Math. Annalen 177, 95—100 (1968)

Fortsetzung von automorphen Funktionen

Eberhard Freitag

Einleitung

H. Klingen zeigte kürzlich [4], daß jede Siegelsche Modulfunktion n-ten Grades Einschränkung einer Hermiteschen Modulfunktion zu einem beliebigen imaginärquadratischen Zahlkörper ist, wenn man den Siegelschen Halbraum in natürlicher Weise in den Hermiteschen Halbraum einbettet. Es gibt viele andere Einbettungen eines symmetrischen beschränkten Gebietes in ein anderes, die mit gewissen Modulsubstitutionen verträglich sind. Es liegt nahe zu fragen, wann das Analogon des Satzes von Klingen richtig ist. Es zeigt sich, daß dies unter schwachen Voraussetzungen, die in der Theorie der Modulfunktionen stets erfüllt sind, der Fall ist. Das Problem läßt sich in zwei Teilprobleme zergliedern.

1. Sei $\imath: Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung irreduzibler komplexer Räume (s. etwa [4]), Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe analytischer Automorphismen von X. Ist also $C \subset X$ ein Kompaktum, so gibt es nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ mit $C \cap \gamma(C) \neq \emptyset$. Bekanntlich ist dann X/Γ in natürlicher Weise ein (irreduzibler) komplexer Raum. Mit Γ_0 werde die Gruppe aller analytischen Automorphismen von Y bezeichnet, die sich zu einer Substitution aus Γ fortsetzen lassen. Es ist zu untersuchen, wann die holomorphe Abbildung $j: Y/\Gamma_0 \to X/\Gamma$ abgesehen von einer dünnen (analytischen) Teilmenge aus Y/Γ_0 eineindeutig ist. Zwei Punkte aus Y sind dann „im allgemeinen" nur dann bezüglich Γ äquivalent, wenn sie schon bezüglich Γ_0 äquivalent sind.

2. Sei $j: \tilde{Y} \to \tilde{X}$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume, die auf einem offenen dichten Teilraum $U \subset \tilde{Y}$ eineindeutig ist. Auf $\tilde{Y}$ und $\tilde{X}$ seien gewisse meromorphe Funktionen als zulässig ausgezeichnet, etwa durch Bedingungen an das Verhalten im „Unendlichen". Läßt sich dann jede zulässige Funktion auf $\tilde{Y}$ zu einer solchen auf $\tilde{X}$ fortsetzen?

Beide Probleme lassen sich leicht behandeln, wenn man die Existenz gewisser Fundamentalbereiche und Punktetrennungseigenschaften voraussetzt. Eine wesentliche Vereinfachung erhält man, wenn Y/Γ_0 und X/Γ algebraische Mannigfaltigkeiten sind. In der Theorie der Modulfunktionen, auf die diese Betrachtungen angewendet werden sollen, ist dies der Fall. Da jedoch die Kompaktifizierungstheorien, wie sie von Satake, Baily, Borel [1], [2] entwickelt wurden, tiefliegend sind, scheint es mir sinnvoll zu sein, auf beide Beweisverfahren einzugehen.

§ 1. Allgemeine Fortsetzungssätze

Wie in der Einleitung sei $\imath: Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung irreduzibler komplexer Räume, Γ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe analytischer Automorphismen von X und Γ_0 die auf Y projizierte Gruppe. Durch $\imath$

wird die holomorphe Abbildung

$$(1) \qquad j: \tilde{Y} \to \tilde{X}; \qquad \tilde{Y} = Y/\Gamma_0, \qquad \tilde{X} = X/\Gamma$$

induziert.

Hilfssatz 1. *Sei U eine offene Fundamentalmenge von Γ_0 in Y (also $Y = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma(U)$), so daß nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ mit $U \cap \gamma(U) \neq \emptyset$* [1] *existieren. Dann gibt es einen dünnen abgeschlossenen Teilraum $Z \subset Y$, so daß j auf $Y - Z$ eineindeutig ist.*

Beweis. Sei $\tilde{\Gamma}$ die Gruppe aller $\gamma \in \Gamma$, die Y in sich abbilden, d. h. $\gamma(Y) \subset Y$. Da $\gamma(Y)$ ein abgeschlossener analytischer Teilraum von Y gleicher Dimension ist, gilt dann schon $\gamma(Y) = Y$. Man hat daher einen natürlichen Homomorphismus von $\tilde{\Gamma}$ auf Γ_0, dessen Kern Γ^* aus allen Elementen von Γ besteht, die Y punktweise festlassen. Ist $\gamma \in \Gamma - \tilde{\Gamma}$, so ist $\gamma(Y) \cap U$ ein Teilraum von U echt kleinerer Dimension. Wir betrachten nun

$$(2) \qquad V = U - \bigcup_{\gamma \in \mathbf{M}} (\gamma(Y) \cap U).$$

mit

$$(3) \qquad \mathbf{M} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset; \quad \gamma \notin \tilde{\Gamma}\}.$$

Da $\mathbf{M}$ eine endliche Menge ist, hat V folgende Eigenschaften:

a) V ist offen und dicht in U,

b) Ist $x \in V$ und $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(x) \in Y$, so folgt $\gamma \in \tilde{\Gamma}$.

Damit ist der Hilfssatz evident.

Wir wenden uns nun dem zweiten Problem zu. Mit $K(X)$ werde allgemein der Körper der meromorphen Funktionen auf X bezeichnet.

Definition 1. *Ein Unterkörper $K \subset K(X)$ heißt*

a) *schwach variablentrennend, falls es eine offene Menge $U \neq \emptyset$ in X gibt, so daß zu zwei verschiedenen Punkten $x \in U, y \in X$ stets eine in U holomorphe Funktion $f \in K$ mit $f(x) \neq f(y)$ existiert.*

b) *variablentrennend, falls X durch die offenen Mengen der Eigenschaft* a) *überdeckt wird.*

Sei nun $j: \tilde{Y} \to \tilde{X}$ eine holomorphe Abbildung irreduzibler komplexer Räume; K bzw. L ein Unterkörper von $K(\tilde{Y})$ bzw. $K(\tilde{X})$. Ist $f \in L$ eine Funktion, deren Holomorphiebereich mit $j(\tilde{Y})$ einen nicht leeren Durchschnitt hat, dann kann $f \circ j$ definiert werden. Wir setzen voraus, daß dann stets $f \circ j \in K$ gilt.

Hilfssatz 2. *Es gibt zu jedem $g \in K$ ein $f \in L$ mit $g = f \circ j$, falls*

a) *eine offene Menge U aus $\tilde{Y}$ existiert, so daß für zwei verschiedene Punkte $x \in U$; $y \in \tilde{Y}$ stets eine in $j(U)$ holomorphe Funktion $h \in L$ mit $h(j(x)) \neq h(j(y))$ existiert.*

b) *L variablentrennend ist,*

c) *K keinen schwach variablentrennenden echten Unterkörper besitzt.*

Beweis. Der Körper aller $g \in K$, zu denen ein $f \in L$ mit $g = f \circ j$ existiert, ist offensichtlich schwach variablentrennend.

[1] Hier und im folgenden wird Y mit $\iota(Y)$ identifiziert.

Hilfssatz 1 und 2 ergeben zusammen ein Kriterium für die Fortsetzbarkeit automorpher Funktionen. Die dabei verwendeten Überlegungen stellen im wesentlichen eine Systematisierung von [5] dar.

Neue Aspekte ergeben sich, wenn man voraussetzt, daß es biholomorphe Abbildungen

(4) $$\sigma : Y/\Gamma_0 \to Y^*; \quad \tau : X/\Gamma \to X^*$$

auf (quasiprojektive) algebraische Mannigfaltigkeiten Y^*, X^* gibt. Durch j [s.(1)] wird dann eine Abbildung

(5) $$j^* : Y^* \to X^*$$

induziert.

Definition 2. *Eine auf X meromorphe Funktion f heißt automorph bezüglich Γ, falls*

a) *f bezüglich Γ invariant,*

b) *die durch f auf X^* induzierte meromorphe Funktion rational ist.*

Entsprechend ist der Begriff der automorphen Funktion auf Y bezüglich Γ_0 zu definieren. Mit $K(\Gamma)$ bzw. $K(\Gamma_0)$ bezeichnen wir den Körper der auf X bzw. Y bezüglich Γ bzw. Γ_0 automorphen Funktionen. Sei $f \in K(\Gamma)$ eine Funktion, deren Holomorphiebereich mit Y einen nicht leeren Durchschnitt hat. Dann kann die Einschränkung $f \mid Y$ von f auf Y definiert werden. Wir setzen im folgenden voraus, daß dann $f \mid Y \in K(\Gamma_0)$ gilt. Dies ist offenbar gleichbedeutend damit, daß die Abbildung j^* rational ist.

Im folgenden wird noch vorausgesetzt, daß Γ höchstens abzählbar viele Elemente enthält. Dies ist automatisch der Fall, wenn X abzählbar im Unendlichen, d. h. Vereinigung abzählbar vieler Kompakta ist.

Satz 1. *Unter vorstehenden Voraussetzungen ist jede Funktion aus $K(\Gamma_0)$ zu einer Funktion aus $K(\Gamma)$ fortsetzbar.*

Wir beweisen eine etwas schärfere Aussage. Unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 1 gilt.

Satz 2. *Sei $U \subset X/\Gamma$ eine dichte offene Teilmenge, $f_1, \ldots, f_n$ ein System von Funktionen aus $K(\Gamma)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Die durch $f_1, \ldots, f_n$ induzierten meromorphen Funktionen auf X/Γ sind in U holomorph.*

b) *Die durch $f_1, \ldots, f_n$ induzierte Abbildung von U in $\mathbf{C}^n$ ist eineindeutig.*

c) $j(Y/\Gamma) \cap U \neq \emptyset$.

Dann wird $K(\Gamma_0)$ von den Einschränkungen $f_1 | Y, \ldots, f_n | Y$ erzeugt.

Da jede algebraische Mannigfaltigkeit durch offene affine Teilmannigfaltigkeiten überdeckt werden kann, folgt Satz 1 aus Satz 2.

Beweis von Satz 2. Den Funktionen $f_i | Y$ mögen die rationalen Funktionen g_i auf Y^* entsprechen. Der Körper K aller rationalen Funktionen auf Y^* umfaßt $\mathbf{C}(g_1, \ldots, g_n)$. Wir haben die Gleichheit der beiden Körper nachzuweisen. Zunächst stellen wir fest, daß der Grad $[K : \mathbf{C}(g_1, \ldots, g_n)]$ endlich ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Transzendenzgrad von $\mathbf{C}(f_1 | Y, \ldots, f_n | Y)$ mit der (komplexen) Dimension von Y übereinstimmt, was auf Grund von Voraussetzung b) in Satz 2 leicht einzusehen ist.

Sei $A \subset Y^*$ ein Zariski-offener Teilraum (das Komplement von A ist also ein abgeschlossener algebraischer Teilraum von Y^*), auf dem $g_1, \ldots, g_n$ holomorph sind. A kann so gewählt werden, daß man mittels $x \to (g_1(x), \ldots, g_n(x))$ eine (auf ganz A definierte) unverzweigte rationale Abbildung g auf eine algebraische Mannigfaltigkeit $B \subset \mathbf{C}^n$ erhält. Der Körper der rationalen Funktionen auf B ist isomorph $K(g_1, \ldots, g_n)$. Die Blätterzahl k der Überlagerung $A \to B$ stimmt daher nach einem elementaren Satz aus der algebraischen Geometrie mit dem Grad $[K : K(g_1, \ldots, g_n)]$ überein. Es ist daher $k=1$ zu zeigen. Hierzu betrachten wir die durch $f_1, \ldots, f_n$ induzierte rationale Abbildung φ von X^* in $\mathbf{C}^n$. Wegen b) von Satz 2 ist φ auf einem dichten offenen Teil von X^* eineindeutig. Daher gibt es einen Zariski-offenen Teilraum $D \subset X^*$, auf dem φ holomorph und eineindeutig ist. Es kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $j^*(A)$ in D enthalten ist. Wir schließen nun indirekt, nehmen also $k > 1$ an. Dann gibt es jedenfalls offene disjunkte Mengen $U_1, U_2 \subset A \subset Y^*$ mit $g(U_1) = g(U_2)$. Die Urbilder $V_1, V_2 \subset Y$ von U_1, U_2 bei der kanonischen Abbildung $Y \to Y/\Gamma \to Y^*$ haben offenbar folgende Eigenschaften:

1. Kein Punkt von V_1 ist einem Punkt aus V_2 bezüglich Γ_0 äquivalent.
2. Jeder Punkt von V_1 ist einem Punkt aus V_2 bezüglich Γ äquivalent.

Sei

$$\hat{\Gamma} = \Gamma - \tilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma; \gamma(Y) \neq Y\}. \tag{6}$$

Dann gilt nach 1. und 2.

$$V_1 = \bigcup_{\gamma \in \hat{\Gamma}} (\gamma(Y) \cap V_1). \tag{7}$$

Da $\gamma(Y) \cap V_1$ ein dünner Teilraum von V_1 ist, sind wir bei einem Widerspruch angelangt, da $\hat{\Gamma}$ höchstens abzählbar viele Elemente enthält.

§ 2. Anwendungen auf die Theorie der Modulfunktionen

Aus der Fülle der Anwendungen greifen wir nur einige besonders einfache heraus. Der Siegelsche Halbraum n-ten Grades $\mathbf{S}_n$ besteht aus den n-reihigen komplexen symmetrischen Matrizen $Z = X + iY$ mit positiv definitem Imaginärteil Y. Eine $2n$-reihige quadratische Matrix M gehört genau dann zur Siegelschen Modulgruppe Γ_n, wenn ihre Koeffizienten ganz rational sind und

$$M' I M = I; \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

gilt. Die Gruppe Γ_n operiert auf $\mathbf{S}_n$ mittels

$$Z \to M\langle Z \rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}; \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Die Siegelschen Modulfunktionen n-ten Grades entsprechen den meromorphen Funktionen auf dem komplexen Raum

$$\widetilde{\mathbf{S}_n/\Gamma_n} = \begin{cases} \mathbf{S}_n/\Gamma_n, & \text{falls } n > 1 \\ \mathbf{S}_1/\Gamma_1 \cup \{\infty\}, & \text{falls } n = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Zu jeder Partition $n = n_1 + \cdots + n_k$ hat man eine Einbettung von $\mathbf{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{S}_{n_k}$ in $\mathbf{S}_n$ vermöge

$$(Z_1, \ldots, Z_k) \to [Z_1, \ldots, Z_k] := \begin{pmatrix} Z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Z_i \in \mathbf{S}_{n_i}. \tag{11}$$

Satz 3. *Eine auf* $\mathbf{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{S}_{n_k}$ *meromorphe Funktion* f *ist genau dann auf* $\mathbf{S}_n$ *zu einer Siegelschen Modulfunktion fortsetzbar (bezüglich der Einbettung* (11)*), falls* f

a) *in jeder Variablen eine Modulfunktion ist,*

b) *bei Vertauschung von Kästchen gleicher Reihenzahl invariant bleibt.*

Beweis. Zunächst ist die auf $\mathbf{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{S}_{n_k}$ projizierte Gruppe Γ_0 zu bestimmen. Sei $M \in \Gamma_n$ eine Modulsubstitution, die $\mathbf{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{S}_{n_k}$ identisch festläßt, dann ist M offensichtlich vom Typ

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}; \quad D = [\varepsilon_1 E^{(n_1)}, \ldots, \varepsilon_k E^{(n_k)}] \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i^2 = 1. \tag{12}$$

($E^{(\nu)}$ ist die ν-reihige Einheitsmatrix.)

Ist $M_0 \in \Gamma_n$ ein Automorphismus, der $\mathbf{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{S}_{n_k}$ in sich überführt, und $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ eine Matrix vom Typ (12), so läßt $M_0 M M_0^{-1}$ den Raum $\mathbf{S}_{n_1} \times \cdots$ $\cdots \times \mathbf{S}_{n_k}$ identisch fest. Daher gibt es eine Matrix $\tilde{M}$ vom Typ (12) mit

$$M_0 = \tilde{M} M_0 M. \tag{13}$$

Eine einfache Rechnung zeigt nun: Die projizierte Gruppe wird erzeugt von

a) Siegelschen Modulsubstitutionen der einzelnen Matrixvariablen,

b) Permutation von Kästchen gleicher Reihenzahl.

Ausgehend von der bekannten Konstruktion eines Fundamentalbereichs von Γ_n gelangt man nun mittels Hilfssatz 1 und 2 zu einem Beweis von Satz 3. Da jedoch die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind (s. [1]), verzichten wir auf die Durchführung im einzelnen.

Für eine weitere Anwendung von Satz 1 betrachten wir zwei natürliche Zahlen k, n. Vermöge

$$Z \to [Z]_k := [\overbrace{Z, \ldots, Z}^{k\text{-mal}}] \tag{14}$$

hat man eine Einbettung von $\mathbf{S}_n$ in $\mathbf{S}_{kn}$.

Satz 4. *In bezug auf die Einbettung, die durch* (14) *definiert wird, ist jede Siegelsche Modulfunktion n-ten Grades zu einer kn-ten Grades fortsetzbar.*

Beweis. Projiziert man die Siegelsche Modulgruppe Γ_{nk} auf $\mathbf{S}_n$, so erhält man eine diskontinuierliche Gruppe Γ_0 auf $\mathbf{S}_n$, die Γ_n umfaßt. Da Γ_n maximal diskontinuierlich ist (s. [3], [6]), fällt Γ_0 mit Γ_n zusammen. Dies kann man auch durch eine direkte Rechnung ähnlich wie beim Beweis von Satz 3 zeigen.

Das letzte Beispiel wählen wir aus der Theorie der Hilbert-Siegelschen Modulfunktionen. Sei K ein total reeller Zahlkörper vom Grad $m > 1$. Mit $\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(m)}$ werden die m verschiedenen Einbettungen von K in den Körper der reellen Zahlen bezeichnet. Es seien

$$a^{(i)} = \sigma^{(i)}(a) \tag{15}$$

die Konjugierten eines Elements $a \in K$. Zu einer Matrix A mit Elementen in K werden die m Konjugierten $A^{(i)}$ in üblicher Weise gebildet. Eine Verwechslung mit der früher verwendeten Bezeichnung der Reihenzahl einer Matrix ist hier nicht zu befürchten. Die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe $\Gamma_n(K)$ n-ten Grades zu K besteht aus allen $2n$-reihigen Matrizen M, deren Koeffizienten ganz in K sind und die der Gl. (8) genügen. Die Gruppe $\Gamma_n(K)$ operiert auf

$$\mathbf{S}_n^m = \{(Z_1, \dots, Z_m) \mid Z_i \in S_n \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m\} \tag{16}$$

als eigentlich diskontinuierliche Gruppe analytischer Automorphismen mittels

$$(Z_1, \dots, Z_m) \to (M^{(1)}\langle Z_1\rangle, \dots, M^{(m)}\langle Z_m\rangle); \qquad M \in \Gamma_n(K) \quad [\text{s. } (9)]\,. \tag{17}$$

Eine auf $\mathbf{S}_n^m$ meromorphe Funktion heißt Hilbert-Siegelsche Modulfunktion (n-ten Grades zu K), falls sie bezüglich $\Gamma_n(K)$ invariant ist. Vermöge

$$Z \to (\overbrace{Z, \dots, Z}^{m\text{-mal}}) \tag{18}$$

hat man eine Einbettung von $\mathbf{S}_n$ in $\mathbf{S}_n^m$.

Satz 5. *Jede Siegelsche Modulfunktion n-ten Grades ist (bezüglich der Einbettung* (18)*) zu einer Hilbert-Siegelschen Modulfunktion fortsetzbar.*

Beweis. Projiziert man $\Gamma_n(K)$ auf $\mathbf{S}_n$, so erhält man eine diskontinuierliche Gruppe auf $\mathbf{S}_n$, die Γ_n umfaßt. Wegen der maximalen Diskontinuität von Γ_n fällt sie mit Γ_n zusammen.

Weitere Anwendungen von Satz 1 und 2 (bzw. Hilfssatz 1 und 2) ergeben Einbettungen des Hermiteschen Halbraums $\mathbf{H}_n$ in $\mathbf{S}_{2n}$, oder des Hilbertschen Halbraums $\mathbf{S}_1^n$ in $\mathbf{S}_n$. Auf diesem Wege gelangt man zu Darstellungssätzen von Hermiteschen bzw. Hilbertschen Modulfunktionen durch Thetareihen. Da hierzu ein genaueres Studium der Thetafunktionen notwendig ist, soll dies in einer weiteren Arbeit ausgeführt werden.

Literatur

1. Baily, W. L.: On the Hilbert-Siegel modular space. Am. J. Math. **81**, 846—874 (1959).
2. —, and A. Borel: Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. Ann. of Math. **83**, 442—528 (1966).
3. Christian, U.: Zur Theorie der Hilbert-Siegelschen Modulfunktionen. Math. Ann. **152**, 275—341 (1963).
4. Gunning, R. C., and H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall series in modern analysis (1965).
5. Klingen, H.: Über einen Zusammenhang zwischen Siegelschen und Hermiteschen Modulfunktionen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **27**, 1—12 (1963).
6. Ramanathan, K. G.: Discontinuous groups II. Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen, II math.-phys. Klasse, 145—164 (1964).

Dr. Eberhard Freitag
Mathematisches Institut der Universität
69 Heidelberg, Tiergartenstraße

(Eingegangen am 5. Februar 1967)