq e^{-2\pi S(y^* \gamma)} \text{ für hinreichend große } C,$$

wobei $y^* > 0$ irgend ein fest vorgegebener Vektor mit $N y^* > C^*$ sei.

Man erhält nun eine Abschätzung der Art

$$\int\limits_{F_{C^*}} |f(z)|^2\, dz \wedge d\bar{z} \leqq \sum_{\gamma > 0} |a_\gamma|\, e^{-2\pi S(y^* \gamma)} < \infty .$$

Diese Reihe konvergiert, da die Fourierreihe von $f(z)$ in U_{C^*} (absolut) konvergiert.

Damit ist bewiesen:

3.2. Satz. *Sei ω_0 eine holomorphe Differentialform vom Typ Ω_n auf dem regulären Ort von $U_C/\hat{\Gamma}_\infty$. Diese ist genau dann auf eine Desingularisierung von $U_C/\hat{\Gamma}_\infty \cup \{\infty\}$ holomorph fortsetzbar, wenn die der Form ω_0 zugeordnete Funktion $U_C \to \mathbb{C}$ eine Spitzenform ist (d.h. der nullte Entwicklungskoeffizient verschwindet).*

Entsprechende Aussagen gelten für beliebige Spitzen, denn diese kann man ja nach ∞ transformieren.

§ 4. Ein Problem von M. Eichler

Der Ring der automorphen Formen

$$A(\hat{\Gamma}) = \sum_{r=0}^{\infty} [\hat{\Gamma}, r]$$

ist eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra. Man kann daher eine natürliche Zahl r_0 finden, so daß

$$A = A^{(r_0)}(\hat{\Gamma}) = \sum_{r=0}^{\infty} [\hat{\Gamma}, r\, r_0]$$

von den Formen vom Gewicht r_0 erzeugt wird.

Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz existieren algebraisch unabhängige Formen

$$f_0, \ldots, f_n \in [\hat{\Gamma}, r_0],$$

so daß A endlicher Modul über dem Polynomring

$$A_0 = \mathbb{C}[f_0, \ldots, f_n]$$

ist. Eichler hat die Frage aufgeworfen, ob A ein freier A_0-Modul ist.

Es gibt ein lokales Analogon zu dem Problem von Eichler. Sei R ein lokaler Noetherscher Ring und $R_0 \subset R$ ein regulärer Unterring, so daß R endlicher R_0-Modul ist. Man kann sich fragen, wann dieser Modul frei ist. Dies hängt von der Tiefe von R ab. Die Tiefe von R ist die größte Zahl k, so daß eine Nichtnullteilerkette $a_1, \ldots, a_k$ aus dem maximalen Ideal von R existiert, d.h.

$$a_j \text{ ist Nichtnullteiler in } R/(a_1, \ldots, a_{j-1}) \, (1 \leqq j \leqq k).$$

Wir stellen kurz einige Eigenschaften der Tiefe zusammen. Einzelheiten findet man in [10].

Es gilt stets

$$\text{Tiefe}(R) \leqq (\text{Krullsche}) \dim R.$$

Ist R normal, so gilt

$$\text{Tiefe}(R) \geqq \min\{\dim R, 2\}.$$

Die Cohen-Macaulayringe sind dadurch gekennzeichnet, daß Tiefe und Dimension übereinstimmen. Jeder normale Ring der Dimension $\leqq 2$ ist ein Cohen-Macaulayring.

Es sei jetzt wieder R endlicher Modul über dem regulären Unterring R_0. Dann ist R dann und nur dann Cohen-Macaulayring, wenn R ein freier R_0-Modul ist. Wir bemerken noch, daß Tiefe und Krullsche Dimension sich beim Komplettieren nicht verändern. Es ist insbesondere gleichgültig, ob man die Tiefe eines Rings algebraisch oder analytisch berechnet.

4.1. Lemma. *Der Ring $A = A^{(r_0)}(\hat{\Gamma})$ ist bei geeignetem r_0 dann und nur dann freier A_0-Modul, wenn X eine Cohen-Macaulaymannigfaltigkeit ist. Dies ist der Fall, wenn $n \leqq 2$ gilt, oder wenn $H^n/\hat{\Gamma}$ kompakt ist.*

Dabei heißt X Cohen-Macaulaymannigfaltigkeit, wenn alle lokalen Ringe Cohen-Macaulayringe sind.

Beweis. Zunächst ist klar, daß aus der globalen die lokale Freiheit folgt. Umgekehrt entnimmt man der Arbeit von Serre [11] folgendes Resultat:

Sei X eine Cohen-Macaulaymannigfaltigkeit. Der Ring A ist bei geeigneter Wahl von r_0 genau dann ein freier A_0-Modul, wenn

$$H^\nu(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad \text{für } \nu \neq 0, n$$

gilt.

Tatsächlich wissen wir

$$H^\nu(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n,$$

wobei $\pi: \tilde{X} \to X$ eine Desingularisierung sei. Aufgrund der Hodgetheorie gilt

$$\dim H^\nu(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = g_\nu(\tilde{X})$$

und diese Zahlen verschwinden für $\nu \neq 0, n$ nach 2.1.

4.2. Hilfssatz. *Es sei $\pi: \tilde{X} \to X$ eine Desingularisierung der normalen und projektiven Cohen-Macaulaymannigfaltigkeit X. Wenn die Gruppen $H^\nu(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ für $\nu \neq 0, n$ verschwinden, so trifft dies auch für $H^\nu(X, \mathcal{O}_X)$ zu.*

Dies ist äquivalent mit dem Verschwinden von $R^\nu \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ für $1 \leqq \nu \leqq n-2$ (Leraysche Spektalsequenz).

Nach einem Satz von Grauert und Riemenschneider [4] verschwinden die höheren direkten Bilder der kanonischen Garbe

$$R^\nu \pi_* \mathcal{K}_{\tilde{X}} = 0 \qquad \text{für } \nu > 0.$$

Nach dem Serreschen Dualitätssatz gilt

$$H^\nu(\tilde{X}, \mathcal{K}_{\tilde{X}}) = H^{n-\nu}(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n$$

und daher

$$H^\nu(X, \pi_* \mathcal{K}_{\tilde{X}}) = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n.$$

Die Garbe $\pi_* \mathcal{K}_{\tilde{X}}$ unterscheidet sich höchstens in den endlich vielen Spitzen von der kanonischen Garbe $\mathcal{K}_X$. Es gilt daher auch

$$H^\nu(X, \mathcal{K}_X) = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n.$$

Die Serresche kanonische Garbe $\mathcal{K}_X$ kann man bekanntlich wie folgt definieren

$$\mathcal{K}_X(U) = \Omega_n(U_0); \qquad U_0 = \text{regulärer Ort von } U.$$

Wenn U nur Quotientensingularitäten enthält, so gilt [3]

$$\mathcal{K}_X(U) = (\pi_* \mathcal{K}_{\tilde{X}})(U).$$

Nach Voraussetzung ist X Cohen-Macaulaymannigfaltigkeit. Daher gilt auf X vollständige Dualität, also

$$H^\nu(X, \mathcal{O}_X) = H^{n-\nu}(X, \mathcal{K}_X)^* = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n.$$

Zum Beweis von 4.1 ist jetzt nur noch zu zeigen, daß die lokalen Ringe in den Punkten von H^n/Γ Cohen-Macaulayringe sind. Etwas allgemeiner gilt:

4.3. Hilfssatz. *Sei R_0 ein normaler lokaler Ring und $R_0 \subset R$ eine endliche Erweiterung mit folgenden Eigenschaften:*

a) *R ist ein normaler nullteilerfreier Cohen-Macaulayring.*

b) *Der Grad $[\mathbb{Q}(R):\mathbb{Q}(R_0)]$ der Quotientenkörper ist Einheit in R_0. Dann ist R_0 Cohen-Macaulayring.*

Beweis. Es existiert eine R_0-lineare Spurabbildung

$$\mathrm{Sp}\colon\ R \to R_0,$$

die auf R_0 als Identität wirkt. Daher gilt

$$R \cong R_0 \oplus \mathrm{Kern}(\mathrm{Sp}) \qquad (R_0\text{-lineare Isomorphie}).$$

Bevor wir die Tiefe der Spitzen berechnen, schließen wir noch einige Bemerkungen an.

4.4. Satz. *Sei κ eine Spitze von $\hat{\Gamma}$. Es gibt im Falle $n \geqq 2$ genau dann eine Form $f \in [\hat{\Gamma}, 1]$, die in κ nicht, aber in allen anderen zu κ inäquivalenten Spitzen erschwindet, wenn gilt:*

$$\hat{\Gamma}_\kappa \subset G^n \cdot A_n, \qquad A_n \text{ alternierende Gruppe}.$$

Dieser Satz wird üblicherweise durch analytische Fortsetzung von Eisensteinreihen bewiesen. Es ist wohl nicht ohne Interesse, daß er auch über unsere kohomologischen Untersuchungen gewonnen werden kann.

Beweis von 4.4. Aus der Sequenz

$$0 \to \pi_* \mathscr{K}_{\tilde{X}} \to \mathscr{K}_X \to \mathscr{M} \to 0 \qquad (\mathscr{M} = \mathscr{K}_X/\pi_* \mathscr{K}_{\tilde{X}})$$

resultiert die kurze exakte Sequenz

$$0 \to [\Gamma, 1]_0 \to [\Gamma, 1] \to H^0(X, M) \to 0.$$

Die Garbe M ist auf die Spitzen konzentriert, es gilt daher

$$H^0(X, M) = \bigoplus_{[\kappa]} M_{[\kappa]}.$$

Die Frage lautet also: Wann ist $M_{[\kappa]} \neq 0$? Dabei können wir $\kappa = \infty$ voraussetzen. Wann gibt es eine holomorphe $\hat{\Gamma}_\infty$-invariante Differentialform

$$f\,dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \qquad \text{in } U_C = \{z \in H^n;\ Ny > C\},$$

so daß f in ∞ nicht verschwindet? Liegt $\hat{\Gamma}_\infty$ schon in $G^n \cdot A_n$, so kann man $f = 1$ wählen. Andernfalls existiert keine solche Form.

Man kann jeder n-dimensionalen isolierten Singularität (X, s) ein gewisses $(n-1)$-Tupel $(r_1, \ldots, r_{n-1})$ von nicht negativen ganzen Zahlen zuordnen. Dazu betrachte man eine Auflösung der Singularität

$$\pi\colon\ \tilde{X} \to X$$

und definiere

$$r_\nu = r_\nu(s) = \dim (R^\nu \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_s.$$

Wir nennen das $(n-1)$-Tupel $(r_1, \ldots, r_{n-1})$ den Typ der Singularität.

4.5. Bemerkung. *Sei κ eine Spitze der Gruppe $\hat{\Gamma}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) *$\mathcal{O}_{X,[\kappa]}$ ist ein Cohen-Macaulayring.*

ii) *Der Typ der Spitze κ ist entweder* $(0, \ldots, 0, 1)$ *oder* $(0, \ldots, 0)$, *je nachdem ob $\hat{\Gamma}_\kappa$ in $G^n \cdot A_n$ enthalten ist oder nicht.*

Im Falle $n=2$, wo ja i) erfüllt ist, liegt also genau dann eine rationale Singularität vor, wenn diese in einer eindimensionalen Fixpunkt-Mannigfaltigkeit ist.

Wir werden in §6 sehen, daß im Fall $n>2$ noch die Typen

$$(0,1)\,(n=3) \quad \text{und} \quad (0,0,1)\,(n=4)$$

durch geeignete Wahl von $\hat{\Gamma}$ zu realisieren sind. Im Falle $n>4$ ist jedoch $\mathcal{O}_{X,[\kappa]}$ nie Cohen-Macaulayring, wie sich herausstellen wird.

§ 5. Die lokalen Kohomologiegruppen

Will man die Kohomologie von $\mathcal{O}_X$ oder allgemeiner der Potenzen von $\mathcal{K}_X$ für $X = \overline{H^n/\hat{\Gamma}}$ berechnen, so benötigt man die lokalen Kohomologiegruppen

$$H_{\{x\}}(X, \mathcal{O}_X),$$

wobei x eine Spitze sei.

Wir stellen zunächst einige Resultate über diese Kohomologiegruppen zusammen (s. [5, 13]).

Dabei sei X ein algebraischer oder ein analytischer Raum der Dimension $n>0$. Ist U eine offene Umgebung von x, so gilt

$$H_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) = H_{\{x\}}(X, \mathcal{O}_X).$$

Wir setzen voraus, daß eine Umgebung U existiert, so daß $U - \{x\}$ Cohen-Macaulaymannigfaltigkeit ist.

Dann gilt im analytischen wie im algebraischen Fall

1) Die Gruppen

$$H^\nu_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) \qquad \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n-1$$

sind Moduln endlicher Länge über $\mathcal{O}_{X,x}$.

2) Für $\nu > n$ verschwinden diese Gruppen.

3) Im Falle $\nu = n$ haben diese Moduln unendliche Länge.

4) Ist X eine algebraische Mannigfaltigkeit über $\mathbb{C}$, so ist es gleichgültig, ob man

$$\dim_{\mathbb{C}} H^\nu_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) \qquad \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n-1$$

algebraisch oder analytisch ausrechnet.

5) Im algebraischen Fall gilt

$$H^{\nu}_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) = \varinjlim \operatorname{Ext}^{\nu}_R (R/m^{\nu}, R).$$

Dabei ist $R = \mathcal{O}_{X,x}$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(R)$ das maximale Ideal von R. Außerdem hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to H^0_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) \to H^0(U, \mathcal{O}_X) \to H^0(U - \{x\}, \mathcal{O}_X) \to H^1_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) \to \cdots$$

Wenn X im Punkt x normal ist, was von nun an verausgesetzt sei und wenn U eine affine bzw. Steinsche Umgebung von $\{x\}$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} &H^{\nu}_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) = 0 && \text{für } \nu = 0, 1, \\ &H^{\nu}_{\{x\}}(U, \mathcal{O}_X) = H^{\nu-1}(U - \{x\}, \mathcal{O}_X) && \text{für } \nu > 1. \end{aligned}$$

Im Falle $X = \overline{H^n/\hat{\Gamma}}$, x Spitze von $\hat{\Gamma}$, wollen wir nun die lokalen Kohomologiegruppen berechnen. Dazu benötigen wir eine Steinsche Umgebung von $\{x\}$. Man kann dabei $x = [\infty]$ annehmen.

5.1. Hilfssatz. *Der analytische Raum*

$$H^n/\hat{\Gamma}_{\infty} \cup [\infty]$$

ist Steinsch.

Beweis. Man hat eine plurisubharmonische Funktion auf $H^n/\hat{\Gamma}_{\infty}$, die sich auf $H^n/\hat{\Gamma}_{\infty} \cup \{\infty\}$ stetig fortsetzen läßt

$$f(z) = (y_1 \dots y_n)^{-1}.$$

(Zur Theorie der plurisubharmonischen Funktionen siehe [1].) Es gilt also

$$H^{\nu}_{\{\infty\}}(X, \mathcal{O}_X) = H^{\nu-1}(H^n/\hat{\Gamma}_{\infty}, \mathcal{O}) \quad \text{für } 2 \leqq \nu \leqq n-1 \ (\mathcal{O} \text{ Strukturgarbe})$$

und dies sind endlich dimensionale Vektorräume.

Die Berechnung der Kohomologie von $H^n/\hat{\Gamma}_{\infty}$ kann in ein Problem der Gruppenkohomologie verwandelt werden.

5.2. Lemma. *Sei G eine Gruppe, welche auf dem topologischen Raum X diskontinuierlich und treu operiert. Sei weiterhin $\mathcal{M}$ eine Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen auf X zusammen mit einer Familie von verträglichen Abbildungen*

$$\mathcal{M} \to g_* \mathcal{M} \quad \text{für } g \in G.$$

Dabei seien folgende Bedingungen erfüllt:

1) $H^{\nu}(X, \mathcal{M}) = 0$ *für* $\nu > 0$.

2) $R^{\nu} p_* \mathcal{M} = 0$ *für* $\nu > 0$ ($p \colon X \to X/G$ *kanonische Projektion*).

Dann hat man eine natürliche Isomorphie

$$H^\nu(X/G, (p_* \mathcal{M})^G) = H^\nu(G, H^0(X, \mathcal{M})).$$

(Die Gruppe G operiert auf $p_* \mathcal{M}$, so daß man die Invariantengarbe $(p_* \mathcal{M})^G$ bilden kann.)

Beweis. Eine Garbe $\mathcal{M}$ von $\mathbb{C}$-Vektorräumen, auf der man eine Familie von $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $\mathcal{M} \to g_* \mathcal{M}$ hat, die den üblichen Eigenschaften einer Gruppenoperation genügt, nennen wir kurz eine $\mathbb{C}-G$-Garbe. Eine solche Garbe kann man durch einen Komplex $\mathcal{M}^0$ von welken $\mathbb{C}-G$-Garben auflösen

$$0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}^\bullet.$$

Man kann etwa die kanonische welke Auflösung nehmen. Die Komplexabbildungen dabei sind $\mathbb{C}-G$-linear.

Da die Garbe $\mathcal{M}$ azyklisch bezüglich des Funktors p_* ist, hat man in

$$0 \to p_*(\mathcal{M}) \to p_*(\mathcal{M}^\bullet)$$

eine welke Auflösung von $p_*(\mathcal{M})$ durch Garben, auf denen G operiert. Es ist nun leicht zu sehen, daß auch

$$0 \to (p_*(\mathcal{M}))^G \to (p_*(\mathcal{M}^\bullet))^G$$

eine Auflösung ist. Dies ist eine lokale Frage. Wegen der Diskontinuität[2] kann man daher annehmen, daß G eine endliche Gruppe ist. Die Kohomologie einer endlichen Gruppe, die auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen operiert, verschwindet aber, da man durch die Gruppenordnung teilen kann.

Tatsächlich ist diese Auflösung welk, wie man mit Hilfe der Formel

$$p_*(\mathcal{F})^G | p(U) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G_x]} \quad (\mathbb{C}[G_x], (p|U)_*(\mathcal{F}|U))$$

zeigt. Dabei ist

a) $\mathcal{F}$ eine $\mathbb{C}-G$-Garbe auf X,

b) $x \in X$ ein beliebiger Punkt,

c) U eine offene Umgebung von x, die bei dem endlichen Stabilisator von x stabil ist und die Eigenschaft

$$\overline{U} \cap g\overline{U} \neq \emptyset \Rightarrow g \in G_x$$

hat,

d) $\mathbb{C}[G_x]$ der Gruppenring von G_x.

[2] Diskontinuierlich bedeute in diesem Zusammenhang: Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist der Stabilisator G_x endlich. Außerdem existiert eine G_x-stabile offene Umgebung U von x, so daß gilt

$$\overline{U} \cap g\overline{U} \neq \emptyset \Rightarrow g \in G_x.$$

(Die ihm zugeordnete konstante Garbe auf X/G wird ebenfalls mit $\mathbb{C}[G_x]$ bezeichnet.)

Mit Hilfe der konstruierten welken Auflösung kann man die Kohomologie von $(p_*\mathcal{M})^G$ ausrechnen.

$$\begin{aligned} H^\bullet(X/G,(p_*\mathcal{M})^G) &= \text{Kohomologie von } H^0(X/G,(p_*\mathcal{M}^\bullet)^G) \\ &= \text{Kohomologie von } H^0(X,\mathcal{M}^\bullet)^G. \end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir die Gruppenkohomologie über die Auflösung

$$0 \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}^\bullet$$

Da die Garbe $\mathcal{M}$ nach Voraussetzung azyklisch in bezug auf den Schnittfunktor ist, hat man in

$$0 \to H^0(X,\mathcal{M}) \to H^0(X,\mathcal{M}^\bullet)$$

eine Auflösung durch G-Moduln.

Alles ist bewiesen, wenn man weiß, daß die Garben des Komplexes $H^0(X,\mathcal{M}^\bullet)$ azyklische G-Moduln sind, denn dann gilt

$$H^\bullet(G,H^0(X,\mathcal{M})) = \text{Kohomologie von } H^0(X,\mathcal{M}^\bullet)^G$$

Es sei also $\mathcal{F}$ eine welke $\mathbb{C}-G$-Garbe auf X. Wir müssen zeigen, daß $H^0(X,\mathcal{F})$ ein azyklischer G-Modul ist.

Dazu konstruieren wir eine geeignete injektive Auflösung von $p_*\mathcal{F}$, und zwar findet man eine Auflösung der Art

$$0 \to p_*\mathcal{F} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G],\mathcal{I}^0) \to \cdots,$$

wobei die Garben $\mathcal{I}^\nu$ injektive $\mathbb{C}$-Garben sind. Hieraus erhält man eine Auflösung

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G], H^0(X/G,\mathcal{I}^0)) \to \cdots$$

durch induzierte G-Moduln. Diese sind insbesondere azyklisch bezüglich G. Man kann mit dieser Auflösung daher die Gruppenkohomologie von $H^0(X,\mathcal{F})$ berechnen. Unsere Behauptung besagt nichts anderes, als daß dieser Komplex nach Invariantenbildung

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F})^G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G], H^0(X/G,\mathcal{I}^0))^G \to \cdots$$

exakt bleibt. Zunächst ist

$$0 \to (p_*\mathcal{F})^G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G],\mathcal{I}^0)^G \to \cdots$$

eine Auflösung von $(p_*\mathcal{F})^G$ durch injektive Garben. Da die Garbe $(p_*\mathcal{F})^G$ welk ist, bleibt dieser Komplex nach Anwendung des Schnittfunktors exakt, d.h. die Sequenz

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F})^G \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G], H^0(X/G, \mathscr{I}^0))^G$$

ist tatsächlich exakt.

Wir wenden nun Lemma 5.2 an auf

$$(H^n/\mathfrak{t}, \mathcal{O}) \quad \text{anstelle von } (X, \mathscr{M})$$

und

$$\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t} \quad \text{anstelle von } G.$$

Dabei ist $\mathfrak{t}$ das Gitter der Translationen in Γ.

5.3. Satz. *Sei M der Modul der holomorphen periodischen Funktionen auf H^n*

$$M = \{f\colon H^n \to \mathbb{C} \text{ holomorph}; \quad f(z+\alpha) = f(z) \quad \text{für } \alpha \in \mathfrak{t}\}.$$

Es gilt

$$H^\nu_{\{\infty\}}(X, \mathcal{O}_X) = H^{\nu-1}(\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t}, M) \quad \text{für } 2 \leqq \nu \leqq n-1.$$

Diese Vektorräume sind endlich dimensional.

§ 6. Berechnung von $H^\nu(\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t}, M)$

Es sei an die Bezeichnungen

$$M = \{f\colon H^n \to \mathbb{C} \text{ holomorph und periodisch bei } \mathfrak{t}\},$$

$$\mathfrak{t} = \text{Gitter der Translationen in } \hat{\Gamma}_\infty.$$

erinnert.

6.1. Satz. *Es gilt*

$$H^\nu(\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t}, M) = H^\nu(\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t}, \mathbb{C}) \quad \text{für } 0 < \nu < n-1.$$

(Der Isomorphismus wird durch die natürliche Einbettung $\mathbb{C} \subset M$ induziert, $\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t}$ operiert trivial auf $\mathbb{C}$.)

Beweis. Eine Funktion $f \in M$ gestattet eine Entwicklung in eine Fourierreihe

$$f(z) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{t}^0} a_\gamma e(\gamma z) \quad \text{mit } e(\ldots) = e^{2\pi i S(\ldots)}.$$

Sei

$$M^0 = \{f \in M, a_0 = 0\}.$$

Der Modul M zerfällt in $M = \mathbb{C} \oplus M^0$. In Satz 6.1 wird daher nichts anderes als

$$H^\nu(\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t}, M^0) = 0 \quad \text{für } 0 < \nu < n-1$$

behauptet. Dabei kann man sich sogar auf den Fall

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \subset G^n$$

beschränken, denn es gilt

6.2. Hilfssatz. *Sei G eine Gruppe, die auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V operiert und sei G_0 ein Normalteiler von endlichem Index in G. Dann gilt*

$$H^\nu(G, V) = H^\nu(G_0, V)^{G/G_0}.$$

Beweis. Die Kohomologie von endlichen Gruppen auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen verschwindet. Die Hochschild-Serre-Sequenz degeneriert daher.

Wenn $\hat{\Gamma} = \Gamma$ in G^n enthalten ist, was wir aufgrund von Hilfssatz 6.2 annehmen können, so ist $\hat{\Gamma}_\infty/\mathfrak{t}$ eine freie Abelsche Gruppe vom Rang $n-1$, die von Substitutionen

$$g_\nu(z) = \varepsilon_\nu z + \alpha_\nu \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)$$

erzeugt wird. Die Elemente von M^0 sind konvergente Fourierreihen

$$f(z) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{t}^0} a_\gamma e(\gamma z) \qquad \text{mit } a_0 = 0,$$

wobei die Gruppenoperation durch

$$f(\varepsilon_\nu z + \alpha_\nu) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{t}^0} b_\gamma e(\gamma z) \qquad \text{mit } b_\gamma = a_{\gamma \varepsilon_\nu^{-1}} \cdot e(\gamma \varepsilon_\nu^{-1} \alpha_\nu)$$

beschrieben wird.

Man kann gewisse invariante Untermoduln von M^0 abspalten. Einem Element $\gamma \in \mathfrak{t}^0$ ordnen wir den Untermodul

$$M_\gamma^0 = \{f \in M^0;\ f(z) = \sum_\varepsilon a_{\gamma\varepsilon} e(\gamma \varepsilon z)\}$$

zu. Dabei durchlaufe ε die Multiplikatoren zur Spitze ∞.

Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ endlich viele Elemente aus $\mathfrak{t}^0$, die bezüglich der Gruppe der Multiplikatoren paarweise inäquivalent sind, so gilt

$$M^0 = M_{\gamma_1}^0 \oplus \cdots \oplus M_{\gamma_m}^0 \oplus N,$$

wobei in N alle diejenigen Fourierreihen zusammengefaßt sind, in deren Fourierentwicklung nur solche Koeffizienten $a_\gamma \neq 0$ auftreten, deren Index γ zu keinem $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ assoziiert ist.

Dies benutzen wir im Falle

$$\gamma_r = r\gamma \qquad (1 \leqq r \leqq m),$$

wobei $\gamma \in \mathfrak{t}^0$ fest gewählt sei. Offenbar sind die Moduln $M_\gamma^0, M_{2\gamma}^0, \ldots$ paarweise isomorph. Ein mit der Gruppenoperation verträglicher Isomorphismus wird durch

$$M_\gamma^0 \to M_{r\gamma}^0; \qquad f(z) \to f(rz)$$

vermittelt. Insbesondere sind auch die Kohomologiegruppen isomorph und es folgt

$$\dim H^\nu(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, M^0) \geqq m \dim H^\nu(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, M_\gamma^0).$$

Dies gilt für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Da die Dimension auf der linken Seite für $1 \leqq \nu \leqq n-2$ endlich ist, folgt

$$H^\nu(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, M_\gamma^0) = 0 \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n-2;\ \gamma \in \mathfrak{t}^0.$$

Es soll nun auf das Verschwinden von $H^\nu(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, M^0)$ geschlossen werden. Dabei wird wesentlich ausgenutzt, daß M^0 ein Frechetraum ist, wenn man ihn mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta versieht. Die direkte Summe der Untermoduln M_γ^0 liegt dicht in M^0.

Die Gruppenkohomologie $H^\nu(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, M^0)$ kann man mit Hilfe einer geeigneten Auflösung berechnen

$$H^\nu(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, M^0) = \operatorname{Ext}_A^\nu(\mathbb{C}, M^0).$$

Dabei ist $A = \mathbb{C}[\Gamma_\infty/\mathfrak{t}]$ der Gruppenring von $\Gamma_\infty/\mathfrak{t}$.

Da diese Gruppe frei vom Rang $n-1$ ist, gilt

$$A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]_S; \qquad g_\nu \langle - \rangle X_\nu.$$

Die Nennermenge S ist die von den Variablen $X_1, \ldots, X_{n-1}$ erzeugte Halbgruppe.

Es gibt eine A-lineare Auflösung von $\mathbb{C}$ durch endliche freie A-Moduln

$$\cdots \to A^{r_1} \to A^{r_0} \to \mathbb{C} \to 0.$$

Um konkret zu sein, wählen wir etwa den Koszulkomplex zum Elementsystem $g_1, \ldots, g_{n-1}$.

Hieraus erhält man Komplexe, mit deren Hilfe man die Gruppenkohomologie von M^0 bzw. M_γ^0 berechnen kann

$$\cdots \leftarrow (M^0)^{r_1} \leftarrow (M^0)^{r_0} \leftarrow 0,$$

$$\cdots \leftarrow (M_\gamma^0)^{r_1} \leftarrow (M_\gamma^0)^{r_0} \leftarrow 0.$$

Alle Abbildungen in diesem Diagramm sind stetig. Die Kohomologie der ersten Zeile ist endlich dimensional, die der zweiten Zeile verschwindet an den uns jeweils interessierenden Stellen ($1 \leqq \nu \leqq n-2$).

Mit Hilfe einer einfachen funktionalanalytischen Schlußweise kann nun gezeigt werden, daß die interessierenden Kohomologiegruppen verschwinden müssen.

Dazu bezeichnen wir die Unterräume der Kozyklen bzw. Koränder von $(M^0)^{r_\nu}$ mit Z^ν bzw. B^ν. Die Bezeichnungen Z^ν_γ, B^ν_γ verstehen sich von selbst.

Die direkte Summe der Untermoduln $Z^\nu_\gamma \subset Z^\nu$ liegt dicht in Z^ν. In den Fällen $1 \leqq \nu \leqq n-2$ gilt $B^\nu_\gamma = Z^\nu_\gamma$. Daher ist die direkte Summe der Moduln $B^\nu_\gamma \subset B^\nu$ ein dichter Untermodul von Z^ν. Insbesondere ist B^ν dichter Untermodul von Z^ν $(1 \leqq \nu \leqq n-2)$. Es ist also alles bewiesen, wenn man weiß, daß $B^\nu \subset M_0^{r_\nu}$ ein abgeschlossener Unterraum ist.

Dies sieht man folgendermaßen. Da der Raum Z^ν/B^ν endlich dimensional ist, existiert eine lineare Abbildung eines endlich dimensionalen Vektorraums

$$V \to Z^\nu,$$

so daß die natürliche Abbildung

$$V \oplus M^{r_{\nu+1}} \to Z^\nu$$

surjektiv ist. Nach dem Banachschen Homomorphiesatz ist diese Abbildung offen, d.h. Z^ν wird mit einem Faktorraum von $V \oplus M^{r_{\nu+1}}$ identifiziert. Hieraus folgt unmittelbar, daß das Bild B^ν von $M^{r_{\nu+1}}$ in Z^ν abgeschlossen ist.

Die Kohomologie einer freien abelschen Gruppe vom Rang $n-1$ mit trivialen Koeffizienten ist bekannt. Man kann sie etwa als singuläre Kohomologie eines $(n-1)$-dimensionalen Torus interpretieren. Faßt man die gesamte Kohomologie $H^\bullet(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, \mathbb{C})$ als graduierten Ring (Cup-Produkt) auf, so gilt

$$H^\bullet(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, \mathbb{C}) = \wedge\left(\Gamma_\infty/\mathfrak{t} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}\right) \qquad \text{(äußere Algebra)}.$$

Dabei ist

$$\Gamma_\infty/\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C} = H^1(\Gamma_\infty/\mathfrak{t}, \mathbb{C})$$

ein $(n-1)$-dimensionaler Vektorraum, auf dem $\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty$ durch innere Automorphismen operiert. Diese Gruppe operiert dann auch in natürlicher Weise auf der äußeren Algebra.

Man kann die Operation von $\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty$ auf $\Gamma_\infty/\mathfrak{t}$ noch etwas anders beschreiben.

Die Gruppe Λ der Multiplikatoren und $\Gamma_\infty/\mathfrak{t}$ können wir vermöge

$$\Gamma_\infty/\mathfrak{t} \to \Lambda; \qquad (z \to \varepsilon z + \alpha) \to \varepsilon$$

identifizieren. Außerdem läßt sich $\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty$ in die symmetrische Gruppe S_n einbetten

$$\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty = G_0 \subset S_n.$$

Diese operiert durch Permutation der Variablen auf dem $\mathbb{R}^n$ und läßt dabei Λ invariant.

Die beiden Moduln

$$(\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty, \Gamma_\infty/\mathrm{t}) \quad \text{und} \quad (G_0, \Lambda)$$

sind isomorph.

Da die Gruppe der Multiplikatoren Λ auf einem Gitter operiert, existiert ein total reeller Zahlkörper L, so daß Λ mit einer Untergruppe von endlichem Index der Einheitengruppe von L identifiziert werden kann. Die Permutationsgruppe G_0 kann man als Untergruppe der Automorphismengruppe $G(L/\mathbb{Q})$ auffassen.

Fassen wir noch einmal zusammen.

6.3. Lemma. *Der Spitze ∞ von $\hat{\Gamma}$ ist auf natürliche Weise zugeordnet:*

a) *ein total reeller Zahlkörper vom Grad n*

b) *eine Untergruppe Λ von endlichem Index in der Einheitengruppe von L*

c) *eine Untergruppe $G_0 \subset G(L/\mathbb{Q})$, welche Λ in sich überführt. Hierbei gilt*

$$H^\bullet(\hat{\Gamma}_\infty/\mathrm{t}, \mathbb{C}) \cong [\wedge(\Lambda \otimes \mathbb{C})]^{G_0}.$$

Die Operation von G_0 auf $\Lambda \otimes \mathbb{C}$ läßt sich mit Hilfe der regulären Darstellung von G_0 beschreiben. Da uns hauptsächlich der Fall $G_0 = \{e\}$ interessiert, wird dies nur kurz erläutert.

6.4. Hilfssatz. *Die beiden G_0-Moduln*

$$\Lambda \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad L/\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R}$$

sind isomorph.

Die Gruppe G_0 operiert auf $L \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R}$ und auf der Gruppe der total positiven Elemente von $L \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R}$. Mit Hilfe einer Logarithmusabbildung zeigt man, daß diese beiden Operationen äquivalent sind.

Sei $\mathbb{C}[G_0]$ der Gruppenring von G_0 und $I(G_0)$ der Kern der kanonischen Abbildung von $\mathbb{C}[G_0]$ in den trivialen G_0-Modul $\mathbb{C}$

$$0 \to I(G_0) \to \mathbb{C}[G_0] \to \mathbb{C} \to 0.$$

Da G_0 auf $L \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$ als Gruppe von fixpunktfreien Permutationen operiert, gilt

$$L \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{C} = \mathbb{C}[G_0]^m = \overbrace{\mathbb{C}[G_0] \times \cdots \times \mathbb{C}[G_0]}^{m\text{-fach}}.$$

Dabei ist

$$\frac{n}{m} = \text{Ordnung}\,(G).$$

Wir erhalten schließlich

6.5. Hilfssatz. *Die Kohomologiegruppen $H^\bullet(\hat{\Gamma}_\infty/t, \mathbb{C})$ hängen nur ab von der Zahl n und der abstrakten Gruppe $\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty$ und zwar gilt*

$$H^\bullet(\hat{\Gamma}_\infty/t, \mathbb{C}) = [\wedge(I(\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty)^m \oplus \mathbb{C}^{m-1})]^{\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty}$$

Dabei operiert $\hat{\Gamma}_\infty/\Gamma_\infty$ auf $\mathbb{C}^{m-1}$ trivial.

Der lokale Ring in der Spitze ∞ ist, wie wir wissen, genau dann ein Cohen-Macaulayring, wenn obige Kohomologiegruppen für $1 \leqq \nu \leqq n-2$ verschwinden. Ohne Beweis sei mitgeteilt:

6.6. Bemerkung. *Sei κ eine Spitze von $\hat{\Gamma}$. Der Ring $\mathcal{O}_{X,[\kappa]}$ ist dann und nur dann ein Cohen-Macaulayring, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

a) $n \leqq 2$,

b) $n = 3$ *und* Ord. $(\hat{\Gamma}_\kappa/\Gamma_\kappa) = 3$,

c) $n = 4$ *und* $\hat{\Gamma}_\kappa/\Gamma_\kappa \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Tatsächlich handelt es sich in den Fällen b) und c) um Gorensteinringe. Im Falle $n > 4$ ist X nie eine Cohen-Macaulaymannigfaltigkeit.

§ 7. Die Berechnung von $H^\bullet(X, \mathcal{K}_X^r)$ und eine Formel für das arithmetische Geschlecht von $K(\Gamma)$

Im folgenden sei $X = \overline{H^n/\hat{\Gamma}}, n > 1$.

Zur Berechnung von $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$ benutzen wir die allgemeine Dualitätstheorie von Grothendieck [6], die, soweit sie benötigt wird, hier kurz dargestellt werden soll. Es existiert ein gewisser Komplex $\mathcal{K}_X^\bullet$ von kohärenten Garben auf X, der sogenannte kanonische Komplex, so daß die Formel

$$H^\nu(X, \mathcal{L}) \cong H^{n-\nu}(X, \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{K}_X^\bullet) \qquad \text{für Geradenbündel } \mathcal{L}$$

gilt.

Die Kohomologie $H^\nu(X, \mathcal{M}^\bullet)$ eines (nach unten beschränkten) Komplexes von Garben $\mathcal{M}^\bullet$ ist dabei zu interpretieren im Sinne der Hyperkohomologie. Man wähle einen Quasiisomorphismus $\mathcal{M}^\bullet \to \mathcal{L}^\bullet$ von $\mathcal{M}^\bullet$ in einen Komplex von injektiven Garben. Dann ist $H^\nu(X, \mathcal{M}^\bullet)$ die ν-te Kohomologiegruppe des Komplexes $(H^0(X, \mathcal{L}^r))_{r \in \mathbb{Z}}$.

Der kanonische Komplex $\mathcal{K}_X^\bullet$ läßt sich so konstruieren, daß

$$\mathcal{K}_X^r = 0 \qquad \text{für } r < 0$$

gilt. Ein Vergleich mit der Serreschen Dualitätstheorie ergibt

$$\mathcal{K}_X = \text{nullte Kohomologiegarbe von } \mathcal{K}_X^\bullet.$$

Dabei ist $\mathscr{K}_X$ die kanonische Garbe von Serre. Diese kann man auch als einen Komplex auffassen, der an allen von Null verschiedenen Stellen verschwindet. Man hat eine natürliche Abbildung von Komplexen $\mathscr{K}_X \to \mathscr{K}_X^\bullet$, die einen Isomorphismus in der 0-ten Kohomologie induziert. Der Komplex $\mathscr{M}^\bullet$ werde durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathscr{K}_X \to \mathscr{K}_X^\bullet \to \mathscr{M}^\bullet \to 0$$

definiert.

Berücksichtigt man

$$H^\nu(X, \mathscr{K}_X) = 0 \qquad \text{für } \nu \neq 0, n \text{ (s. § 4)},$$

so folgt mit Hilfe der zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenz

$$H^\nu(X, \mathcal{O}_X) \cong H^{n-\nu}(X, \mathscr{K}_X^\bullet) \cong H^{n-\nu}(X, \mathscr{M}^\bullet) \qquad \text{für } 2 \leqq \nu \leqq n-1.$$

Diese Kohomologiegruppen lassen sich nun durch Vergleich mit der lokalen Dualitätstheorie berechnen und zwar gilt

$$\begin{aligned} H^\nu_{\{x\}}(X, \mathcal{O}_X) &= \operatorname{Ext}^{n-\nu}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathscr{K}^\bullet_{X,x})^* \\ &= H^{n-\nu}(\mathscr{K}^\bullet_{X,x})^*. \end{aligned}$$

Der Index „*" bedeutet hierbei Übergang zum dualen Modul bezüglich der Matlisdualität. Wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Cohen-Macaulayring ist, so verschwinden demnach die Kohomologiegruppen des Komplexes $\mathscr{M}_X^\bullet$. Die Kohomologiegarben von $\mathscr{M}^\bullet$ sind daher auf die endlich vielen Spitzen konzentriert. Hieraus folgt

$$H^\nu(X, \mathscr{M}^\bullet) = \bigoplus_{[\kappa]} H^\nu(\mathscr{M}^\bullet_{[\kappa]}) \qquad ([\kappa] \text{ durchläuft die Spitzenklassen}).$$

Wir erhalten schließlich

7.1. Satz. *Es gilt*

$$\dim H^\nu(X, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & \textit{für } \nu = 1 \\ \sum_{[\kappa]} \dim H^\nu_{[\kappa]}(X, \mathcal{O}_X) & \textit{für } 1 < \nu < n \\ \dim [\Gamma, 1] & \textit{für } \nu = n, \end{cases}$$

$$\dim H^\nu(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \begin{cases} 0 & \textit{für } \nu \neq 0, n \\ \dim [\Gamma, 1]_0 & \textit{für } \nu = n. \quad \text{(beachte 3.2)} \end{cases}$$

Der Beitrag der Spitze κ in dieser Formel hängt, wie in § 6 ausgeführt wurde, nur von der Zahl n und der Gruppe $\hat{\Gamma}_\kappa/\Gamma_\kappa$ ab. Im wichtigen Spezialfall $\hat{\Gamma}_\kappa = \Gamma_\kappa$ folgt aus 6.3 und 6.5

$$\dim H^\nu_{[\kappa]}(X, \mathcal{O}_X) = \binom{n-1}{\nu-1} \qquad \text{für } 1 < \nu < n.$$

Wenn die Gruppe $\hat{\Gamma}$ schon in G^n enthalten ist ($\hat{\Gamma}=\Gamma$), so erhalten wir

$$\boxed{\dim H^\nu(X,\mathcal{O}_X)=h\cdot\binom{n-1}{\nu-1}\qquad \text{für } 1<\nu<n}$$

Die Kohomologiegruppen von $\mathcal{K}_X^r$ lassen sich nun ebenfalls berechnen. Nach einer Verallgemeinerung des Verschwindungssatzes von Kodaira [4] gilt

$$H^\nu(X,\mathcal{K}_X^r)=0 \qquad \text{für } \nu>0, r>1.$$

Die Kohomologie der negativen Potenzen von $\mathcal{K}_X$ werden mit Hilfe des Dualitätssatzes berechnet. Dabei treten wieder die berechneten lokalen Kohomologiegruppen auf.

Wir berechnen abschließend das arithmetische Geschlecht von X und $\tilde{X}$.

Zunächst definieren wir noch die Invariante $g(n,G_0)$. Dabei sei G_0 eine endliche Gruppe und $n=m\cdot \mathrm{Ordnung}(G)$, m eine natürliche Zahl.

Sei W ein Vektorraum der Dimension m, auf dem G_0 trivial operiert. Spaltet man von der regulären Darstellung $\mathbb{C}[G_0]$ die triviale Darstellung $\mathbb{C}$ ab, so erhält man den Darstellungsmodul $I(G_0)$ (vgl. § 6). Die Gruppe G_0 operiert auf $V=W\oplus I(G_0)^m$ und auch auf den äußeren Potenzen von V.

$$g(n,G_0)=\sum_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{\nu+1}\dim(\wedge^\nu V)^G \qquad (=0 \text{ für } n\leqq 2).$$

Wenn die Gruppe $G_0=\{e\}$ nur aus dem neutralen Element besteht, so gilt

$$g(n,\{e\})=1-(-1)^n \qquad \text{für } n\geqq 2.$$

Das arithmetische Geschlecht von X stimmt mit dem konstanten Koeffizienten des Polynoms $P_{\hat{\Gamma}}$ überein (s. § 2)

$$P_{\hat{\Gamma}}(0)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\dim H^\nu(X,\mathcal{O}_X).$$

Die arithmetischen Geschlechter von $K(\hat{\Gamma})$ und $\tilde{X}$ stimmen überein. Als Anwendung von 7.1 erhält man daher folgende Formeln

7.2. Satz. *Im Falle $n\geqq 2$ gilt*

a) $P_{\hat{\Gamma}}(0)=1+(-1)^n\dim[\hat{\Gamma},1]+\sum_\kappa g(n,\hat{\Gamma}_\kappa/\Gamma_\kappa)$.

(*Es ist über ein Vertretersystem der Spitzen zu summieren.*)

b) $g(K(\hat{\Gamma}))=1+(-1)(\dim[\hat{\Gamma},1]-h_0)$
$=1+(-1)^n\dim[\hat{\Gamma},1]_0$

Dabei sei h_0 die Maximalzahl der inäquivalenten Spitzen κ mit $\hat{\Gamma}_\kappa\subset G^nA_n$.

Der Beweis folgt aus 4.4, 5.3, 6.1, 6.5 und 7.1.

Im Fall $\hat{\Gamma}=\Gamma$ ergibt sich insbesondere

$$\boxed{\begin{aligned} &g(K(\Gamma))=P_\Gamma(0)-h \\ &\dim[\Gamma,1]_0=\dim[\Gamma,1]-h=(-1)^n(P_\Gamma(0)-h-1). \end{aligned}}$$

Die Arbeit ist im wesentlichen das Ergebnis von zahlreichen Gesprächen, die ich mit Herrn R. Kiehl über diese Probleme führen konnte. Er hat mir freundlicherweise sein Einverständnis zur Publikation dieser Resultate gegeben. Dafür und für seine Mitarbeit möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken.

Literatur

1. Andreotti, A., Grauert, H.: Théoremes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Coc. Math. Franke **90**, 193—259 (1962).
2. Busam, R.: Eine Verallgemeinerung gewisser Dimensionsformeln von Shimizu. Inventiones math. **11**, 110—149 (1970).
3. Freitag, E.: Über die Struktur der Funktionskörper zu hyperabelschen Gruppen I. Journal für die reine und angewandte Mathematik **247**, 97—117 (1971).
4. Grauert, H., Riemenschneider, O.: Verschwindungssätze für analytische Koholomogiegruppen auf komplexen Räumen. Inventiones math. **11**, 263—292 (1970).
5. Grothendieck, A.: Local cohomologie. Lecture Notes in Mathematics **41**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
6. Hartshorne, R.: Residues and duality. Lecture Notes in Mathematics **20**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
7. Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.
8. Maaß, H.: Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. 2. Abh., 1940.
9. Matsushima, Shimura, G.: On the cohomology groups attached to certain vector valued differential forms on the product of the upper half planes. Ann. of Math. **78**, 417—449 (1963).
10. Serre, J.-P.: Algebre locale. Lecture Notes in Mathematics **11**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.
11. Serre, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. **61** (1955).
12. Shimizu, H.: On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. Ann. of Math. **77**, 33—71 (1963).
13. Trautmann, G.: Ein Endlichkeitssatz in der analytischen Geometrie. Inventiones math. **8**, 143—174 (1969).

Eberhard Freitag
Mathematisches Institut der Universität
D-6900 Heidelberg 1
Im Neuenheimer Feld 9
Deutschland

(Eingegangen am 10. April 1972)