Die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen. II

Von *E. Freitag* in Heidelberg

§ 1. Fixpunktmannigfaltigkeiten hyperabelscher Gruppen

Mit $\mathbf{H}$ werde die obere Halbebene bezeichnet und mit

(1) $$G = \mathrm{Sl}\,(2, R)/\{\pm E\}$$

die Gruppe ihrer analytischen Automorphismen.

Sei

(2) $$\hat{\Gamma} < \mathrm{Aut}\,\mathbf{H}^n = G^n \cdot S_n \; (S_n \text{ symmetrische Gruppe})$$

eine hyperabelsche Gruppe,

(3) $$\Gamma = \hat{\Gamma} \cap G^n.$$

Der Quotientenraum $\mathbf{H}^n/\hat{\Gamma}$ kann also durch Hinzufügen endlich vieler „S
kompaktifiziert werden.

Die Gruppe Γ genüge stets der folgenden Bedingung.

Sei $\gamma \in \Gamma$ eine Substitution repräsentiert durch

$$M = (M^{(1)}, \ldots, M^{(n)}) \in \mathrm{Sl}\,(2, R)^n.$$

Aus

$$M^{(j)} = \pm E \text{ für ein } j: 1 \leqq j \leqq n$$

folgt

$$\gamma = e.$$

Wenn Γ Spitzen hat, ist dies stets der Fall (s. [7]). Sei $\gamma \in \hat{\Gamma}$ ein Element end
Ordnung.

Dann ist

(4) $$\mathrm{Fix}\,(\gamma) = \{z \in \mathbf{H}^n;\; \gamma(z) = z\}$$

nicht leer.

Wir wollen diese Mannigfaltigkeit etwas genauer studieren und schreiben

$$\gamma = \tilde{M}\sigma.$$

Wir zerlegen σ in elementfremde Zyklen

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k.$$

Nach eventueller Umnumerierung der Variablen erhält man

$$\sigma_1 = (1, \ldots, \nu_1)$$
$$\sigma_2 = (\nu_1 + 1, \ldots, \nu_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sigma_k = (\nu_k + 1, \ldots, n).$$

Setzt man entsprechend

$$M_1 = (M^{(1)}, \ldots, M^{(\nu_1)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$M_k = (M^{(\nu_k+1)}, \ldots, M^{(n)}),$$

erhält man in naheliegender Schreibweise

(5) $$M\sigma = M_1\sigma_1 \times M_2\sigma_2 \times \cdots \times M_k\sigma_k$$

nd

(6) $$\operatorname{Fix}(M\sigma) = \operatorname{Fix}(M_1\sigma_1) \times \cdots \times \operatorname{Fix}(M_k\sigma_k).$$

Es genügt daher, sich auf den Zykel

$$\sigma_0 = (1, 2, \ldots, n)$$

u beschränken.

Hilfssatz 1. *Sei*

$$\gamma = M\sigma_0 \in \hat{\Gamma}$$

in Element endlicher Ordnung mit dem speziellen Zykel

$$\sigma_0 = (1, \ldots, n).$$

Venn γ mehr als einen Fixpunkt besitzt, gilt die Schließungsrelation

(7) $$M^{(1)} \cdot M^{(2)} \cdots M^{(n)} = \pm E.$$

Unter dieser Voraussetzung hat man eine biholomorphe Abbildung

(8) $$\begin{aligned} &\mathbf{H} \to \operatorname{Fix}(\gamma) \\ &z \mapsto (z_1, \ldots, z_n);\ z_j = M_j \cdots M_1\langle z\rangle \ \text{für}\ 1 \leqq j \leqq n. \end{aligned}$$

Allgemein ist daher $\operatorname{Fix}(\gamma)$ biholomorph äquivalent zu $\mathbf{H}^r$ mit einer gewissen Zahl r: $0 \leqq r \leqq n$.

Betrachtet man alle Elemente aus $\hat{\Gamma}$, die $\operatorname{Fix}(\gamma)$ in sich überführen, so erhält man nach Wahl einer solchen biholomorphen Abbildung eine diskontinuierliche Gruppe $\hat{\Gamma}^\gamma$ auf $\mathbf{H}^r$. Diese ist bis auf Konjugation in $\operatorname{Aut}(\mathbf{H}^r)$ eindeutig bestimmt. Es läßt sich zeigen, daß $\hat{\Gamma}^\gamma$ wieder hyperabelsch ist. Wir gehen hierauf nicht näher ein, da in den Anwendungen, die uns interessieren, die Gruppen $\hat{\Gamma}^\gamma$ sowieso explizit bestimmt werden müssen.

Die höher dimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten sind leicht zu klassifizieren, sofern sie in Spitzen laufen. Es gibt Fälle, in denen dies stets der Fall ist.

Hilfssatz 2. *Sei L ein reell-quadratischer Zahlkörper*

$$M = {}_+\sqrt{\omega}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix};\ \omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in L,\ \omega > 0 \ (\textit{total positiv})$$

mit

$$N\omega = 1.$$

Es gelte

$$M^{(1)}M^{(2)} = \pm E.$$

Unter einer der Bedingungen

a) $M M^* = + E$,

b) *es existiert* $\varepsilon \in L$ *mit* $N\varepsilon = -1$,

gibt es ein $\varkappa \in \bar{L} = L \cup \{\infty\}$ *mit*

$$M\langle\varkappa\rangle = \varkappa^*.$$

Beweis. Zunächst kann man b) auf a) zurückführen, indem man eventuell M

$$M_1 = {}_{+}\sqrt{\varepsilon^{-2}} \cdot \varepsilon M$$

ersetzt.

Sei also

$$M M^* = E.$$

Im Falle $\alpha, \gamma \neq 0$ wird die Gleichung $M\langle\varkappa\rangle = \varkappa^*$ durch

$$\varkappa = \frac{\alpha - N\alpha}{\alpha\gamma\omega} \tag{9}$$

gelöst.

Als Anwendung von Hilfssatz 2 erhalten wir

Satz 1. *Sei L ein reell-quadratischer Zahlkörper der Klassenzahl eins mit Pri[…] diskriminante* $p \equiv 1 \bmod 4$,

$$\Gamma = \mathrm{Sl}(2, \mathfrak{o})$$

die Hilbertsche Modulgruppe zu L und

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma \circ \sigma_0$$

ihre Symmetrisierung. Es gibt genau zwei inäquivalente eindimensionale Fixpunktm[…]faltigkeiten:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{z \in \mathbf{H}^2;\ z = z^*\}, \\ Y_2 &= \{z \in \mathbf{H}^2;\ z^* = \varepsilon_0^2 z\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dabei sei ε_0 die durch $\varepsilon^{(1)} > 1$ normierte Grundeinheit von L.

Es gilt $N\varepsilon_0 = -1$.

Die zugehörigen projizierten Gruppen sind (bei geeigneter Wahl der biholomo[…] Abbildungen $\mathbf{H} \to Y_\nu$; $\nu = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \mathrm{Sl}(2, Z), \\ \Gamma_2 &= \Gamma^*[p]. \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei sei $\Gamma^*[p]$ die von Fricke untersuchte Erweiterung vom Index zwei vo[…]

$$\Gamma^0[p] = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(2, Z),\ \beta \equiv 0 \bmod p\right\}, \tag{12}$$

nämlich

$$\Gamma^*[p] = \Gamma^0[p] \cup \Gamma^0[p]\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ \frac{-1}{\sqrt{p}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Der Index von $\Gamma^0[p]$ in der vollen Modulgruppe ist $p + 1$.

§ 2. Das arithmetische Geschlecht

In diesem Paragraphen sei

$$L = Q(\sqrt{p}),\ p \equiv 1 \bmod 4,\ \text{prim},$$

$$\text{Klassenzahl von } L = 1$$

nd

$$\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma \cdot \sigma_0,$$

die Hilbertsche Modulgruppe zu L.

Bekanntlich ist $\hat{\Gamma}$ eine maximal diskontinuierliche Gruppe [5]. Wir bezeichnen it $K(\hat{\Gamma})$ den Körper der Modulfunktionen zu $\hat{\Gamma}$ und mit $g(K(\hat{\Gamma}))$ das arithmetische eschlecht.

Ist $P_{\hat{\Gamma}}$ das Hilbertpolynom zum graduierten Ring der Modulformen, also

$$(14) \qquad P_{\hat{\Gamma}}(r) = \dim[\hat{\Gamma}, r];\ r \equiv 0 \bmod r_0,\ r \text{ groß } (r_0 \text{ geeignet}),$$

o gilt ([3], Satz 9)

$$(15) \qquad g(K(\hat{\Gamma})) = P_{\hat{\Gamma}}(0).$$

Das Polynom $P_{\hat{\Gamma}}$ wurde in [2] mit Hilfe der Selbergschen Spurformel im Falle $= 2$ nach dem Vorbild der Rangformeln von Shimizu (hyperabelsche Gruppen in G^n hne Permutationen) berechnet.

Dieser Arbeit entnimmt man folgende Formel.

Sei

$$[\hat{\Gamma}, r]^0$$

ler Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht r (ganz rational). Dann gilt für $r \geqq 2$:

$$(16) \quad \dim[\hat{\Gamma}, r]^0 = \frac{(2r-1)^2}{(4\pi)^2} v(\hat{\Gamma}) + (-1)^r \frac{2r-1}{8\pi} \sum_Z v(\hat{\Gamma}_Z) + \sum_z E_r(z, \hat{\Gamma}) + \sum_\varkappa S_r(\varkappa, \hat{\Gamma}).$$

Summiert wird dabei jeweils über ein Vertretersystem der eindimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten Z, der isolierten Fixpunkte z, der Spitzen $\varkappa$.

Die einzelnen Beiträge werden bei ihrer Auswertung näher erläutert.

Mit $\hat{\Gamma}_Z$ werde die bis auf Konjugation eindeutig bestimmte Grenzkreisgruppe bezeichnet, die man durch Projektion von $\hat{\Gamma}$ auf Z erhält (s. § 1).

Die Größen $v(\hat{\Gamma})$, $v(\hat{\Gamma}_Z)$ bezeichnen das Volumen eines Fundamentalbereichs der betreffenden Gruppen, wobei das invariante Maß wie üblich normiert sei.

$$(17) \qquad dv = \frac{dx\,dy}{Ny}.$$

Wir werten diese Formel im Falle $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_L$, L wie in Satz 1, aus.

Bekanntlich gilt

$$(18) \qquad v(\hat{\Gamma}_L) = \frac{1}{2} v(\Gamma_L) = \frac{p^{\frac{3}{2}} \xi_L(2)}{\pi^2}.$$

Man hat nach Satz 1 zwei Fixpunktmannigfaltigkeiten der Kodimension berücksichtigen und erhält für die dazugehörigen Grenzkreisgruppen Γ_1, Γ_2 die

$$v(\Gamma_1) = \frac{\pi}{3}, \Gamma_1 = \text{elliptische Modulgruppe}, \tag{19}$$

$$v(\Gamma_2) = \frac{p+1}{6}\pi, \Gamma_2 = \Gamma^*[p].$$

Als nächstes bestimmen wir den Beitrag der Spitze ∞.

$$S_r(\infty, \hat{\Gamma}) = S_r(\infty, \Gamma) + (-1)^r \frac{I(\lambda_0) + I(\lambda_0 \varepsilon)}{4}. \tag{20}$$

Dabei ist $S_r(\infty, \Gamma)$ der Spitzenbeitrag der nicht symmetrisierten Gruppe unserem Falle $\Gamma = \Gamma_L$ verschwindet dieser Beitrag (s. [7]).

Bleiben noch die Indizes $I(\lambda_0)$, $I(\lambda_0 \varepsilon)$ zu berechnen. Für irgendein $\lambda > 0$ n Eigenschaft

$$\begin{pmatrix} \lambda^{\frac{1}{2}} & \lambda^{\frac{1}{2}}\alpha \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \circ \sigma_0 \in \hat{\Gamma} \quad \text{für ein } \alpha \tag{21}$$

ist $I(\lambda)$ wie folgt erklärt:

a) Wenn zu jeder Translation β ($z \mapsto z + \beta$ liegt in Γ) mit der Eigen $\beta = \lambda\beta^*$ ein α wie in (21) existiert, so daß $\beta = \alpha + \lambda\alpha^*$ gilt, so ist $I(\lambda) = 1$.

b) Wenn a) nicht erfüllt ist, so gilt $I(\lambda) = 2$.

In unserem Falle $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_L$ ist stets $I(\lambda) = 1$.

Man muß hierzu beachten, daß die Grundeinheit ε_0 von L negative Norm ha λ daher eine gerade Potenz von ε_0 ist. Hieraus folgt

$$I(\lambda) = I(1).$$

Nun ist jede ganz rationale Zahl β Spur einer ganzen Zahl $\alpha \in L$, etwa von

$$\alpha = \beta \frac{1 + \sqrt{p}}{2}$$

Damit erhalten wir

$$\dim[\hat{\Gamma}, r]^0 = \frac{p^{\frac{3}{2}} \xi_L(2)}{16\pi^4}(2r-1)^2 + (-1)^r(2r-1)\frac{p+3}{48} + \frac{(-1)^{r+1}}{2} \tag{22}$$
$$+ \text{Beitrag der isolierten Fixpunkte.}$$

Es bleibt noch der Beitrag der isolierten Fixpunkte zu bestimmen. Sei z_0 solc Fixpunkt und $\hat{\Gamma}_{z_0}$ sein Stabilisator. Sein Beitrag in der Rangformel ist

$$E_r(z_0, \hat{\Gamma}) = \sum_{\gamma \in \hat{\Gamma}_{z_0}}^{*} \frac{1}{[\hat{\Gamma}_\gamma : 1]} b_r(\gamma). \tag{23}$$

Der * bedeutet, daß über ein maximales System von Elementen $\gamma \in \hat{\Gamma}_{z_0}$ summ wird, die z_0 als isolierten Fixpunkt haben und die (in $\hat{\Gamma}_{z_0}$) nicht untereinander konju sind.

Setzt man

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad \text{und} \quad \gamma(z) = \alpha(w),$$

gilt

$$\alpha(w) = \begin{cases} \xi w \\ \text{oder } \xi w^* \end{cases}; \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

d entsprechend

$$(24) \qquad b_r(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\xi_1^r \xi_2^r}{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}; & \alpha(w) = \xi w, \\ (-1)^r \dfrac{\xi_1^r \xi_2^r}{1-\xi_1\xi_2}; & \alpha(w) = \xi w^*. \end{cases}$$

Wir setzen

$$(25) \qquad E(z_0, \hat{\Gamma}) = E_r(z_0, \hat{\Gamma}), \text{ falls } r \equiv 0 \bmod 2e.$$

Man muß sich nun einen Überblick über die isolierten Fixpunkte von $\hat{\Gamma}$ verschaffen.

Ist $\gamma = M\sigma_0 \in \hat{\Gamma}$ eine Substitution mit dem isolierten Fixpunkt z_0, so ist nach ilfssatz 1

$$\gamma^2 = \widetilde{MM^*} + e,$$

nd daher ist z_0 auch isolierter Fixpunkt von MM^*.

Jeder isolierte Fixpunkt von $\hat{\Gamma}$ ist daher schon ein isolierter Fixpunkt von Γ.

In unserem Falle $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_L$, $p > 5$, kann man leicht zeigen, daß Γ nur Fixpunkte er Ordnung zwei und drei besitzt. In [6] findet man explizite Formeln für die Anzahl ieser Fixpunkte.

Wir geben nun, ohne auf numerische Rechnungen einzugehen, eine vollständige 'abelle der möglichen Werte von $E(z_0, \hat{\Gamma})$ in den Fällen $e = 2$ und 3 an. Dabei sei $= [\Gamma_{z_0} : 1]$.

Es ist also $[\hat{\Gamma}_{z_0} : 1] = e$ oder $2e$.

I. $e = 2$

1) $\hat{\Gamma}_{z_0} = \Gamma_{z_0}$. Man erhält

$$E(z_0, \hat{\Gamma}) = \frac{1}{8}.$$

2) $\Gamma_{z_0} \neq \hat{\Gamma}_{z_0}$. Es gibt dann in $\hat{\Gamma}_{z_0}$ eine Substitution der Form

$$w \mapsto \xi w^*, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

mit $\xi_1 \cdot \xi_2 = \pm 1$.

a) $\xi_1 \cdot \xi_2 = +1$. Man erhält $E(z_0, \hat{\Gamma}) = \dfrac{1}{16}$.

b) $\xi_1 \cdot \xi_2 = -1$. Man erhält $E(z_0, \hat{\Gamma}) = \dfrac{5}{16}$.

II. $e = 3$: Die Gruppe Γ_{z_0} ist zyklisch und wird erzeugt von

$$w \mapsto \xi w, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2).$$

Dabei sind ξ_1, ξ_2 primitive dritte Einheitswurzeln und es gilt

$$\xi_1 = \xi_2 \text{ oder } \xi_1 \xi_2 = 1.$$

1) $\xi_1 = \xi_2$. Man erhält

$$E(z_0, \hat{\Gamma}) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & \text{falls } \hat{\Gamma}_{z_0} = \Gamma_{z_0} \\ \frac{2}{9}, & \text{falls } \hat{\Gamma}_{z_0} \neq \Gamma_{z_0}. \end{cases}$$

2) $\xi_1 \cdot \xi_2 = 1$.

In diesem Fall erhält man

$$E(z_0, \hat{\Gamma}) = \begin{cases} \frac{2}{9}, & \text{falls } \hat{\Gamma}_{z_0} = \Gamma_{z_0} \\ \frac{1}{9}, & \text{falls } \hat{\Gamma}_{z_0} \neq \Gamma_{z_0}. \end{cases}$$

Sämtliche Beiträge sind, wie ein Blick auf diese Tabelle zeigt, positiv.

Mit Hilfe der Formeln von A. Prestel [6] folgert man nun folgende Abschä für den Beitrag $E(p)$ der isolierten Fixpunkte

$$0 \leqq E(p) \leqq h(-p) + h(-3p).$$

Dabei wird mit $h(-p)$ bzw. $h(-3p)$ die Klassenzahl des imaginärquadratischen körpers $Q(\sqrt{-p})$ bzw. $Q(\sqrt{-3p})$ bezeichnet.

Satz 2. *Sei $p > 5$, $p \equiv 1 \bmod 4$ eine Primzahl, so daß $L = Q(\sqrt{p})$ Klass eins hat. Für das arithmetische Geschlecht $\chi(p)$ des Körpers der Modulfunktionen gilt die Formel*

$$\chi(p) = \frac{p^{\frac{3}{2}} \xi_L(2)}{16\pi^4} - \frac{p+3}{48} + \frac{1}{2} + E(p).$$

Dabei gilt

$$0 \leqq E(p) \leqq h(-p) + h(-3p).$$

Folgerungen. 1) *Es gibt eine Zahl $\delta > 0$ mit $\delta^{-1} \geqq p^{-\frac{3}{2}} \chi(p) \geqq \delta$ für alle p.*

2) *Es gilt*

$$\chi(p) > 1 \text{ für } p > 1000.$$

In diesen Fällen ist der Körper $K(\hat{\Gamma}_L)$ nicht rein transzendent.

Die Existenz solcher Primzahlen ist gesichert.

Damit hat man Beispiele maximal diskontinuierlicher Gruppen im Falle n deren Funktionenkörper nicht rational ist.

§ 3. Eine Anwendung des Satzes von Castelnuovo

Die Berechnung des arithmetischen Geschlechts von Körpern automorpher F tionen beruhte unter anderem auf der genauen Kenntnis der Rangformeln für dim [Die Herleitung dieser Formeln, sowie ihre Auswertung ist äußerst kompliziert un in Spezialfällen geglückt.

Es ist daher von Interesse, weitere Invarianten des Körpers $K(\hat{\Gamma})$ zu untersu in der Hoffnung, daß sie besser zugänglich sind.

Sei X eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension n. Im Teil I dieser A definierten wir

$$p_r = p_r(X) := \dim \mathscr{K}^r(X).$$

Dabei ist $\mathscr{K}^r(X)$ der Vektorraum der auf X holomorphen Differentialformen vom
len Typus

$$\omega = f(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)^r.$$

Beim Übergang zu einem anderen Kartensystem transformiert sich f mit der r-ten
nz der Jakobischen Determinante als Faktor.

Ist K ein algebraischer Funktionenkörper, so setzen wir

$$p_r(K) = p_r(X),$$

ei X ein singularitätenfreies Modell von K ist. Diese Definition ist in der Tat von der
l dieses Modells unabhängig. Ist K ein rationaler Funktionenkörper, so verschwinden
Invarianten

$$p_1, p_2, p_3, \ldots .$$

Wir erinnern noch einmal an den Satz von Castelnuovo:

Ein Funktionenkörper K in zwei Variablen ist genau dann rein transzendent,
n

$$g_1(K) = p_2(K) = 0$$

Hieraus gewannen wir in Teil I ein hinreichendes Kriterium für die Rationalität eines
pers von Modulfunktionen $K(\hat{\Gamma})$. Danach ist $K(\hat{\Gamma})$ rational, wenn keine Form $f \neq 0$
$[\hat{\Gamma}, 2]$ existiert, die auf der Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins ver-
windet.

Die Aussage dieses Satzes ist leer, wenn $\hat{\Gamma}$ keine solche Fixpunktmannigfaltigkeiten
itzt, zumindest wenn $\hat{\Gamma}$ Spitzen hat, dann hat man in $[\hat{\Gamma}, 2]$ die Eisensteinreihen. Doch
h in diesen Fällen kann man Kriterien für die Rationalität von $K(\hat{\Gamma})$ erhalten.

Wir gehen daher noch einmal auf den Zusammenhang zwischen

$$p_r(K(\hat{\Gamma})),\ p_r(X_0) \text{ und } \dim[\hat{\Gamma}, r]$$

Hilfssatz 3. *Die Differentialformen aus $\mathscr{K}^r(X_0)$ stehen in umkehrbar eindeutiger
ziehung zu den automorphen Formen aus $[\hat{\Gamma}, r]$, die auf den Fixpunktmannigfaltigkeiten
Kodimension eins in mindestens r-ter Ordnung verschwinden.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus folgendem

Hilfssatz 4. *Sei $f: X \to Y$ eine surjektive fasernendliche holomorphe Abbildung
ammenhängender analytischer Mannigfaltigkeiten, wobei ω eine auf Y meromorphe
fferentialform höchsten Grades vom Gewicht r und ω^* ihr Urbild auf X. Für die zuge-
rigen Divisoren (ω^*), (ω) gilt*

$$(\omega^*) = (\omega)^* + D_f.$$

ıbei ist D_f der Verzweigungsdivisor.

Den Verzweigungsdivisor definiert man am bequemsten wie folgt:

Ist $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt und $z_1, \ldots, z_n$ bzw. $w_1, \ldots, w_n$ ein Parametersystem
x_0 bzw. $f(x_0)$, so kann man die Jacobische Determinante $j_f(x)$ in einer Umgebung U_0
n x_0 definieren. Der Verzweigungsdivisor D_f ist in U_0 dann der Hauptdivisor
$_f \mid U_0 = (j_f)$.

Die angekündigte Verschärfung des Rationalitätskriteriums erhalten wir über das
udium der Spitzen.

Wir betrachten hierzu folgende Situation.

Sei $\hat{\Gamma} < G_2$ eine diskrete Untergruppe (nicht notwendig hyperabelsch) m Spitze $\varkappa$ und sei $\hat{\Gamma}_\varkappa$ der Stabilisator von $\varkappa$. Sei $U < \mathbf{H}^2$ eine unter $\hat{\Gamma}_\varkappa$ stabile offene der Form

$$U = \gamma^{-1}(U_C) \text{ für ein } \gamma \in G_2;\ \gamma(\varkappa) = \infty\ (U_C = \{z \in \mathbf{H}^2;\ N(y) > C\}).$$

Sei weiterhin eine Desingularisierung

$$\varphi : \tilde{X} \to X = U/_{\hat{\Gamma}_\varkappa} \cup [\varkappa]$$

gegeben.

Der folgende Hilfssatz stellt eine Verschärfung von I, Satz 6 im Falle $n = 2$

Hilfssatz 5. *Sei $\Gamma < G^2$ eine diskrete Untergruppe mit der Spitze $\varkappa$. Die Singul $[\varkappa]$ in $X = \mathbf{H}^{2^*}/\Gamma$ ist nicht rational.*

Beweis. Wir erinnern noch einmal daran, daß die Rationalität von $[\varkappa]$ mit Verschwinden von $(R^1\varphi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_{[\varkappa]}$ äquivalent ist.

Wäre die Singularität $[\varkappa]$ rational, so müßte die lokale Fundamentalgruppe endliche Faktorkommutatorgruppe haben (s. [1]). (Die lokale Fundamentalgruppe durch $G = \lim G_V$ definiert. Dabei durchläuft V die Umgebungen von $[\varkappa]$. Mit G_V die Fundamentalgruppe von $V - \{[\varkappa]\}$ bezeichnet.)

Eine Umgebungsbasis von $[\infty]$ hat man in den Mengen

$$\pi(U_C) \cup [\infty],\ U_C = \{z \in \mathbf{H}^n,\ Ny > C\}.$$

Die universelle Überlagerung von $\pi(U_C)$ ist U_C, die Deckbewegungsgrupp Γ_∞. Daher ist die lokale Fundamentalgruppe gerade Γ_∞.

Man überlegt sich leicht, daß die Faktorkommutatorgruppe von Γ_∞ vom Typ

$$\mathbf{Z} \oplus \text{endliche Gruppe}$$

ist.

Im Falle $\varkappa = \infty$ hat man ja den Homomorphismus

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \to \log|\varepsilon^{(1)}|.$$

Man kann die Struktur der Singularität $[\varkappa]$ noch etwas genauer angeben. Bei eigneter Wahl von $\tilde{X}$ wird die Faser über $[\varkappa]$ zusammenhängend und setzt sich aus mannschen Zahlkugeln zusammen. Diese Faser kann durch einen mit den Schnittzah bewerteten Graphen beschrieben werden. Dieser ist kein Baum wie bei rationalen Sin laritäten, wird aber nach Herausnahme eines Punktes ein Baum.

Wir benötigen nun den Serreschen Dualitätssatz für Räume mit Singularität Sei X ein n-dimensionaler projektiver algebraischer Raum. Dann existiert auf X e bis auf kanonische Isomorphe eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{K}_X$ mit der Eigenschaft:

(26)
$$H^n(X, \mathcal{M}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{K}_X)$$

für alle kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{M}$.

Wenn X normal ist, kann man $\mathcal{K}_X$ berechnen. Für $\mathcal{K}_X$ erhält man folgende D stellung:

$$\mathcal{K}_X(U) = \{\omega;\ \omega \text{ holomorphe Differentialform vom Gewicht eins auf } U_0\},$$
$$(U_0 = U - \{\text{Singularitäten in } U\}).$$

Insbesondere ist also $\Gamma\mathscr{K}_X$ der Vektorraum der Differentialformen, die auf dem gulären Ort X_0 von X holomorph sind. Hieraus folgt

$$(27) \qquad g_2(X_0) = \dim H^2\mathcal{O}_X.$$

Als Anwendung erhalten wir eine Existenzaussage über automorphe Formen vom ewicht eins.

Hilfssatz 6. *Sei $\Gamma < G^2$ eine hyperabelsche Gruppe und $\varkappa$ eine Spitze von Γ. Sei*

$$\varphi: \tilde{X} \to X = \mathbf{H}^{2^*}/\Gamma$$

ne Desingularisierung. Dann gilt:

$$(28) \qquad g_2(\tilde{X} - \varphi^{-1}([\varkappa])) = g_2(\tilde{X}) + \dim(R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_{[\varkappa]}.$$

Beweis. Wir lösen zunächst alle Singularitäten außer $[\varkappa]$ auf:

$$\psi: X^* \to X$$

nd lösen erst anschließend noch $[\varkappa]$ auf:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\psi"'] & & X^* \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Sei $X_0^* = X^* - \{[\varkappa]\}$ der reguläre Ort von X^*.

Man erhält dann

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \chi(\mathcal{O}_{X^*}) - \dim(R^1\eta_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_{[\varkappa]}.$$

Mit

$$r_{[\varkappa]} = \dim(R^1\varphi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_{[\varkappa]} = \dim(R^1\eta_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_{[\varkappa]}$$

folgt

$$-\dim H^1\mathcal{O}_{\tilde{X}} + g_2(\tilde{X}) = -\dim H^1\mathcal{O}_{X^*} + g_2(X^* - \{[\varkappa]\}) - r_{[\varkappa]}.$$

Offenbar gilt

$$g_2(X^* - \{[\varkappa]\}) = g_2(\tilde{X} - \varphi^{-1}([\varkappa])).$$

Nach I Satz 8 ist $H^1\mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$.

Hilfssatz 6 ist also äquivalent zu $H^1 0_{X^*} = 0$. Dies folgt aber aus $H^1\mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$.

Man schließt entweder mit der Lerayschen Spektralsequenz oder benutzt, daß das Verschwinden von $H^1\mathcal{O}_X$ gleichbedeutend damit ist, daß die Picardgruppe endlich erzeugt ist.

Man erhält aus Hilfssatz 6 insbesondere

$$(29) \qquad \dim[\Gamma, 1] = g_2(X_0) \geqq g_2(\tilde{X} - \varphi^{-1}([\varkappa]) \geqq r_{[\varkappa]} > 0).$$

Es ist merkwürdig, daß man die Existenz von Formen aus $[\Gamma, 1]$ auf kohomologischem Wege über das Studium der Singularitäten erhält. Mit Hilfe von Eisensteinreihen kann man eine solche Form explizit konstruieren.

Satz 3. *Sei $\hat{\Gamma} < G_2$ eine hyperabelsche Gruppe und ω eine holomorphe Differentialform auf einer Desingularisierung*

$$\tilde{X} \to X = \mathbf{H}^{2^*}/\hat{\Gamma},\ \omega \in \mathscr{K}(\tilde{X}).$$

Die der Differentialform ω assoziierte automorphe Form $f \in [\hat{\Gamma}, 1]$ ist eine Spitzen

Beweis. Wir reduzieren die Behauptung zunächst auf die Gruppe $\Gamma =$ anstelle von $\hat{\Gamma}$.

Man kann die Desingularisierungen

$$\tilde{X} \to X; \; \tilde{Y} \to Y = \mathbf{H}^{2^*}/\Gamma$$

so realisieren, daß man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X} & \longrightarrow & X \end{array}$$

hat. Mit ω ist auch das Urbild ω^* auf $\tilde{Y}$ holomorph. Wir können also $\hat{\Gamma} = \Gamma <$ nehmen. Wir wollen indirekt schließen, nehmen also an, daß f in der Spitze $[\varkappa]$ nic schwindet. Dann verschwindet auch f in einer Umgebung U der Spitze $\varkappa$ nicht. Ma annehmen, daß U unter $\Gamma_\varkappa$ invariant ist und daß $U/\Gamma_\varkappa \to \mathbf{H}^2/\Gamma$ eine Einbettung i Funktion f ist $\Gamma_\varkappa$-invariant, induziert also eine holomorphe Funktion $\tilde{f}$ auf U/I Funktion $\tilde{f}$ ist auf $U/\Gamma_\varkappa \cup [\varkappa]$ holomorph fortsetzbar (Riemannscher Hebbarkei Koecher-Prinzip) und ist dann auch als holomorphe nirgends verschwindende Fu auf die Desingularisierung

$$\check{X} = U/\Gamma_\varkappa \cup \varphi^{-1}([\varkappa]) \hookrightarrow \tilde{X}$$

fortzusetzen.

Wir zeigen nun, daß jede auf $U/\Gamma_\varkappa$ holomorphe Differentialform ω_0 vom G eins auf $\check{X}$ holomorph fortsetzbar ist. Das ist dann ein Widerspruch zu Hilfssatz 5 (beachte $U/\Gamma_\varkappa \hookrightarrow \tilde{X} - \varphi^{-1}[\varkappa]$).

Dazu stellen wir ω_0 in U durch $f_0 \cdot dz_1 \wedge dz_2$ mit der holomorphen bezügl invarianten Funktion f_0 dar, die ihrerseits wiederum eine auf $\check{X}$ holomorphe Funkt induziert. Offenbar gilt $\omega_0 = \tilde{f}^{-1}\tilde{f}_0 \cdot \omega$.

Man erhält als Anwendung wiederum ein Kriterium für die Rationalität von das wir der Einfachheit halber nur im Falle $\hat{\Gamma} = \Gamma$ formulieren.

Satz 4. *Sei $\Gamma < G^2$ eine hyperabelsche Gruppe mit Spitzen. Es gelte* dim $[\Gamma, 2]$ *Dann ist $K(\Gamma)$ rein transzendent.*

Beweis. Wenn $K(\Gamma)$ nicht rein transzendent ist, existiert eine nicht identisch schwindende Form

$$\omega \in \mathscr{K}^2(\tilde{X}) \text{ (Satz von Castelnuovo)},$$

diese kann durch eine Form

$$f \in [\Gamma, 2]$$

repräsentiert werden. Nach Voraussetzung ist f ein konstantes Vielfaches der Eisens reihe, also eine Nichtspitzenform, außerdem muß f in der Form

$$f = f_0^2, f_0 \in [\Gamma, 1] \text{ (Eisensteinreihe)}$$

rstellbar sein. Durch f_0 wird eine zunächst meromorphe Differentialform ω_0 auf $\tilde{X}$ luziert.

Wegen $\omega_0^2 = \omega$ ist diese sogar holomorph. Nach Satz 3 ist daher f_0 und damit f e Spitzenform.

Folgerung. *Sei Γ die Hilbertsche Modulgruppe zu $Q(\sqrt{5})$. Der Körper der Modul- ıktionen zu Γ ist rein transzendent.*

K. B. Gundlach hat in [4] drei Erzeugende für $K(\Gamma)$ explizit konstruiert. Es scheint ht so ohne weiteres möglich zu sein, hieraus die Rationalität von $K(\Gamma)$ abzuleiten.

§ 3. Die Invariante $p(K(\hat{\Gamma}))$

Im vorigen Paragraphen haben wir die Invarianten

$$p_r(X), r = 0, 1, 2, \ldots$$

ıer analytischen Mannigfaltigkeit eingeführt.

Ist

$$n = \dim X,$$

setzen wir

$$p(X) = \liminf_{r\to\infty} \frac{p_r(X)}{r^n}. \tag{30}$$

Wenn X kompakt ist, so ist $p(X)$ endlich, doch auch für nicht kompakte X kann (X) endlich sein.

Ist K ein algebraischer Funktionenkörper und X ein singularitätenfreies Modell ın K, so ist

$$p(K) := p(X) \tag{31}$$

ne Invariante von K, also von der Wahl von X unabhängig.

Wenn der kanonische Divisor $\mathscr{K}$ auf X „ample" ist, so ist $p(X) > 0$. Die Um- ehrung ist im allgemeinen falsch. Natürlich ist für rationale Funktionenkörper die In- ariante $p(K)$ gleich Null.

Sei nun wieder $\hat{\Gamma}$ eine hyperabelsche Gruppe auf $\mathbf{H}^n$ und

$$X = \mathbf{H}^{n*}/\hat{\Gamma},$$
$$X_0 = \text{regulärer Ort von } X,$$
$$\tilde{X} \to X \text{ eine Desingularisierung.}$$

Sei weiterhin

$$\dim [\hat{\Gamma}, r] = a(\hat{\Gamma}) r^n + O(r^{n-1}), \tag{32}$$

lso $a(\hat{\Gamma})$ der höchste Koeffizient des Hilbertpolynoms. Wie man weiß, gilt

$$a(\hat{\Gamma}_0) = n\, a(\hat{\Gamma}),$$

venn $\hat{\Gamma}_0 < \hat{\Gamma}$ eine Untergruppe vom Index n ist.

Den Formeln von Shimizu entnimmt man

$$a(\hat{\Gamma}) = \frac{1}{4\pi^2} v(\hat{\Gamma}). \tag{33}$$

vobei $v(\hat{\Gamma})$ das Volumen eines Fundamentalbereichs von $\hat{\Gamma}$ in $\mathbf{H}^n$ bezeichne.

Offenbar gilt

$$p(K(\hat{\Gamma})) \leqq p(X_0) \leqq a(\hat{\Gamma}).$$

Als nächstes soll nun $a(\hat{\Gamma}) - p(X_0)$ abgeschätzt werden. Wenn $\hat{\Gamma}$ keine Fixmannigfaltigkeiten der Kodimension eins besitzt, gilt natürlich $a(\hat{\Gamma}) = p(X_0)$.

Wir beschränken uns daher auf den Fall $n = 2$, wo solche Fixpunktmannigkeiten auftreten und wegen der Struktur der Spitzen besonderes Interesse haben.

Hilfssatz 7. *Sei $\hat{\Gamma}$ eine hyperabelsche Gruppe auf $\mathbf{H}^2$. Mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ werde ei tretersystem der Konjugationsklassen von Elementen aus $\hat{\Gamma}$ mit eindimensionalen Fix mannigfaltigkeiten bezeichnet und mit $\Gamma_\nu = \Gamma^{\gamma_\nu}$ (s. § 1) die auf die Fixpunktmanni keit Y_ν „projizierte" Gruppe. Es gilt:*

$$a(\Gamma) \geqq p(X_0) \geqq a(\Gamma) - \frac{5}{4} \sum_{\nu=1}^{t} a(\Gamma_\nu). \tag{34}$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3 gilt

$$p_r(X_0) = \dim \{f \in [\hat{\Gamma}, r],\ f \text{ verschwindet auf jedem } Y_\nu (\nu = 1, \ldots, t) \text{ in mindestens } r\text{-ter Ordnung}\}.$$

Der Beweis von Hilfssatz 7 beruht auf einem Restriktionsprozeß, der jeder $f \in [\hat{\Gamma}, \mu]$, $f \neq 0$, nicht identisch verschwindende Formen zu den Gruppen $\Gamma_1, .$ zuordnet.

Sei hierzu

$$\gamma_\nu = \tilde{M} \circ \sigma_0 \in \{\gamma_1, \ldots, \gamma_t\},\ M = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$g(z_1, z_2) = (\gamma_0^{(2)} z_2 + \delta_0^{(2)})^{-2r} f(z_1, M^{(2)} z_2),\ M = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Offenbar gilt

a) $$g(z_1, z_2) = g(z_2, z_1)$$

(36) b) $$g(L\langle z_1\rangle, L\langle z_2\rangle) = \prod_{\nu=1}^{2} (\gamma^{(\nu)} z + \delta^{(\nu)})^{2r} g(z_1, z_2)$$

für

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_\nu.$$

Dabei sei für die Definition der „projizierten" Gruppe Γ_ν (s. § 1) der Isomorphis

$$\mathbf{H} \to Y_M,\ z \to (z, M^{(2)} z),$$

zugrunde gelegt.

Man entwickle nun g in eine Reihe

$$g(z_1, z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)(z_1 - z_2)^{2\nu}. \tag{37}$$

Wenn f auf Y_M in mindestens $2\nu_0$-ter Ordnung verschwindet, d. h.

$$f_\nu = 0 \text{ für } \nu > \nu_0,$$

so ist offenbar

$$f_{\nu_0} \in [\Gamma_M, 2(r + \nu_0)]. \tag{38}$$

Man kann jetzt sukzessive die Zahl linear unabhängiger Formen $f \in [\Gamma, r]$ abschätz die auf der Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins in mindestens 2μ-ter O nung verschwinden ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$).

$$\dim \{f \in [\hat{\Gamma}, r], f \text{ verschwindet auf den eindimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten in mindestens } \mu\text{-ter Ordnung}\}$$
$$\geqq \dim [\hat{\Gamma}, r] - \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{\mu} \dim [\Gamma_i, 2(r+j)].$$

Hieraus folgt unmittelbar Hilfssatz 7.

Als nächstes soll $p(X_0) - p(K(\hat{\Gamma}))$ abgeschätzt werden.

Wir wollen dies als ein lokales Problem behandeln.

Ist X eine normale Fläche, X_0 der reguläre Ort von X, sowie $\varphi : \tilde{X} \to X$ eine Desingularisierung, so gilt offenbar

(39) $$p(\tilde{X}) \geqq p(X_0) - \sum_{s \in S} r(s), \quad (S \text{ singulärer Ort von } X),$$

mit gewissen Invarianten $r(s)$, die nur vom Typus der Singularität s abhängen. Sie sind wie folgt zu definieren:

$$r(s) = \limsup \frac{r(\mu, s)}{\mu^2}$$

mit

(40) $$r(\mu, s) = \dim \left\{ \varinjlim_{U \ni s} \mathcal{K}^{\mu}(U - S) / \mathcal{K}^{\mu}(\varphi^{-1}(U)) \right\}.$$

Dabei durchlaufe U die offenen Umgebungen von s in X.

Die Berechnung der Invariante $r(s)$ scheint im allgemeinen sehr schwierig zu sein. Für Quotientensingularitäten $(X, s) = U/H$, U analytische Mannigfaltigkeit, H endliche Gruppe, erhält man mit folgender elementarer Methode brauchbare Resultate.

Sei ω eine in einer gelochten Umgebung von s holomorphe Differentialform vom Gewicht r. Man kann die Form ω sicherlich dann über die Ausnahmefaser bei der Desingularisierung holomorph fortsetzen, wenn sie sich in der Form

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} \omega_{j1} \otimes \cdots \otimes \omega_{jr}$$

schreiben läßt, wobei die $\omega_{j\nu}$ Formen vom Gewicht eins, holomorph in einer gelochten Umgebung von s sind. Dies besagt gerade Satz 1 aus Teil I.

In der Überlagerung U ist diese Bedingung gut überschaubar. Man kann bekanntlich

$$U = C^n; \; H < U_n(C) \text{ (unitäre Gruppe)}$$

annehmen, wobei H eine spiegelungsfreie Untergruppe ist. Eine Form ω vom Gewicht r schreibt sich in U mit den natürlichen Koordinaten wie folgt:

$$\omega = f \cdot (dz_1 \wedge dz_2)^r,$$

wobei f der Transformationsformel

$$f(Az) = (\det A)^r f(z) \text{ für } A \in H$$

genügt. Die Funktion f ist (in einer Umgebung von 0) genau dann holomorph, wenn ω in einer gelochten Umgebung von s holomorph ist.

Wir wenden nun diese Methode auf einige spezielle Typen von Gruppen H an.

Hilfssatz 8. *Sei $H < U_n$*) (C) eine endliche Untergruppe von Matrizen der Determinante eins. Dann gilt*

$$r(\mu, s) = 0, \; \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad (\text{s. } 40)$$

*) Unitäre Gruppe.

Beweis. Sei $f(dz_1 \wedge dz_2)^r$ eine invariante Form vom Gewicht r, holomorph in Umgebung vom Nullpunkt. Nach Voraussetzung bedeutet die Invarianz dieser nichts anderes als die Invarianz der Funktion f,

$$f(Az) = f(z) \text{ für alle } A \in H,$$

eine Bedingung, die unabhängig von der Zahl r ist. Man erhält nun leicht eine Zerl in ein Produkt von r invarianten Formen vom Gewicht eins, nämlich

$$f(dz_1 \wedge dz_2)^r = f(dz_1 \wedge dz_2) \otimes (dz_1 \wedge dz_2) \otimes \cdots \otimes (dz_1 \wedge dz_2).$$

Sei $\gamma \in G_2$ eine Substitution mit dem Fixpunkt z_0. Die Transformation

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

liefert für γ die Normalform

$$\gamma(z) = \begin{cases} (\xi_1 w_1, \xi_2 w_2), & \text{falls } \gamma \in G^2 \\ (\eta_1 w_2, \eta_2 w_1), & \text{falls } \gamma \notin G^2. \end{cases} \tag{41}$$

Die Zahlen ξ_1, ξ_2 bzw. η_1, η_2 sind Einheitswurzeln.

Satz 5. *Sei $\hat{\Gamma}$ eine hyperabelsche Gruppe auf* $\mathbf{H}^2$ *ohne Fixpunktmannigfaltig der Dimension eins und ohne Spitzen.*

Wenn für jedes Element endlicher Ordnung $\gamma \in \hat{\Gamma}$ die Bedingung

$$\xi_1 \xi_2 = 1, \ \textit{bzw.}\ \eta_1 \eta_2 = -1 \quad (\text{s. } (41))$$

erfüllt ist, so gilt $p_r(K(\hat{\Gamma})) = \dim[\hat{\Gamma}, r]$, insbesondere also $p(K(\hat{\Gamma})) = a(\hat{\Gamma}) > 0$.

Folgerung. *Unter der Voraussetzung von Satz* 5 *ist der Körper $K(\hat{\Gamma})$ nicht rein t zendent.*

Natürlich erhält man für andere Gebiete $\mathbf{D}$ anstelle von $\mathbf{H}^2$ ähnliche Aussage

Wir geben noch eine Abschätzung für $r(s)$ bei Quotientensingularitäten abelschen Gruppen an.

Man erhält für eine solche Singularität folgende Normalgestalt.

$$(X, s) = (C^2, 0)/H$$

mit

$$H = \{z \mapsto \xi^\nu z; 0 \leqq \nu < e\}.$$

Dabei ist $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ein Paar von primitiven e-ten Einheitswurzeln.

Hilfssatz 9. *Für Singularitäten obigen Typs gilt*

$$r(s) \leqq e.$$

Eine Differentialform

$$f(z_1, z_2)\,(dz_1 \wedge dz_2)^r$$

in einer Umgebung von 0 in C^2 ist genau dann invariant, wenn

$$f(\xi z) = (\xi_1 \xi_2)^{-r} f(z)$$

gilt.

Entwickelt man f in eine Potenzreihe

$$f(z_1, z_2) = \Sigma\, a_{\nu_1 \nu_2} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2},$$

so lautet diese Bedingung

$$a_{\nu_1 \nu_2} \neq 0 \rightarrow \xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2} = (\xi_1 \xi_2)^{-r}.$$

Spezielle Formen vom Gewicht eins hat man in

$$z_1^a, z_2^b, 0 \leqq a, b < e \text{ geeignet.}$$

Für f erhält man eine Darstellung

$$f = (z_1^a)^{r-1} f_1 + (z_2^b)^{r-1} f_2 + \sum_{\nu_1, \nu_2 < er} a_{\nu_1 \nu_2} z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}$$

mit Formen f_1, f_2 vom Gewicht eins. Man braucht daher nur noch die Monome

$$z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2};\ \nu_1, \nu_2 < er$$

zu betrachten. Eine elementare Abzählung dieser Monome, die noch der Nebenbedingung

$$\xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2} = (\xi_1 \xi_2)^{-r}$$

genügen, ergibt $r(s) < e$.

Wir diskutieren abschließend noch als Beispiel die bereits untersuchte Hilbertsche Modulgruppe

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_L, L = \mathbb{Q}(\sqrt{p});\ p \text{ prim}, p \equiv 1 \bmod 4,$$

Klassenzahl $(L) = 1$.

Nach Hilfssatz 7 und Satz 1 erhalten wir mit

$$X = \mathbf{H}^{2*}/\hat{\Gamma}_L;\ X_0 = \text{regulärer Ort von } X,$$

$$0 \leqq \frac{p^{\frac{3}{2}} \xi_L(2)}{4\pi^4} - p(X_0) \leqq \frac{5p}{48} + \frac{5}{16}. \tag{42}$$

Nach dem Vorbild von Hilfssatz 8 und 9 beweist man mit Hilfe der Formeln von Prestel

$$\sum_{s \in \mathbf{H}^2/\hat{\Gamma}_L} r(s) \leqq \frac{1}{6} h(-3p) \text{ für } p > 5. \tag{43}$$

Leider stellt sich nun heraus, daß die Abschätzung von Hilfssatz 9 für $r(\infty)$ zu schlecht ist, als daß man $p(\hat{\Gamma}_L) > 0$ für große p nachweisen könnte. Allerdings ist diese Abschätzung, wie Hilfssatz 8 und auch (42) zeigt, wesentlich verbesserungsfähig. Wir begnügen uns daher mit dem vorläufigen Ergebnis, daß das asymptotische Wachstum der Zahl linear unabhängiger Differentialformen auf $\tilde{X}$, die außerhalb der Faser über ∞ holomorph sind, gut bekannt ist $\big((39), (42), (43)\big)$.

Literatur

[1] *E. Brieskorn*, Rationale Singularitäten komplexer Flächen, Invent. **4** (1968), 336—358.
[2] *R. Busam*, Eine Verallgemeinerung gewisser Dimensionsformeln von Shimizu. Invent. **11** (1970).
[3] *E. Freitag*, Über die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen, I. Crelle J. **247** (1971), 97—117.
[4] *K. B. Gundlach*, Funktionen zur Modulgruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Math. Ann. **152** (1963), 226—256.
[5] *H. Maaß*, Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe, Math. Z. **51** (1948), 225—261.
[6] *A. Prestel*, Die elliptischen Fixpunkte der Hilbertschen Modulgruppen, Math. Ann. **177** (1968), 181—209.
[7] *H. Shimizu*, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, Ann. of Math. **77** (1963), 33—71.

Mathematisches Institut, 69 Heidelberg

Eingegangen 15. Januar 1971