Journal für die reine und angewandte Mathematik
Herausgegeben von Helmut Hasse und Hans Rohrbach
Sonderdruck aus Band 247, Seite 97 bis 117
Verlag Walter de Gruyter · Berlin · New York 1971

Über die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen. I

Von *Eberhard Freitag* in Heidelberg

Einleitung

Es ist seit langem bekannt, daß die automorphen Funktionen zu einer Modulgruppe Γ, welche auf einem Gebiet $\mathfrak{G} < C^n$ operieren möge, einen algebraischen Funktionenkörper $K(\Gamma)$ vom Transzendenzgrad n bilden. Der allgemeinste Beweis hierfür wurde von Baily-Borel [1] gegeben. Der Quotientenraum $\mathfrak{G}/\Gamma$ kann in Anlehnung an eine Methode von I. Satake zu einem kompakten komplexen Raum $X = \overline{\mathfrak{G}/\Gamma}$ vervollständigt werden. Mit Hilfe von Modulformen kann man X in einen projektiven Raum einbetten und als algebraischen Raum auffassen. Die Modulfunktionen sind dann gerade die rationalen Funktionen auf X.

Über dieses Ergebnis hinaus gelang es nur in wenigen Spezialfällen, genauere Aussagen über die Struktur von $K(\Gamma)$ oder allgemeiner $A(\Gamma)$, dem Ring der Modulformen, zu machen. In den wenigen Fällen, in denen man $A(\Gamma)$ genau bestimmen konnte (s. [4], [7], [8], [10], [14]), ist $K(\Gamma)$ stets rein transzendent.

Eine allgemeine Methode, Funktionenkörper K mehrerer Veränderlicher zu studieren, hat man in der Theorie der „birationalen Invarianten". Ist X ein singularitätenfreies Modell von K, so kann man die Dimensionen gewisser Vektorräume von Differentialformen oder allgemeiner Kohomologiegruppen betrachten. Diese Zahlen hängen nicht von dem speziellen Modell X ab, sind also Invarianten von K. Die Schwierigkeit besteht nun darin, ein singularitätenfreies Modell von K zu finden. Ist speziell $K = K(\Gamma)$ ein Körper von Modulfunktionen, so hat man im kompaktifizierten Quotientenraum $X = \overline{\mathfrak{G}/\Gamma}$ ein algebraisches Modell, welches im allgemeinen leider Singularitäten hat. Nach Hironaka [11] existiert jedoch eine Desingularisierung $\tilde{X} \to X$ von X. Nun drängt sich folgende Frage auf. Wie hängen die holomorphen Differentialformen auf $\tilde{X}$ mit den Γ-invarianten Differentialformen auf $\mathfrak{G}$ (Modulformen) zusammen? Man kann erwarten, daß hier eine enge Beziehung besteht, um sie herzustellen, muß man allerdings die Desingularisierung $\tilde{X}$ kennen. Für viele Zwecke genügt auch ein quasisingularitätenfreies Modell (s. § 1). Das Studium der Singularitäten von X scheint ein ebenso reizvolles wie schwieriges Problem zu sein. Für die Kongruenzuntergruppen der Siegelschen Modulgruppe $\mathrm{Sp}(n, \boldsymbol{Z})$, $n \leq 3$, konstruierte I. Igusa [15] eine „kanonische" Desingularisierung des kompaktifizierten Quotientenraumes.

Die Situation ist natürlich besonders einfach, wenn Γ fixpunktfrei operiert und $X = \mathfrak{G}/\Gamma$ schon selbst kompakt ist, dann entsprechen die holomorphen Differentialformen auf X gerade den ganzen automorphen Formen von Γ. In diesem Falle kann $K(\Gamma)$ sicherlich nicht rein transzendent sein, der kanonische Divisor auf X ist sogar „ample". Bei nicht kompaktem $\mathfrak{G}/\Gamma$, $n > 1$, war bis jetzt meines Wissens keine einzige Gruppe bekannt, bei der $K(\Gamma)$ nicht rein transzendent ist. In der vorliegenden Arbeit wird unter anderem eine Serie von Gruppen Γ (zwei Variable) mit dieser Eigenschaft konstruiert.

Wir beschränken unsere Untersuchungen auf hyperabelsche Gruppen Γ, die auf dem Produkt n-oberer Halbebenen $\mathfrak{H}^n$ operieren, das bedeutet, daß $\mathfrak{H}^n/\Gamma$ durch Hinzufügung endlich vieler „Spitzen" kompaktifiziert werden kann. Wir untersuchen dann die Frage, wann die Punkte von $X = \overline{\mathfrak{H}^n/\Gamma}$ quasiregulär sind. Ein Punkt x eines komplexen Raumes heißt quasiregulär, wenn eine offene Umgebung von x eine endliche singularitätenfreie Überlagerung gestattet. Bei hyperabelschen Gruppen braucht man natürlich nur die Spitzen zu untersuchen. Es wird gezeigt, daß eine Spitze höchstens dann einen quasiregulären Punkt von X liefert, wenn sie in einer Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins enthalten ist. Dies ist nur im Falle $n \leqq 2$ möglich. Unter einer gewissen Symmetriebedingung ist im Falle $n = 2$ diese Bedingung auch hinreichend.

Mit Hilfe einiger Ergebnisse aus der algebraischen Geometrie (z. B. Dualitätssätzen) erhält man einfache Relationen zwischen Invarianten von $K(\Gamma)$ und Dimensionen gewisser Vektorräume von Modulformen, wenn X quasisingularitätenfrei ist (alle Punkte von X sind quasiregulär).

Als Anwendung der allgemeinen Theorie wird für reell-quadratische Zahlkörper der Klassenzahl eins und der Diskriminante d, $\frac{d}{4} \equiv 3 \bmod 4$ eine Untergruppe Γ_0 der Hilbertschen Modulgruppe vom Index zwei konstruiert, so daß der Körper der Modulfunktionen zu Γ_0 nicht rein transzendent ist, wobei als Invarianzgebiet das Produkt einer oberen und einer unteren Halbebene zu nehmen ist.

§ 1. Differentialformen auf analytischen Mannigfaltigkeiten

Unter einem analytischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ wollen wir einen komplex analytischen Raum im Sinne von Serre verstehen, der abzählbar im Unendlichen ist [9], [21]. Eine analytische Mannigfaltigkeit ist ein singularitätenfreier analytischer Raum.

Der Modul der holomorphen Differentialformen ν-ten Grades auf einer analytischen Mannigfaltigkeit X der Dimension n werde mit $\Omega_\nu(X)$ bezeichnet $(0 \leqq \nu \leqq n)$. Ist X speziell ein offener Teil des C^n, so ist $\Omega_\nu(X)$ ein freier $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Modul mit der Basis

$$dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_\nu}, \quad 1 \leqq j_1 < \cdots < j_\nu \leqq n.$$

Die Zuordnung $X \to \Omega_\nu(X)$ ist funktoriell. Ist $f: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung analytischer Mannigfaltigkeiten, so ist auf natürliche Weise einer Form $\omega \in \Omega_\nu(Y)$ ein Urbild $\omega^* \in \Omega_\nu(X)$ zugeordnet.

Ein Punkt x eines analytischen Raumes X heißt quasiregulär, wenn eine (offene) Umgebung V von x eine endliche singularitätenfreie (verzweigte) Überlagerung $U \to V$ besitzt. Den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ der in x holomorphen Funktionskeime wollen wir dann ebenfalls quasiregulär nennen. Sind alle Punkte von X quasiregulär, so heiße X quasisingularitätenfrei.

Eine Desingularisierung eines analytischen Raumes X ist eine Abbildung $f: \widetilde{X} \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\tilde{X}$ ist eine analytische Mannigfaltigkeit.

b) Ist X_0 der reguläre Ort von X und $\tilde{X}_0 = f^{-1}(X_0)$, so liefert f einen analytischen Isomorphismus von $\tilde{X}_0$ auf X_0.

c) f ist eine surjektive eigentliche holomorphe Abbildung.

Satz 1. *Sei $f: \tilde{X} \to X$ eine Desingularisierung eines quasisingularitätenfreien normalen analytischen Raumes X. Dann ist jede Differentialform*

$$\tilde{\omega} \in \Omega_\nu(\tilde{X}_0),\ \tilde{X}_0 = \textit{Urbild des regulären Orts } X_0 \textit{ von } X,$$

auf ganz $\tilde{X}$ eindeutig holomorph fortsetzbar. Es gilt also

$$\Omega_\nu(X_0) \cong \Omega_\nu(\tilde{X}).$$

Zum Beweis benötigt man einige funktionentheoretische Hilfsmittel, welche wir nun zusammenstellen, unter anderem die lokale Auflösbarkeit von Singularitäten analytischer Räume. Die Existenz solcher Auflösungen hat Hironaka in [11] bewiesen. Im Falle $n = \dim X = 2$, wo wir Satz 1 schließlich anwenden wollen, ist diese Theorie viel einfacher. Literaturhinweise findet man in [11].

Hilfssatz 1. *Sei $f: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung irreduzibler analytischer Räume,*

$$\dim X = \dim Y.$$

Es gibt eine analytische Ausnahmemenge $S < X$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\operatorname{codim} S' = \dim Y - \dim S' \geqq 2$ *mit* $S' = f(S)$.

b) *f induziert eine lokal endliche Abbildung*

$$X - S \to Y - S'.$$

Beweis. Sei S die Menge aller $x \in X$, die nicht isolierte Punkte ihrer Faser $f^{-1}(f(x))$ sind. Bekanntlich ist S ein analytischer Raum ([20], Satz 17). Nach dem Abbildungssatz von Remmert ist $S' = f(S)$ ein abgeschlossener analytischer Teilraum von Y. Wenn y im Komplement von S' liegt, ist die Faser $f^{-1}(y)$ diskret, also endlich, da f eigentlich ist. Die Fasern der durch f vermittelten Abbildung

$$f_0: S \to S'$$

haben alle mindestens die Dimension eins. Nach [9], Chap V, Sec C, Theorem 5, gilt daher $\dim S > \dim S'$.

Weil S ein echter Teilraum von X ist, folgt

$$\dim Y = \dim X \geqq \dim S + 1 \geqq \dim S' + 2.$$

Sei jetzt $f: X \to Y$ eine lokal endliche (verzweigte) Überlagerung analytischer Räume, $x \in X$, $y = f(x)$.

Man hat einen injektiven Homomorphismus

$$f_x: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Wir wollen der Einfachheit halber $\mathcal{O}_{Y,y}$ als Unterring von $\mathcal{O}_{X,x}$ auffassen. Die Eigenschaft „lokal endlich" bedeutet, daß $\mathcal{O}_{X,x}$ endlicher $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul ist.

Hilfssatz 2. *Sei $f: X \to Y$ eine lokal endliche surjektive eigentliche Abbildung zusammenhängender analytischer Mannigfaltigkeiten. Es gibt eine analytische Ausnahmemenge $S < Y$ mit den Eigenschaften:*

a) codim $S \geqq 2$.

b) *Ist $x \in X$, $y = f(x) \notin S$, so existiert ein Parametersystem $z_1, \ldots, z_n$ von $\mathcal{O}_{X,x}$ und eine natürliche Zahl e, so daß $z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^e$ ein Parametersystem von $\mathcal{O}_{Y,y}$ ist.*

Beweis. Sei V der Verzweigungsort von f und W sein Bild in Y. Dann ist W ein analytischer Teilraum der Kodimension eins. Die Menge S bestehe aus allen $y \in W$, die eine der folgenden Bedingungen verletzen:

1. y ist ein regulärer Punkt von W.
2. Die Urbilder von y in V sind reguläre Punkte von V.
3. Die durch f induzierte Abbildung $f_0 \colon V \to W$ ist in den Urbildern von y unverzweigt.

Offenbar ist S ein echter analytischer Teilraum von W, es gilt also

$$\dim Y - \dim S \geqq 2.$$

Sei jetzt $x \in X$, $y = f(x) \notin S$. Dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & \xrightarrow{f_0} & W \end{array}$$

entspricht ein Diagramm von lokalen Ringen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,x} & \hookleftarrow & \mathcal{O}_{Y,y} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} \\ \mathcal{O}_{V,x} & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{O}_{W,y} \end{array}$$

Wegen 3. können wir $\mathcal{O}_{V,x}$ mit $\mathcal{O}_{W,y}$ identifizieren. Die Homomorphismen φ und φ_0 sind surjektiv. Alle vier Ringe, die in dem Diagramm auftreten, sind regulär. Wir wählen

$$t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathcal{O}_{Y,y},$$

so daß

$$\varphi(t_1), \ldots, \varphi(t_{n-1})$$

Parametersystem von $\mathcal{O}_{W,y}$ $(= \mathcal{O}_{V,x})$ ist. Die Nullstellenideale Kern φ, Kern φ_0 sind Hauptideale.

$$\operatorname{Kern} \varphi = t_n \mathcal{O}_{X,x}; \quad \operatorname{Kern} \varphi_0 = t_n' \mathcal{O}_{Y,y}.$$

In $t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$ bzw. $t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n'$ hat man ein Parametersystem von $\mathcal{O}_{X,x}$ bzw. $\mathcal{O}_{Y,y}$. Es gilt

$$t_n' = t_n^e s, \quad s \text{ Einheit in } \mathcal{O}_{X,x}$$

mit einer natürlichen Zahl e. Da man aus s eine e-te Wurzel ziehen kann, ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3. *Sei X eine zusammenhängende analytische Mannigfaltigkeit, $S \subset X$ ein analytischer Teilraum, dessen Kodimension größer als eins ist. Jede auf $X - S$ holomorphe (meromorphe) Differentialform kann eindeutig auf X holomorph (meromorph) fortgesetzt werden.*

Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem entsprechenden Fortsetzungssatz für Funktionen.

Hilfssatz 4. *Sei $f: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zusammenhängender analytischer Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, ω eine meromorphe Differentialform vom Grade ν auf Y, ω^* ihr Urbild auf X.*

Wenn ω^* holomorph ist, so gilt dies auch für ω.

$$\omega^* \in \Omega_\nu(X) \Rightarrow \omega \in \Omega_\nu(Y).$$

Beweis. Aufgrund der Hilfssätze 1.—3. kann man annehmen, daß f lokal endlich ist und zu jedem Punkt $x \in X$ ein Parametersystem $z_1, \ldots, z_n$ existiert, so daß $z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^e$ ein Parametersystem von $y = f(x)$ ist. Mit Hilfe solcher Parametersysteme ist der Zusammenhang zwischen ω und ω^* leicht zu überblicken. Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir dies nur für Differentialformen vom höchsten Grade n durch. In einer Umgebung von y gestattet ω eine Darstellung der Form

$$\omega = \tilde{f} \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1} \wedge dz_n^e$$

mit einer in y meromorphen Funktion $\tilde{f}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^e)$. In einer Umgebung von x gilt

$$\omega^* = g \cdot dz \wedge \cdots \wedge dz_n$$

mit der Funktion

$$g(z_1, \ldots, z_n) = e \cdot \tilde{f}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^e) \cdot z_n^{e-1},$$

die nach Voraussetzung holomorph ist. Man entwickle $\tilde{f}$ in eine Laurentreihe

$$\tilde{f}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^e) = \sum_{j=j_0}^{\infty} a_j(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{ej}, \quad a_{j_0} \neq 0.$$

Dabei sind a_j meromorphe Funktionen in $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Andererseits ist

$$g(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j=j_0}^{\infty} e \cdot a_j(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^{ej+e-1}$$

im Punkt x holomorph. Daher sind die Funktionen a_j sogar holomorph und es gilt

$$ej_0 + e - 1 \geqq 0.$$

Hieraus folgt schon $j_0 \geqq 0$, womit Hilfssatz 4 bewiesen ist.

Nun zum Beweis von Satz 1. Zunächst muß man sich klarmachen, daß $\tilde{\omega}$ auf $\tilde{X}$ meromorph fortsetzbar ist. Das liegt einfach daran, daß die $\tilde{\omega}$ entsprechende Differentialform ω auf X_0 (beachte $X_0 \cong \tilde{X}_0$) auf ganz X meromorph fortgesetzt werden kann, weil der singuläre Ort von X die Kodimension $\geqq 2$ hat. (Zur Theorie der Differentialformen auf Räumen mit Singularitäten s. [13].) Es gilt folgender allgemeine Fortsetzungssatz.

Hilfssatz 5. *Sei $\mathscr{F}$ eine kohärente Garbe auf einem lokal irreduziblen analytischen Raum X und $\mathscr{K}_X$ die Garbe der meromorphen Funktionen auf X. Dann sind Schnitte von $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{K}_X$ über Ausnahmemengen der Kodimension zwei fortsetzbar.*

Beweis. Man beachte, daß $\mathscr{F} \otimes \mathscr{K}_X$ lokal freier $\mathscr{K}_X$-Modul ist und der entsprechende Fortsetzungssatz für meromorphe Funktionen gilt.

Damit wissen wir, daß $\tilde{\omega}$, das Urbild von ω bei f, auf $\tilde{X}$ meromorph ist.

Zum Beweis von Satz 1 können wir annehmen, daß eine endliche singularitätenfreie Überlagerung

$$p: X^* \to X$$

existiert. Das Urbild ω^* von ω auf $p^{-1}(X_0)$ ist wegen Hilfssatz 3 auf ganz X^* holomorph fortsetzbar. Wir bilden nun das (reduzierte) Faserprodukt

$$X_1 = \tilde{X} \times_X X^* = \{(x, y) \in \tilde{X} \times X^*;\ f(x) = p(y)\}$$

und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "f"] & X \\ X_1 \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "f_1"] & X^*. \arrow[u, "p"'] \end{tikzcd}$$

Die Abbildung p_1 ist lokal endlich und surjektiv. Zu jedem Punkt $x_1 \in X_1$ existiert eine offene Umgebung U, so daß

1. p_1 eine eigentliche Abbildung von U auf eine offene Umgebung V von $p_1(x_1)$ vermittelt,

2. eine Desingularisierung

$$\tilde{U} \to U$$

existiert (lokale Desingularisierung analytischer Räume).

Sei ω_1 das Urbild von ω^* auf $\tilde{U}$ bei der Abbildung

$$\tilde{U} \to U \subset X_1 \to X^*.$$

Auf die Abbildung

$$\tilde{U} \to U \to V$$

wende man Hilfssatz 4 an und erhält, daß $\tilde{\omega}$ in V holomorph ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Im folgenden werden einige Anwendungen von Satz 1 auf die Theorie der algebraischen Funktionenkörper gegeben.

Ein kompakter analytischer Raum X heißt (projektiv) algebraisch, falls er in einen projektiven Raum $P^m C$ eingebettet werden kann. Dann ist bekanntlich X Nullstellenraum von homogenen Polynomen. Es besteht ein weitgehender Zusammenhang zwischen Funktionentheorie und algebraischer Geometrie auf X (s. [21]). So ist zum Beispiel jede meromorphe Differentialform auf X rational. Ein kompakter irreduzibler (projektiver) algebraischer Raum X heißt Modell eines Funktionenkörpers $K \supset C$, wenn der Körper der rationalen (= meromorphen) Funktionen auf X zu K isomorph ist.

Im folgenden verwenden wir noch die Bezeichnung

$$g_\nu(X) = \dim_C \Omega_\nu(X), \quad 0 \leqq \nu \leqq \dim X, \tag{1}$$

für eine analytische Mannigfaltigkeit X. Wenn X kompakt ist, sind diese Zahlen endlich.

Ist X ein singularitätenfreies Modell von K, so schreiben wir auch

$$g_\nu(K) := g_\nu(X). \tag{2}$$

Diese Definition ist von der Wahl des Modells unabhängig [22]. Man kann die Invarianten $g_\nu(K)$ auch direkt mit Hilfe der Bewertungen von K definieren, was für unsere Zwecke jedoch ohne Belang ist.

Als Anwendung von Satz 1 erhalten wir nun

Satz 2. *Sei X ein normales quasisingularitätenfreies Modell des Funktionenkörpers $K > \boldsymbol{C}$ und X_0 der reguläre Ort von X. Dann gilt*

$$g_\nu(K) = g_\nu(X_0) \text{ für } 0 \leqq \nu \leqq n = \dim X.$$

Ist K ein rein transzendenter Funktionenkörper, d. h.

$$K = \boldsymbol{C}(t_1, \ldots, t_n); \quad t_1, \ldots, t_n \text{ algebraisch unabhängig,}$$

so gilt bekanntlich

$$g_1(K) = \cdots = g_n(K) = 0.$$

Im Falle $n = 1$ gilt hiervon auch die Umkehrung, aber nicht mehr in höheren Dimensionen. Es gibt jedoch noch im Falle $n = 2$ ein numerisches Kriterium für die Rationalität eines Funktionenkörpers. Man muß Differentialformen höheren Gewichts mit heranziehen. Sei X eine n-dimensionale zusammenhängende analytische Mannigfaltigkeit. Mit $\mathscr{K}^r(X)$; $r = 0, 1, 2, \ldots$ bezeichnen wir den Modul der holomorphen Differentialformen vom Gewicht r. Ihr lokaler Typ ist

$$f \cdot (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)^r; \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Bei Übergang zu einer neuen Karte transformiert sich f mit der r-ten Potenz der Funktionaldeterminante als Faktor. Wir setzen

$$p_r(X) = \dim \mathscr{K}^r(X) \text{ für } r = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

und

$$p_r(K) = p_r(X), \tag{4}$$

wenn X ein singularitätenfreies Modell von K ist.

Satz 3 (Castelnuovo). *Ein Funktionenkörper $K > \boldsymbol{C}$ vom Transzendenzgrad zwei ist genau dann rein transzendent, wenn*

$$g_1(K) = p_2(K) = 0$$

gilt.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [22].

Wir gehen jetzt noch auf einen kohomologischen Aspekt ein. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter komplexer Raum und $\mathscr{F}$ eine kohärente Garbe auf X. Dann sind die Kohomologiegruppen

$$H^\nu(X, \mathscr{F}) \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

endlich dimensionale Vektorräume über $\boldsymbol{C}$. Sie verschwinden sogar für

$$\nu > \dim X.$$

Man definiert die Euler-Poincaré-Charakteristik von $\mathscr{F}$ durch

$$\chi(\mathscr{F}) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \dim H^\nu(X, \mathscr{F}). \tag{5}$$

Die Euler-Poincaré-Charakteristik von X ist

$$\chi(X) := \chi(\mathcal{O}_X). \tag{6}$$

Satz 4 ([12], Satz 15. 7. 1). *Sei X ein singularitätenfreies Modell eines Funktionenkörpers K. Dann gilt*

$$g_\nu(K) = \dim H^{n-\nu}(X, \mathcal{O}_X) \text{ für } \nu = 0, \ldots, n \ (= \dim X).$$

Insbesondere ist das arithmetische Geschlecht $g(K)$ von K,

$$g(K) := \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu(K), \tag{7}$$

gleich der Euler-Poincaré-Charakteristik eines singularitätenfreien Modells von K. Im Falle $n = 2$ gilt sogar

Satz 5 (s. [2]). *Sei X ein normales quasisingularitätenfreies Modell der Dimension zwei eines Funktionenkörpers K. Dann gilt*

$$g(K) = \chi(X).$$

Wir weisen noch darauf hin, daß die Euler-Poincaré-Charakteristik eines algebraischen Raumes X über das Hilbertpolynom einer projektiven Einbettung berechnet werden kann. Sei X ein abgeschlossener Teilraum eines projektiven Raumes $P^m\boldsymbol{C}$ und $\mathfrak{a} < \boldsymbol{C}[X_0, \ldots, X_m]$ das homogene Verschwindungsideal von X. Dann ist der Koordinatenring

$$A = \frac{\boldsymbol{C}[X_0, \ldots, X_m]}{\mathfrak{a}} = \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$$

in natürlicher Weise graduiert. Nach Hilbert existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom P, so daß

$$P(\nu) = \dim A_\nu \text{ für große } \nu$$

gilt.

Hilfssatz 6 ([9], III). *Die Euler-Poincaré-Charakteristik von X ist gleich dem konstanten Koeffizienten des Hilbertpolynoms P.*

$$\chi(X) = P(0).$$

§ 2. Singularitäten hyperabelscher Gruppen

Die Gruppe analytischer Automorphismen der oberen Halbebene

$$\mathfrak{H} = \{z \in \boldsymbol{C};\ \operatorname{Im} z > 0\} \tag{8}$$

ist bekanntlich

$$G = \frac{Sl(2, \boldsymbol{R})}{\{\pm E\}}. \tag{9}$$

Die Gruppe der analytischen Automorphismen Aut $\mathfrak{H}^n$ von

$$\mathfrak{H}^n := \overbrace{\mathfrak{H} \times \cdots \times \mathfrak{H}}^{n\text{-mal}}$$

erhält man aus G^n durch Adjunktion der Permutationen von Variablen. Sei S_n die symmetrische Gruppe n-ten Grades

$$\sigma z = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) \text{ für } \sigma \in S_n; \quad z \in \boldsymbol{C}^n. \tag{10}$$

Man entnimmt [3]

$$\operatorname{Aut} \mathfrak{H}^n = G^n \cdot S_n \text{ (semidirektes Produkt).}$$

Sei

$$M = (M^{(1)}, \ldots, M^{(n)}) \in Sl(2, \mathbf{R})^n; \quad M^{(\nu)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(\nu)} \beta^{(\nu)} \\ \gamma^{(\nu)} \delta^{(\nu)} \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben dann auch

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha = (\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(n)}),\ \beta = \cdots; \tag{11}$$

$$M\langle z \rangle = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1}. \tag{12}$$

Wir wollen die Abbildung, die durch die Matrix M vermittelt wird, mit $\widetilde{M}$ bezeichnen und beide streng unterscheiden. Allgemeiner verwenden wir die Bezeichnung

$$\widetilde{H} = \{\widetilde{M};\ M \in H\} \text{ für einen Teil } H < Sl(2, \mathbf{R})^n. \tag{13}$$

Diskrete Untergruppen von Aut $\mathfrak{H}^n$ werden häufig mit $\hat{\Gamma}$ bezeichnet und mit Γ ihr Durchschnitt mit G^n. Γ ist Normalteiler von endlichem Index in $\hat{\Gamma}$.

Wir stellen kurz einige Eigenschaften über Spitzen diskreter Untergruppen zusammen. Man läßt Aut $\mathfrak{H}^n$ in naheliegender Weise auf dem Abschluß $\overline{\mathfrak{H}}^n$ von $\mathfrak{H}^n$ operieren:

$$\overline{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} \cup \overline{\mathbf{R}}; \quad \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Gewisse Fixpunkte von $\hat{\Gamma}$ in $\overline{\mathbf{R}}^n$ heißen Spitzen von $\hat{\Gamma}$. Gruppen, die (im engeren Sinne) kommensurabel sind, haben dieselben Spitzen. Ist $\varkappa$ eine Spitze von $\hat{\Gamma}$ und $g \in$ Aut $\mathfrak{H}^n$, so ist $g\varkappa$ Spitze von $g\hat{\Gamma}g^{-1}$. Wir erinnern kurz an die Bedingungen, wann $\infty = (\infty, \ldots, \infty)$ Spitze von $\Gamma(\hat{\Gamma})$ ist.

a) Es existieren n linear unabhängige Translationen

$$z \to z + \alpha \text{ in } \Gamma,$$

b) Es gibt $n-1$ unabhängige total positive „Multiplikatoren“ $\varepsilon > 0$ (alle Komponenten sind positiv), so daß

$$z \to \varepsilon z + \beta \text{ in } \Gamma \text{ liegt für ein } \beta \in \mathbf{R}^n.$$

Nach [17] folgt aus a)

$$N\varepsilon = \varepsilon^{(1)} \cdots \varepsilon^{(n)} = 1.$$

Sei nun

$$\mathfrak{H}^{n*} = \mathfrak{H}^n \cup \{\varkappa;\ \varkappa \text{ Spitze von } \hat{\Gamma}\}. \tag{14}$$

In bekannter Weise setzt man die Topologie von $\mathfrak{H}^n$ auf $\mathfrak{H}^{n*}$ fort. Eine Umgebungsbasis von ∞ (falls ∞ Spitze von $\hat{\Gamma}$ ist) hat man in

$$U_C = \{z \in \mathfrak{H}^n;\ N(\operatorname{Im} z) > C\} \cup \{\infty\}, \quad C > 0. \tag{15}$$

Allgemein verwenden wir die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} Nz &= z_1 \cdots z_n, \\ Sz &= z_1 + \cdots + z_n \text{ für } z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n. \end{aligned} \tag{16}$$

Die Gruppe $\hat{\Gamma}$ operiert topologisch auf $\mathfrak{H}^{n*}$ und der Restklassenraum

$$\overline{\mathfrak{H}^n/\hat{\Gamma}} := \mathfrak{H}^{n*}/\hat{\Gamma} \tag{17}$$

ist lokal kompakt.

Definition 1. *Eine diskrete Untergruppe* $\hat{\Gamma} < \mathrm{Aut}\,\mathfrak{H}^n$ *heiße hyperabelsch, wenn* $\mathfrak{H}^{n*}/\hat{\Gamma}$ *kompakt ist.*

Insbesondere ist $\hat{\Gamma}$ hyperabelsch, wenn schon $\mathfrak{H}^n/\hat{\Gamma}$ selbst kompakt ist. Mit $\hat{\Gamma}$ ist auch jede kommensurable Gruppe hyperabelsch.

Nach einem Kriterium von Cartan kann man die analytische Struktur von $\mathfrak{H}^n/\hat{\Gamma}$ auf

$$X = \overline{\mathfrak{H}^n/\hat{\Gamma}}$$

fortsetzen und erhält einen normalen analytischen Raum. Technische Einzelheiten und Verallgemeinerungen auf andere Gebiete findet man in [19].

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Frage, welche Singularitäten von X quasiregulär sind. Problematisch sind natürlich nur die Spitzen.

Satz 6. *Eine Spitze* $\varkappa$ *von* $\hat{\Gamma}$ *liefert in* X *höchstens dann einen quasiregulären Punkt, wenn* $\varkappa$ *in einer Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins von* $\hat{\Gamma}$ *enthalten ist. Dies ist nur im Falle* $n \leqq 2$ *möglich.*

Beweis. 1. Teil. Sei $\varkappa$ in keiner Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins enthalten. Wir wollen annehmen, daß der Bildpunkt $[\varkappa]$ von $\varkappa$ in X quasiregulär ist, und dies zu einem Widerspruch führen. O. B. d. A. kann $\varkappa = \infty$ angenommen werden. Nach Voraussetzung existiert zu einer genügend kleinen Umgebung V von $[\infty]$ in X eine endliche singularitätenfreie Überlagerung

$$f : \mathring{V} \to V \quad (f \text{ ist eigentlich und fasernendlich}).$$

Man kann annehmen, daß $f^{-1}([\infty])$ aus einem einzigen Punkt x besteht. Es ist mir jedoch nicht bekannt, ob man allgemein erreichen kann, daß $\mathring{V}$ einfach zusammenhängend ist, wie es zum Beispiel bei Quotientensingularitäten der Fall ist. Dies bewirkt gewisse technische Schwierigkeiten. Wir wählen eine offene einfach zusammenhängende Umgebung V_0 von x in $\mathring{V}$.

Sei V_C das Bild von U_C (s. (15)) bei der natürlichen Projektion

$$p : \mathfrak{H}^{n*} \to X.$$

Die Mengen V_C sind in X offen und bilden ein Fundamentalsystem von Umgebungen von $[\infty]$. Die Mengen

$$\mathring{V}_C = f^{-1}(V_C)$$

bilden ein Fundamentalsystem von Umgebungen von x.

Wir interessieren uns für Zahlen $C' > C > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\mathring{V}_{C'} < V_0 < \mathring{V}_C$.

2. In U_C ist keine Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins enthalten.

Wählt man V_0 genügend klein, so ist die Existenz solcher C, C' gesichert. Die Abbildungen

$$\mathring{V}_C \to V_C; \quad \mathring{V}_{C'} \to V_{C'}$$

sind natürlich eigentlich.

Seien

$$T_1 < X, \quad T_2 < \mathfrak{H}^n, \quad T_3 < V$$

irgendwelche Teilmengen. Wir setzen

$$\begin{aligned} T_1' &= \{x \in T_1 \cap \mathfrak{H}^n/\hat{\Gamma},\ x \text{ regulär in } X\},\\ T_2' &= \{x \in T_2,\ f(x) \in X'\},\\ T_3' &= \{x \in T_3,\ p(x) \in X'\}. \end{aligned}$$

Da X normal ist, entsteht V_0' aus V_0 durch Herausnahme einer analytischen Ausnahmemenge, deren Kodimension größer als eins ist. Daher ist auch V_0' einfach zusammenhängend. Ein Punkt aus $U_C - \{\infty\}$ definiert in X genau dann eine Singularität in X, wenn er in einer Fixpunktmannigfaltigkeit von $\hat{\Gamma}$ enthalten ist, da der Verzweigungsort bei regulärem Bild allgemein die Kodimension eins hat. Daher entsteht U_C' aus $U_C - \{\infty\}$ durch Herausnahme der Fixpunktmannigfaltigkeiten. Die Abbildungen

$$U_C' \to V_C', \quad U_{C'}' \to V_{C'}'$$

sind daher topologisch unverzweigte Überlagerungen.

Wir bilden jetzt das Faserprodukt der Abbildungen

$$U_C' \to V_C' \text{ und } V_0' \to V_C' \quad (\text{beachte: } f(V_0') \subset V_C'))$$

und erhalten ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_C' \times_{V_C'} V_0' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & V_0' \arrow[d, "f"] \\ U_C' \arrow[r, "p"] & V_C'. \end{tikzcd}$$

Die Abbildung

$$U_C' \times_{V_C'} V_0' \to V_0'$$

ist wie $U_C' \to V_C'$ eine topologisch unverzweigte Überlagerung.

Da V_0' einfach zusammenhängend ist, gibt es einen Schnitt

$$s : V_0' \to U_C' \times_{V_C'} V_0',$$

der ein Isomorphismus auf eine beliebig vorgegebene Zusammenhangskomponente von $U_C' \times_{V_C'} V_0'$ ist, s ist insbesondere eigentlich und holomorph. Wir schränken s auf $V_{C'}'$ ein. Das Bild von $s(V_{C'}')$ ist bei geeigneter Wahl von s ein Isomorphismus auf eine vorgegebene Zusammenhangskomponente von $U_{C'}' \times_{V_{C'}'} \mathring{V}_{C'}'$. Man beachte, daß dieser Raum als offener Unterraum von $U_C' \times_{V_C'} V_0'$ aufgefaßt werden kann und daß er das Urbild von $\mathring{V}_{C'}'$ bei p_2 ist. Man hat also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_{C'}' \times_{V_{C'}'} \mathring{V}_{C'}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathring{V}_{C'}' \arrow[d] \arrow[l, bend right] \\ U_{C'}' \arrow[r] & V_{C'}'. \end{tikzcd}$$

Die Vertikalpfeile und der Schnitt sind eigentlich und fasernendlich. Die Abbildung

$$\mathring{V}'_{C'} \to U'_{C'},$$

die aus dem Diagramm resultiert, ist daher surjektiv, denn ihr Bild ist ein abgeschlossener analytischer Teilraum gleicher Dimension wie $U'_{C'}$. Hieraus wiederum folgt, daß die Abbildung $U'_{C'} \to V'_{C'}$ fasernendlich ist, was aber falsch ist. Damit ist Teil 1 bewiesen.

2. Teil. Sei $\varkappa$ in einer Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins enthalten, $n > 2$. Dies ist zum Widerspruch zu führen. Dabei können wir $\varkappa = \infty$ annehmen. Die Substitution

$$g = \widetilde{M} \circ \sigma; \quad M \in Sl(2, \mathbf{R})^n$$

lasse die Spitze ∞ fest und habe eine Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins. Dann gilt

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} & * \\ 0 & \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}} \end{pmatrix} \circ \sigma, \quad \varepsilon > 0,$$

(nachdem man die Vorzeichen gewisser Komponenten von M eventuell gewechselt hat). Die Permutation σ muß eine Transposition sein und es gilt

$$g^2 = \widetilde{M}\widetilde{M}^\sigma = \mathrm{id}.$$

Allgemein verwenden wir die Bezeichnung

$$z^\sigma = \sigma^{-1}(z) \text{ für } z \in \mathbf{C}^n \tag{18}$$

und

$$M^\sigma = \begin{pmatrix} \alpha^\sigma & \beta^\sigma \\ \gamma^\sigma & \delta^\sigma \end{pmatrix} \text{ für } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbf{R})^n. \tag{19}$$

Es folgt insbesondere

$$\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\left(\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\right)^\sigma = 1 = (1, \ldots, 1).$$

Hieraus folgt schon

$$\varepsilon = 1 \quad (n > 2;\ \sigma \text{ ist eine Transposition!}).$$

Man hat hierbei folgendes zu beachten. Wenn ε ein Multiplikator von Γ zur Spitze ∞ ist (die Substitution $z \to \varepsilon z + \beta$ liegt für ein $\beta \in \mathbf{R}^n$ in Γ) und eine der Komponenten von ε ist 1, dann gilt schon $\varepsilon = 1$, wie man leicht aus [17] entnimmt.

Hieraus und aus der Tatsache, daß mit ε auch stets ε^σ Multiplikator ist, ergibt sich ein Widerspruch. Dabei ist zu beachten, daß σ eine Transposition ist und $n > 2$ angenommen wurde.

Wir beweisen nun die Umkehrung von Satz 6 für sogenannte symmetrische Spitzen. Sei jetzt $n = 2$.

Definition 2. *Die Spitze $\varkappa$ von $\hat{\Gamma}$ heiße symmetrisch, falls eine Substitution $g \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{H}^2$ existiert, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) $g\varkappa = \infty$,

b) $\sigma_0 \in g\hat{\Gamma}g^{-1}$, $\sigma_0(z_1, z_2) = (z_2, z_1) = (z_1, z_2)^*$,

c) *es existiert eine Transvektion* $z \to \varepsilon z$, $\varepsilon \neq 1$ *in* $g\hat{\Gamma}g^{-1}$.

Satz 7. *Sei $\hat{\Gamma} < \mathrm{Aut}\,\mathfrak{H}^2$ eine diskrete Untergruppe, $\varkappa$ eine symmetrische Spitze von $\hat{\Gamma}$. Dann ist das Bild von $\varkappa$ in $\mathfrak{H}^{2*}/\hat{\Gamma}$ quasiregulär.*

Beweis. Wir können $\varkappa = \infty$, $\sigma_0 \in \hat{\Gamma}$ und die Existenz einer nicht trivialen Transvektion $z \to \varepsilon z$ in $\hat{\Gamma}$ voraussetzen.

Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,[\infty]}$ ist isomorph zum Ring der Funktionskeime f, die folgenden Bedingungen genügen:

a) f ist holomorph in $U_C - \{\infty\}$ für ein $C = C_f > 0$,

b) $f(M\langle z\rangle) = f(z)$ für $M = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$; $\tilde{M} \in \Gamma$,

c) $f(z) = f(z^*)$ $(z^* := \sigma_0 z)$.

Wir müssen einen regulären Ring $R > \mathcal{O}_{X,[\varkappa]}$ konstruieren, welcher ein endlicher $\mathcal{O}_{X,[\varkappa]}$-Modul ist.

Sei hierzu $\mathfrak{m} < \boldsymbol{R}^2$ das Translationsgitter zur Spitze ∞, also

$$\alpha \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow z \to z + \alpha \in \Gamma \tag{20}$$

und $z \to \varepsilon z$ eine Transvektion aus Γ, $\varepsilon \neq 1$.

Es gilt

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*, \quad \varepsilon\mathfrak{m} = \mathfrak{m}. \tag{21}$$

Mit $\hat{R}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ bezeichnen wir den Ring der Funktionskeime f mit den Eigenschaften:

a) f ist holomorph in $U_C - \{\infty\}$, $C = C_f > 0$,

b) $f(z + \alpha) = f(z)$ für $\alpha \in \mathfrak{m}$,

c) $f(\varepsilon z) = f(z)$,

d) $f(z) = f(z^*)$.

Dieser Ring ist eine endliche Erweiterung von $\mathcal{O}_{X,[\varkappa]}$.

Satz 6 folgt daher aus

Hilfssatz 7. *Der Ring $\hat{R}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ ist Fixring eines regulären Ringes nach einer endlichen abelschen Gruppe.*

Schlüssel zum Beweis dieses Satzes ist ein Kriterium von Gundlach, welcher die Regularität von $\hat{R}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ untersucht hat.

Hilfssatz 8 (Gundlach [6]). *Der Ring $\hat{R}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ ist genau dann regulär, wenn das duale Gitter*

$$\mathring{\mathfrak{m}} = \{\alpha \in \boldsymbol{R}^2;\ S(\xi\alpha) \in \mathfrak{m},\ \xi \in \mathfrak{m}\}$$

eine Basis α, β mit den Eigenschaften

$$\alpha = \alpha^*; \quad \beta = \varepsilon\beta^* \tag{22}$$

besitzt.

Die Gruppe, welche von

$$z \to z + \alpha,\ \alpha \in \mathfrak{m}; \quad z \to \varepsilon z; \quad z \to z^*$$

erzeugt wird, werde mit $\hat{\Gamma}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ bezeichnet.

Für den Beweis von Hilfssatz 7 genügt es, bei gegebenem $(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ ein Untergitter $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ zu konstruieren ($\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^*$, $\varepsilon\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$), so daß die Bedingung von Hilfssatz 8 für $(\mathfrak{n}, \varepsilon)$ erfüllt und $\hat{\Gamma}(\mathfrak{n}, \varepsilon)$ Normalteiler in $\hat{\Gamma}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ ist. Dann ist $\hat{R}(\mathfrak{n}, \varepsilon)$ eine abelsche Erweiterung von $\hat{R}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ mit Galoisgruppe $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$.

Die Eigenschaft, daß $\hat{\Gamma}(\mathfrak{n}, \varepsilon)$ Normalteiler in $\hat{\Gamma}(\mathfrak{m}, \varepsilon)$ ist, bedeutet

$$\xi - \varepsilon\xi \in \mathfrak{n},$$
$$\xi - \xi^* \in \mathfrak{n} \text{ für alle } \xi \in \mathfrak{m}.$$

Dies ist äquivalent mit

$$\xi - \varepsilon\xi \in \mathring{\mathfrak{m}},$$
$$\xi - \xi^* \in \mathring{\mathfrak{m}} \text{ für alle } \xi \in \mathring{\mathfrak{n}}.$$

Wir betrachten nun in dem Gitter $\mathring{\mathfrak{m}}/1 - \varepsilon$ die Elemente der Form $\xi = \xi^*$ bzw. $\xi = \varepsilon\xi^*$. Es ist leicht zu sehen, daß von 0 verschiedene Elemente dieser Form existieren. Sie bilden ein eindimensionales Untergitter, erzeugt von einem Element α bzw. β. Das Gitter $\mathfrak{n}$ wird nun so definiert, daß $\mathring{\mathfrak{n}}$ die Basis α, β hat.

$$\mathfrak{n} = \langle \alpha, \beta \rangle^0. \tag{23}$$

Offenbar gilt

$$(1 - \varepsilon)\,\mathring{\mathfrak{n}} < \mathring{\mathfrak{m}}.$$

Da $\mathring{\mathfrak{m}}/1 - \varepsilon$ symmetrisch ist, gilt auch

$$(1 - \varepsilon)\,\mathring{\mathfrak{n}}^* < \mathring{\mathfrak{m}}.$$

Jetzt ist es leicht, die gewünschten Eigenschaften von $\mathfrak{n}$ nachzuweisen. Dies erfolgt nach demselben Schema, wir zeigen beispielsweise

$$\mathring{\mathfrak{m}} < \mathring{\mathfrak{n}} \; (\Rightarrow \mathfrak{n} < \mathfrak{m}).$$

Ein beliebiges Element $\xi \in \mathring{\mathfrak{m}}$ läßt sich in der Form

$$\xi = x\alpha + y\beta; \quad x, y \in \boldsymbol{Q}$$

darstellen. Zu zeigen ist, daß x, y sogar ganz rational sind. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\xi^* - \xi = y(\beta^* - \varepsilon\beta^*)$$

oder

$$y\beta = \frac{\varepsilon(\xi^* - \xi)}{1 - \varepsilon}.$$

Nach Definition von β ist y ganz rational, entsprechend zeigt man, daß x ganz rational ist. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Wir untersuchen nun die Differentialformen auf dem regulären Ort X_0 von $X = \mathfrak{H}^n/\hat{\Gamma}$. Diese stehen im Zusammenhang mit den automorphen Formen zu $\hat{\Gamma}$. Eine auf $\mathfrak{H}^n$ holomorphe Funktion f heißt (ganze) automorphe Form vom Gewicht

$$\mathfrak{r} = (r_1, \ldots, r_n); \quad r_\nu \in \boldsymbol{Z}; \quad r_\nu \geqq 0 \tag{24}$$

zum Multiplikatorsystem v (= ein Charakter von $\hat{\Gamma}$), wenn sie der Transformationsformel

$$f(gz) = v(g) \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma^{(\nu)} z_{\sigma(\nu)} + \delta^{(\nu)})^{2r_\nu} f(z) \tag{25}$$

für

$$g = \tilde{M} \circ \sigma \in \hat{\Gamma}; \quad M = \begin{pmatrix} * & * \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{26}$$

genügt. Im Falle $n = 1$ ist noch die „Holomorphie“ in den Spitzen zu fordern.

Wenn $\hat{\Gamma}$ kompakten Fundamentalbereich hat, benötigen wir im folgenden die Zusatzbedingung:

(27) Die Bilder von Γ in G^{n-1} bei den n-Projektionen $G^n \to G^{n-1}$ (Streichung einer Komponente) liegen dicht in G^{n-1}.

Diese Bedingung wird im folgenden stets vorausgesetzt; wenn $\hat{\Gamma}$ Spitzen hat, ist sie überflüssig. Der folgende Hilfssatz wurde für Gruppen ohne Spitzen von Matsushima-Shimura [18] bewiesen. Eine geringfügige Modifikation des Beweises, die wir dem Leser überlassen, zeigt, daß er auch für Gruppen mit Spitzen richtig ist.

Hilfssatz 9. *Sind gewisse, aber nicht alle Komponenten des Gewichts $\mathfrak{r}$ einer automorphen Form f zu einer hyperabelschen Gruppe Γ null (bei kompaktem Fundamentalbereich ist die Bedingung* (27) *vorauszusetzen), so verschwindet f identisch.*

Als Folgerung erhält man

Satz 8. *Sei X_0 der reguläre Ort von $\overline{\mathfrak{H}/\hat{\Gamma}}$. Dann gilt*

$$g_\nu(X_0) = 0 \quad \textit{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n-1.$$

Wenn $\tilde{X}$ eine Desingularisierung von X ist, so gilt erst recht

$$g_\nu(\tilde{X}) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n-1.$$

Der Körper der automorphen Funktionen $K(\hat{\Gamma})$ ist isomorph zum Funktionenkörper von X. Bekanntlich ist X projektiv algebraisch, man erhält daher die

Folgerung. $\qquad g_\nu(K(\Gamma)) = 0$ *für* $1 \leqq \nu \leqq n-1$.

Den Vektorraum der automorphen Formen vom Gewicht $\mathfrak{r}$ zum Multiplikatorsystem v bezeichnen wir mit

$$[\hat{\Gamma}, \mathfrak{r}, v] \text{ oder einfach } [\hat{\Gamma}, \mathfrak{r}], \text{ falls } v = 1.$$

Im Spezialfall $\mathfrak{r} = (r, \ldots, r)$ schreiben wir hierfür auch

$$[\hat{\Gamma}, r, v] \text{ oder } [\hat{\Gamma}, r].$$

Besondere Bedeutung hat der Charakter

$$v_0(\tilde{M} \circ \sigma) = (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma}. \tag{28}$$

Sei f eine holomorphe Funktion auf $\mathfrak{H}^n$.
Dann ist die Differentialform $f(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)^r$ genau dann $\hat{\Gamma}$-invarant, falls

$$f \in [\hat{\Gamma}, r, v_0^r].$$

Aus Hilfssatz 4 und Satz 1 folgt nun

Hilfssatz 10. *Sei $\hat{\Gamma}$ eine hyperabelsche Gruppe, die im Falle kompakten Quotientenraums der Bedingung* (27) *genügt. Wenn $\overline{\mathfrak{H}^n/\Gamma}$ quasisingularitätenfrei ist, gilt*

$$g(K(\Gamma)) = 1 + (-1)^n \dim [\Gamma, 1, v_0].$$

Den kompaktifizierten Quotientenraum $X = \overline{\mathfrak{H}^n/\Gamma}$ kann man bekanntlich mit automorphen Formen $f_0, \ldots, f_m$ eines geeigneten Gewichts r_0 (triviales Multiplikatorsystem) in den projektiven Raum einbetten. Jede automorphe Form aus $[\hat{\Gamma}, r \cdot r_0]$ ist als homogenes Polynom in $f_0, \ldots, f_m$ darstellbar. Der Koordinatenring ist also

$$C[f_0, \ldots, f_m] = \sum_{r=0}^{\infty} [\hat{\Gamma}, r \cdot r_0].$$

Es gibt also ein eindeutig bestimmtes Polynom $P_{\hat{\Gamma}}$ mit der Eigenschaft

(29) $\quad P_{\hat{\Gamma}}(r) = \dim [\hat{\Gamma}, r]$ für $r \equiv 0 \bmod r_0$, r hinreichend groß,

und es gilt

$$\chi(X) = P_{\hat{\Gamma}}(0).$$

Satz 9. *Sei $\hat{\Gamma}$ eine hyperabelsche Gruppe auf $\mathfrak{H}^2$, die der Bedingung* (27) *bei kompaktem Quotientenraum genügt.*

1. *Wenn keine Form aus $[\hat{\Gamma}, 2]$ existiert, die auf den eindimensionalen Fixpunktmannigfaltigkeiten verschwindet, so ist $K(\hat{\Gamma})$ rein transzendent.*

2. *Wenn jede Spitze $\varkappa$ von $\hat{\Gamma}$ symmetrisch ist, so gilt*

$$g(K(\hat{\Gamma})) = 1 + \dim [\hat{\Gamma}, 1, v_0] = P_{\hat{\Gamma}}(0) \quad (\text{s. } (7), (28), (29)).$$

Wenn diese Zahl größer als eins ist, so ist $K(\hat{\Gamma})$ nicht rein transzendent.

Beweis. Der zweite Teil folgt aus den Hilfsätzen 5, 6, 10 und Satz 6. Wir brauchen also nur 1. zu beweisen.

Da $g_1(K(\hat{\Gamma})) = 0$ ist, folgte die Rationalität von $K(\hat{\Gamma})$ nach dem Satz von Castelnuovo aus

$$p_2(X_0) = 0 \quad (\Rightarrow p_2(\tilde{X}) = p_2(K(\hat{\Gamma})) = 0).$$

Ist ω eine holomorphe Differentialform auf X_0 vom Gewicht r, so ist ihr Urbild in $\mathfrak{H}^n$ auf ganz $\mathfrak{H}^n$ holomorph fortsetzbar, liefert also eine automorphe Form $f \in [\hat{\Gamma}, r, v_0^r]$, die, wie man sich leicht überlegt, auf der Fixpunktmannigfaltigkeit der Kodimension eins in mindestens r-ter Ordnung verschwindet.

Die Voraussetzung in 1. impliziert also

$$p_2(X_0) = 0.$$

§ 3. Beispiele

Mit Hilfe von Satz 9 kann man die Struktursätze von K. B. Gundlach [7], [8] über die Rationalität einiger Körper von Modulfunktionen neu beweisen. Natürlich liefert diese Methode nicht die explizite Gestalt erzeugender Funktionen, ohne Beweis sei noch erwähnt, daß auch die Körper der Modulfunktionen zu einigen Untergruppen der von Gundlach untersuchten Gruppen rein transzendent sind.

Wir gehen jetzt auf einige Beispiele von Gruppen mit Spitzen ein, die nicht rein transzendenten Funktionenkörper haben. Sei L ein reell-quadratischer Zahlkörper,

$$\alpha \to \alpha^{(1)}, \ \alpha^{(2)}$$

die zwei Einbettungen von L in $\mathbf{R}^2$. Sei $\mathfrak{o} < L$ die Hauptordnung von L. Die Hilbertsche Modulgruppe $Sl(2, \mathfrak{o})$ ist auf natürliche Weise in $Sl(2, \mathbf{R})^2$ eingebettet. In diesem Paragraphen lassen wir $Sl(2, \mathfrak{o})$ auf dem Produkt $\mathfrak{H} \times (-\mathfrak{H})$ operieren und zwar durch die übliche Formel

$$M\langle z_1, z_2\rangle = (M^{(1)}\langle z_1\rangle, M^{(2)}\langle z_2\rangle).$$

Natürlich ist die Theorie aus § 2 auch auf das Gebiet $\mathfrak{H} \times (-\mathfrak{H})$ anstelle von $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ anwendbar, da die beiden Bereiche analytisch äquivalent sind. Wir setzen jetzt

$$\sigma_0(z) = z^* = -(z_2, z_1). \tag{30}$$

Die durch $Sl(2, \mathfrak{o})$ vermittelte Abbildungsgruppe bezeichnen wir mit

$$\Gamma = \Gamma_L = \widetilde{Sl(2, \mathfrak{o})}.$$

Sei

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_L = \Gamma_L \cup \Gamma_L \circ \sigma_0 \tag{31}$$

die Symmetrisierung von Γ_L. Wir beweisen im folgenden

Hilfssatz 11. *Wenn die Diskriminante d von L gerade ist, so gibt es einen (reellen) Charakter v von $Sl(2, \mathfrak{o})$, der durch*

$$v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{d}{4}},$$

$$v\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{d}{4}+1}$$

bestimmt ist.

Sei $\Gamma_0 < \Gamma_L$ die Abbildungsgruppe, die durch den Kern von v definiert wird,

$$\Gamma_0 = \{\tilde{M} \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{H} \times (-\mathfrak{H}));\; M \in Sl(2, \mathfrak{o}),\; v(M) = 1\} \tag{32}$$

und

$$\hat{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_0 \gamma_0 \tag{33}$$

mit

$$\gamma_0 = \begin{cases} \sigma_0, & \text{falls } \frac{d}{4} \equiv 3 \bmod 4 \\ \tilde{M} \circ \sigma_0, & \text{falls } \frac{d}{4} \equiv 2 \bmod 4; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{34}$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\hat{\Gamma}_0$ eine Gruppe ist. Sie hat in $\hat{\Gamma}$ den Index zwei.

Hilfssatz 12. *Es gibt eine $\hat{\Gamma}_0$-invariante holomorphe Differentialform auf $\mathfrak{H} \times (-\mathfrak{H})$ vom Gewicht eins.*

$$\omega = \Theta\, dz_1 \wedge dz_2.$$

Bevor wir die beiden Hiltssätze beweisen, ziehen wir die uns interessierende Folgerung.

Satz 10. *Sei L ein reell-quadratischer Zahlkörper der Klassenzahl eins und der Diskriminante d, $\frac{d}{4} \equiv 3 \bmod 4$. Es existiert eine Untergruppe $\hat{\Gamma}_0$ der symmetrisierten Hilbertschen Modulgruppe vom Index zwei, so daß der Körper der Modulfunktionen $K(\hat{\Gamma}_0)$ (Invarianzgebiet ist $\mathfrak{H} \times (-\mathfrak{H})$) nicht rein transzendent ist.*

Da die Klassenzahl von L eins ist, hat $\hat{\Gamma}_L$ nur eine Klasse äquivalenter Spitzen. Es ist leicht zu sehen, daß auch jede Spitze von $\hat{\Gamma}_0$ mit ∞ äquivalent ist. Diese ist in der Fixpunktmannigfaltigkeit von σ_0 enthalten. Man kann daher Satz 9 anwenden und erhält mit Hilfssatz 12 die Behauptung. Bevor wir auf den Beweis der Hilfssätze 11, 12 eingehen, bemerken wir noch:

Ist $\Gamma_1 < \hat{\Gamma}_0$ eine Untergruppe von endlichem Index, so ist $K(\Gamma_1)$ eine (endliche) Erweiterung von $K(\hat{\Gamma}_0)$ und daher ebenfalls nicht rein transzendent (s. [22]).

Die Konstruktion von Θ (Hilfssatz 12) erfolgt mittels Thetareihen. Sei

$$\vartheta_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{o}} (-1)^{S\frac{\beta\gamma}{\sqrt{d}}} e^{\pi i S \frac{z(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)^2}{\sqrt{d}}} \quad \text{für } \alpha, \beta \in \mathfrak{o}. \tag{35}$$

Offenbar konvergiert $\vartheta_{\alpha,\beta}$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum von $\mathfrak{H} \times (-\mathfrak{H})$ und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Wir setzen

$$\Theta(z) = \prod_{\alpha,\beta \in \{0,\omega_0\}} \vartheta_{\alpha,\beta}(z) \tag{36}$$

mit

$$\omega_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{d}, & \text{falls } \frac{d}{4} \equiv 2 \bmod 4 \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{d}, & \text{falls } \frac{d}{4} \equiv 3 \bmod 4. \end{cases} \tag{37}$$

Nach den Formeln von Kloosterman [16] ist Θ jedenfalls eine Modulform zum trivialen Charakter zu einer geeigneten Kongruenzuntergruppe von $Sl(2, \mathfrak{o})$. Das Transformationsverhalten von Θ bei Modulsubstition ist daher völlig bekannt, wenn man weiß, wie sich Θ bei den speziellen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathfrak{o} \tag{38}$$

verhält. Es gilt nämlich

Hilfssatz 13. *Ist $\mathfrak{o}$ ein Dedekindring, so wird $Sl(2, \mathfrak{o})$ von irgendeiner Kongruenzuntergruppe und den Matrizen vom Typ* (38) *erzeugt.*

Der einfache Beweis sei dem Leser überlassen.

Man entnimmt [16] (s. auch [7]) die Thetatransformationsformel

$$\vartheta_{\alpha,\beta}(-z^{-1}) = (Nz)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi i}{2} S \frac{\alpha\beta}{\sqrt{d}}} \vartheta_{\beta,\alpha}(z). \tag{39}$$

Hieraus folgt

$$\Theta(-z^{-1}) = (-1)^{\frac{d}{4}} \Theta(z). \tag{40}$$

Einfache Rechnungen ergeben

$$\Theta(z+1) = (-1)^{\frac{d}{4}} \Theta(z), \tag{41}$$

$$\Theta\left(z + \frac{1}{2}\sqrt{d}\right) = (-1)^{\frac{d}{4}+1} \Theta(z), \tag{42}$$

$$\Theta(z^*) = (-1)^{\frac{d}{4}} \Theta(z). \tag{43}$$

Damit ist Θ als Modulform erkannt, deren Multiplikatorsystem gerade die in Hilfssatz 11 angegebenen Werte annimmt.

Daß v durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt ist, folgt aus Hilfssatz 13, wenn man beachtet, daß jede Untergruppe von endlichem Index in $Sl(2, \mathfrak{o})$ eine Kongruenzuntergruppe ist.

Schließlich noch eine Bemerkung zu Hilfssatz 11. Es ist wünschenswert, den dort auftretenden Charakter rein algebraisch, d. h. ohne Verwendung von Modulformen zu konstruieren.

Dies ist in der Tat möglich.

Hilfssatz 14. *Sei $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung eines quadratischen Zahlkörpers, so daß 2 zerlegt oder verzweigt ist. Dann existieren genau vier Charaktere v von $Sl(2, \mathfrak{o})$, die auf der Hauptkongruenzgruppe der Stufe 2 trivial sind, nämlich*

$$v\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\nu}, \quad v\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\mu}; \quad \nu, \mu \in \{0, 1\}.$$

Dabei ist

$$\omega = \frac{d + \sqrt{d}}{2}; \quad d = \text{diskr.}\,(\mathfrak{o}).$$

Nach Hilfssatz 13 muß man v nur in den speziellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kennen. Ihre Quadrate liegen in der Hauptkongruenzgruppe der Stufe zwei, daher gibt es nur reelle Charaktere v der gewünschten Art. Bekanntlich gibt es in der elliptischen Modulgruppe $Sl(2, \boldsymbol{Z})$ nur einen nichttrivialen reellen Charakter v_0, der durch

$$v_0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = v_0\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

charakterisiert ist. Er kommt folgendermaßen zustande. Die Gruppe $Sl\left(2, \frac{\boldsymbol{Z}}{(2)}\right)$ ist isomorph zu S_3. Der Kern von v_0 ist gerade das Urbild der alternierenden Gruppe A_3 in $Sl(2, \boldsymbol{Z})$. Wir setzen diesen Charakter auf $Sl(2, \mathfrak{o})$ fort. Da 2 nicht träge ist, besitzt 2 einen echten Primteiler $\mathfrak{p}$.

Es gilt

$$Sl\left(2, \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}\right) \cong Sl\left(2, \frac{\boldsymbol{Z}}{(2)}\right) \cong S_3.$$

Man kann das Urbild von A_3 in $Sl(2, \mathfrak{o})$ betrachten und erhält eine Untergruppe vom Index zwei. Ihr entspricht ein Charakter v; er ist die gesuchte Fortsetzung von v_0.

Zum Beweis von Hilfssatz 14 genügt es nun zu zeigen, daß der triviale Charakter von $Sl(2, \boldsymbol{Z})$ eine nichttriviale Fortsetzung auf $Sl(2, \mathfrak{o})$ hat, die aber auf der Hauptkongruenzgruppe der Stufe zwei trivial ist. Oder anders gewendet, auf der Gruppe $Sl\left(2, \frac{\mathfrak{o}}{(2)}\right)$ muß es einen nichttrivialen Charakter geben, der auf $Sl\left(2, \frac{\boldsymbol{Z}}{(2)}\right)$ trivial ist. Der Index von $Sl\left(2, \frac{\boldsymbol{Z}}{(2)}\right)$ in $Sl\left(2, \frac{\mathfrak{o}}{(2)}\right)$ ist nach bekannten Formeln sechs oder acht, je nachdem, ob 2 zerlegt oder verzweigt ist. Daher braucht man nur zu zeigen, daß der Normalisator $\mathscr{N}$ von $Sl\left(2, \frac{\boldsymbol{Z}}{(2)}\right)$ in $Sl\left(2, \frac{\mathfrak{o}}{(2)}\right)$ nicht mit $Sl\left(2, \frac{\mathfrak{o}}{(2)}\right)$ zusammenfällt.

Nehmen wir einmal an, es gelte

$$\mathcal{N} = Sl\left(2, \frac{\mathfrak{o}}{(2)}\right).$$

Dann existiert zu jeder Matrix $M \in Sl(2, \mathfrak{o})$ eine Matrix $N \in Sl(2, \mathfrak{o})$, so daß

$$N M N^{-1}$$

modulo zwei ganz rational ist. Wir wählen speziell

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei ω_0 so bestimmt werde, daß $\mathfrak{p} = (2, \omega_0)$ ein echter Primteiler von 2 ist. (Bei gerader Diskriminante kann man ω_0 wie in (37) wählen.) Setzt man N in der Form

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

an, so folgt, daß

$$\alpha^2 \omega_0, \quad \gamma^2 \omega_0$$

modulo zwei ganz rational sind. Da ω_0 modulo zwei nicht invertierbar ist, muß

$$\alpha^2 \omega_0 \equiv \gamma^2 \omega_0 \equiv 0 \bmod 2$$

gelten. Hieraus folgt aber, daß α und γ den gemeinsamen Teiler $\mathfrak{p}$ haben, was nicht sein kann, da $(\alpha, \gamma) = (1)$ gilt. Damit ist Hilfssatz 14 bewiesen. Wir haben nebenbei erhalten, daß die Gruppe Γ_0 (s. (32)), die in Satz 10 auftritt, eine Kongruenzgruppe der Stufe zwei ist.

Literatur

[1] *W. Baily* and *A. Borel*, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math. **84** (1966), 442—528.

[2] *E. Brieskorn*, Rationale Singularitäten komplexer Flächen, Invent. math. **4** (1968), 336—358.

[3] *E. Cartan*, Sur les domaines bornés homogénes de l'espace de *n* variables complexes, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1935), 116—162.

[4] *E. Freitag*, Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss., 1. Abh., 1967.

[5] *A. Grothendieck* et *J. Dieudonné*, Eléments de géométrie algébrique. I—III, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (1961).

[6] *K. B. Gundlach*, Some new results in the theory of Hilbert's modular group, Contributions to function theory (Intern. Coll. Funct. Th. Bombay) (1960), 165—180.

[7] *K. B. Gundlach*, Die Bestimmung der Funktionen zu einigen Hilbertschen Modulgruppen, J. reine angew. Math. **220** (1965), 109—153.

[8] *K. B. Gundlach*, Funktionen zur Modulgruppe von $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, Math. Ann. **152** (1963), 226—256.

[9] *R. C. Gunning* and *H. Rossi*, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall (1965).

[10] *W. Hammond*, The modular groups of Hilbert and Siegel, Amer. Journ. of Math. **88** (1966), 497—516.

[11] *H. Hironaka*, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I—II, Ann. of Math. **79** (1964), 109—326.

[12] *F. Hirzebruch*, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (1962).

[13] *C. Houzel*, Géométrie analytique locale, Séminaire Henri Cartan **13** (1961/62).

[14] *J. Igusa*, On Siegel modular forms of genus two, Amer. Journ. Math. **84** (1962), 306—316.

[15] *J. Igusa*, A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions, Math. Ann. **168** (1967), 228—260.

[16] *H. D. Kloosterman*, Thetareihen in total-reellen algebraischen Zahlkörpern, Math. Ann. **103** (1930), 279—299.

[17] *H. Maaß*, Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss., 2. Abh. 1940.

[18] *S. Matsushima* and *G. Shimura*, On the cohomology groups attached to certain vector valued differential forms on the product of the upper half planes, Ann. of Math. **78** (1963), 417—449.

[19] *Pyatetski-Shapiro*, Geometry of classical domains and automorphic functions (russisch), Fizmatgiz, Moskau (1961).

[20] *R. Remmert*, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, Math. Ann. **133** (1957), 328—370.

[21] *J.-P. Serre*, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Annales de l'Institut Fourier **6** (1956), 1—42.

[22] *O. Zariski*, On Castelnuovos criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Illinois J. Math. **2** (1958), 303—315.

Mathematisches Institut der Universität, 69 Heidelberg, Tiergartenstraße

Eingegangen 20. Oktober 1969