Freitag, E., und V. Schneider
Math. Zeitschr. 102, 9–16 (1967)

Bemerkung zu einem Satz von J. Igusa und W. Hammond

Eberhard Freitag und Volker Schneider

Eingegangen am 10. Mai 1967

Die Siegelsche Stufengruppe $\Gamma(T)$ zu einer Elementarteilermatrix

$$T=\begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}; \qquad t_i>0 \quad \text{ganz rational für } 1\leqq i\leqq n;\ t_i | t_{i+1} \text{ für } 1\leqq i\leqq n-1$$

besteht aus allen symplektischen $2n$-reihigen Matrizen $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ für die A, BT, $T^{-1}C$, $T^{-1}DT$ ganz rational sind. Unter einer Siegelschen Modulform der Stufe T vom (ganz rationalen) Gewicht k versteht man im Falle $n>1$ eine Funktion $f(Z)$, die im Siegelschen Halbraum $\boldsymbol{S}_n$ der symmetrischen komplexen n-reihigen Matrizen $Z=X+iY$ mit positivem Imaginärteil Y holomorph ist und der Transformationsformel

$$f(M\langle Z\rangle)\,|CZ+D|^{-k}=f(Z) \tag{1}$$

mit

$$M\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}; \qquad M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

für alle $M\in\Gamma(T)$ genügt.

Die Hilbertsche Modulgruppe zu einem total reellen Zahlkörper K vom Grade $n>1$ ist die Gruppe

$$\Gamma_K=\left\{M\,|\,M=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ ganz in } K;\ |M|=1\right\}.$$

Seien $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ die n verschiedenen Einbettungen von K in den Körper der reellen Zahlen. Wir verwenden die übliche Bezeichnung

$$\alpha^{(i)}=\sigma_i(\alpha) \quad \text{für } \alpha\in K; \qquad M^{(i)}=\begin{pmatrix} \alpha^{(i)} & \beta^{(i)} \\ \gamma^{(i)} & \delta^{(i)} \end{pmatrix}; \quad i=1,\ldots,n. \tag{2}$$

Unter einer Hilbertschen Modulform zu K vom Gewicht k ist eine in dem Bereich

$$\boldsymbol{S}_1^n=\{z\,|\,z=(z_1,\ldots,z_n),\ z_\nu\in\boldsymbol{S}_1\} \tag{3}$$

holomorphe Funktion $f(z)$ zu verstehen, die dem Transformationsverhalten

(4) $$f(M\langle z\rangle)\cdot\prod_{i=1}^{n}(\gamma^{(i)}z_i+\delta^{(i)})^{-k}=f(z)$$

mit

$$M\langle z\rangle=(M^{(1)}\langle z_1\rangle,\ldots,M^{(n)}\langle z_n\rangle)$$

für alle

$$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma_K$$

genügt. Ist Γ eine der eingeführten Modulgruppen, so werde mit $[\Gamma,k]$ der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k bezeichnet.

Sei nun f irgendeine auf S_n definierte Funktion, A eine reelle n-reihige invertierbare Matrix.

Durch

(5) $$f_A(z_1,\ldots,z_n)=f\left(A\begin{pmatrix}z_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\end{pmatrix}A'\right)$$

erhält man eine auf S_1^n definierte Funktion f_A.

Im folgenden interessieren solche Matrizen A, für die

(6) $$f\in[\Gamma(T),k]\ \Rightarrow\ f_A\in[\Gamma_K,k]$$

gilt. Die Einschränkung einer Siegelschen Modulform der Stufe T bezüglich der durch

(7) $$(z_1,\ldots,z_n)\to A\begin{pmatrix}z_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\end{pmatrix}A'$$

definierten Einbettung von S_1^n in S_n soll also eine Hilbertsche Modulform gleichen Gewichts sein. Etwas allgemeiner könnte man durch beliebige $2n$-reihige symplektische Matrizen M definierte Einbettungen

(8) $$(z_1,\ldots,z_n)\to M\left\langle\begin{pmatrix}z_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & z_n\end{pmatrix}\right\rangle$$

betrachten. Wie in [3] stellt sich jedoch heraus, daß man dadurch keine wesentlich neue Einbettungen im Sinne des Problems erhält, weshalb wir uns gleich auf den speziellen Fall (7) beschränken wollen. Zunächst werden noch einige nützliche Bezeichnungen eingeführt:

(9) $$z^* = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \qquad \text{für } z = (z_1, \ldots, z_n) \in S_1^n,$$

(10) $$\alpha^* = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha^{(n)} \end{pmatrix} \qquad \text{für } \alpha \in K,$$

(11) $$M^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} \qquad \text{für } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_K.$$

Offenbar ist M^* symplektisch und es gilt

(12) $$(M\langle z\rangle)^* = M^*\langle z^*\rangle \qquad \text{für } z \in S_1^n;\ M \in \Gamma_K.$$

Satz 1. *Ist A eine n-reihige invertierbare Matrix der Eigenschaft*

(13) $$M \in \Gamma_K \Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A'^{-1} \end{pmatrix} M^* \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A'^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma(T),$$

so ist (6) *erfüllt.*

Der einfache Beweis sei dem Leser überlassen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Menge $A(K, T)$ aller Matrizen A untersucht, die der Bedingung (13) genügen. Mit A werden im folgenden nur noch n-reihige invertierbare Matrizen bezeichnet.

Satz 2. *Es gilt $A \in A(K, T)$ genau dann, falls*

a) *$AA'T$ unimodular*

b) *$A\alpha^*A^{-1}$ ganz rational für alle ganzen $\alpha \in K$ ist.*

Beweis. Die Bedingung (13) ist gleichbedeutend damit, daß

(14) $$\begin{pmatrix} A\alpha^*A^{-1} & A\beta^*A' \\ A'^{-1}\gamma^*A^{-1} & A'^{-1}\delta^*A' \end{pmatrix} \in \Gamma(T) \qquad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_K.$$

Setzt man speziell

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

so zeigt sich, daß (14) äquivalent damit ist, daß

$$A\alpha^*A^{-1}, \quad A\alpha^*A'T, \quad T^{-1}A'^{-1}\alpha^*A^{-1}, \quad T^{-1}A'^{-1}\alpha^*A'T$$

ganz rational für alle ganzen $\alpha \in K$ sind. Satz 2 ist nunmehr evident.

Sei $U(T)$ die Gruppe aller n-reihigen ganz rationalen unimodularen Matrizen U, für die TUT^{-1} ebenfalls unimodular ist.

(15) $$U(T) = \{U \mid U\ n\text{-reihig unimodular, } TUT^{-1} \text{ ganz rational}\}.$$

Wie man leicht sieht, gilt

$$A \in A(K,T); \quad U \in U(T) \Rightarrow UA \in A(K,T). \tag{16}$$

Die Äquivalenzrelation $A \sim UA$, die hierdurch definiert ist, gibt zu einer Klasseneinteilung von $A(K, T)$ Anlaß. Die Klassen von $A(K, T)$ werden nun mit gewissen Zerlegungen der reziproken Differente $\mathfrak{d}^{-1}$ ($\mathfrak{d}$ sei die Differente von K) in Verbindung gebracht. Es handelt sich dabei um Zerlegungen der Form:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{d}^{-1} = \rho \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}; & \rho \in K \text{ total positiv} \\ \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} & \text{(gebrochene) Ideale in } K \\ \mathfrak{a}/\mathfrak{b} \cong \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}/t_i & \text{(als Abelsche Gruppen)} \end{array} \tag{17}$$

Ist α irgendein Element von K und setzt man $\tilde{\rho} = \alpha^{-2}\rho$; $\tilde{\mathfrak{a}} = \alpha\mathfrak{a}$; $\tilde{\mathfrak{b}} = \alpha\mathfrak{b}$, so hat man in $\mathfrak{d}^{-1} = \tilde{\rho} \cdot \tilde{\mathfrak{a}} \cdot \tilde{\mathfrak{b}}$ wieder eine Zerlegung vom Typ (17). Zwei solche Zerlegungen nennen wir äquivalent.

Satz 3[1]**.** *Die Klassen äquivalenter Matrizen $A \in A(K, T)$ entsprechen eineindeutig den Klassen äquivalenter Zerlegungen der reziproken Differente vom Typ* (17).

Folgerung. Ist K ein beliebiger total reeller Zahlkörper vom Grade $n > 1$, so gibt es stets eine Elementarteilermatrix T (n-reihig), so daß $A(K, T) \neq 0$ ist, also eine Matrix A der Eigenschaft (6) *existiert.*

Man braucht nur $\rho = 1$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}^{-1}$ und für $\mathfrak{b}$ das Hauptideal (1) zu wählen. T wird dann von den Elementarteilern der Abelschen Gruppe $\mathfrak{d}^{-1}/(1)$ gebildet.

Beweis von Satz 3

Aus technischen Gründen setzten wir jetzt stets voraus, daß σ_1 die identische Einbettung von K in $\boldsymbol{R}$ ist, also $\alpha = \alpha^{(1)}$ für $\alpha \in K$ gilt.

Teil 1. Sei $A \in A(K, T)$. Es wird nun eine Zerlegung der Differente vom Typ (17) konstruiert. Sei

$$\tilde{\mathfrak{w}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine n-reihige Spalte mit beliebigem reellen $c_1 \neq 0$.

Dann hat

$$\mathfrak{w} = A\,\tilde{\mathfrak{w}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

[1] Im Falle $T = E$ wurde dieser Satz in [3] bewiesen.

die Eigenschaften

$$\mathfrak{w} = c_1 \mathfrak{a}_1 \qquad (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \text{ seien die Spalten von } A), \tag{18}$$

$$A\alpha^* A^{-1} \mathfrak{w} = \alpha \mathfrak{w} \qquad \text{für alle } \alpha \in K. \tag{19}$$

Da die Matrix A invertierbar ist, gibt es in der ersten Spalte

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$$

sicher ein von Null verschiedenes Element, etwa a_{1r}. Wir setzen nun speziell $c_1 = (1/a_{1r})$ und definieren

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}\, w_i. \tag{20}$$

Behauptung 1. $\mathfrak{a}$ *ist ein Ideal in* K.

Beweis. Mit der ganz rationalen Matrix $A\alpha^* A^{-1} = (n_{ij}(\alpha))$ gilt wegen (19)

$$\alpha\, w_j = \sum_{i=1}^{n} n_{ij}(\alpha)\, w_j \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Also ist $\mathfrak{a}$ ein G-Modul, wobei G den Ring der ganzen Zahlen in K bezeichne, und es bleibt $\mathfrak{a} \subset K$ zu zeigen. Da das r-te Element von $\mathfrak{w}$ nach Konstruktion 1 ist, gilt jedenfalls $G \subset \mathfrak{a}$ (man spezialisiere (21) auf $j = r$). Ist daher $e_1, \ldots, e_n$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von G, so gilt

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \tag{22}$$

M ganz rational, $|M| \neq 0$. Die $w_i - s$ können daher rational durch $e_1, \ldots, e_n$ ausgedrückt werden; $\mathfrak{a}$ ist somit, wie behauptet, in K enthalten.

Behauptung 2. $\mathfrak{b} = \sum \mathbf{Z}\, t_i w_i$ *ist auch ein Ideal in* K.

Beweis. Da $AA'T$ unimodular und $A\alpha^* A^{-1}$ ganz rational für alle $\alpha \in G$ ist, folgt, daß auch $(TA)\alpha^*(TA)^{-1}$ ganz rational für alle ganzen $\alpha \in K$ ist. Es kann jetzt dasselbe Beweisverfahren wie bei Behauptung 1 angewendet werden. Der Rest von Teil 1 besteht in dem Nachweis von $\mathfrak{d}^{-1} = \rho \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ mit $\rho = (1/c_1^2)$. Wendet man σ_i auf (19) an, so folgt $A\alpha^* A^{-1} \mathfrak{w}^{(i)} = \alpha^{(i)} \mathfrak{w}^{(i)}$ für $\alpha \in K$. Es gilt daher $\mathfrak{w}^{(i)} = c_i \mathfrak{a}^{(i)}$ mit einer eindeutig bestimmten reellen Zahl c_i ($i = 1, \ldots, n$; vgl. (18)).

Hieraus resultiert

$$A = WC \qquad \text{mit } W = (\mathfrak{w}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{w}^{(n)}),\ C^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Da $AA'T$ unimodular ist, folgert man leicht

$$C^{-2}=W'SW \qquad \text{mit einer rationalen Matrix } S. \tag{24}$$

Mit $S=(s_{ij})$ folgt hieraus

$$c_1^2=\sum_{i,j} w_i s_{ij} w_j \quad \text{und} \quad c_i^2=(c_1^2)^{(i)} \qquad \text{für } i=1,\dots,n. \tag{25}$$

Wie wir wissen, ist $A\alpha^* A'T$ ganz rational für alle $\alpha\in G$ und damit auch $WC^2\alpha^* W'T=W(\rho\alpha)^* W'T$ mit $\rho=c_1^{-2}$. Also ist

$$\sum_{i,j,\nu} w_i^{(\nu)}(\rho\,\alpha)^{(\nu)} w_j^{\nu} t_j \tag{26}$$

ganz rational für $\alpha\in G$ und damit $\rho\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\subset\mathfrak{d}^{-1}$ (reziproke Differente). Die beiden Ideale sind gleich, wenn ihre Normen übereinstimmen. Es bleibt also $\mathcal{N}(\rho\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=d^{-1}$ (d Diskriminante von K) zu zeigen. Zunächst gilt

$$\mathcal{N}(\rho\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=|C|^2\cdot\mathcal{N}(\mathfrak{a})\cdot\mathcal{N}(\mathfrak{b}). \tag{27}$$

Beachtet man die Formel

$$\mathcal{N}(\mathfrak{a})={}_{+}\sqrt{\frac{d(\mathfrak{a})}{d}} \qquad (d(\mathfrak{a}) \text{ Diskriminante von } \mathfrak{a})$$

und berechnet man $d(\mathfrak{a})$ (entsprechend $d(\mathfrak{b})$) über die Basis $w_1,\dots,w_n$, so folgt

$$\mathcal{N}(\rho\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=\frac{1}{d}|C|^2\cdot|\mathrm{Sp}(w_{ij})\cdot T|=\frac{1}{d}|C|^2\cdot|WW'|\cdot|T|=\frac{1}{d}, \tag{28}$$

da $WC^2W'T=AA'T$ unimodular ist.

Teil 2 (Umkehrung). Sei $\mathfrak{d}^{-1}=\rho\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ eine Zerlegung vom Typ (17). Es ist hieraus eine Matrix $A\in A(K,T)$ zu konstruieren. Nach dem Elementarteilersatz existiert eine $\mathbf{Z}$-Basis $w_1,\dots,w_n$ von $\mathfrak{a}$, so daß $t_1w_1,\dots,t_nw_n$ eine $\mathbf{Z}$-Basis von $\mathfrak{b}$ ist. Sei

$$\mathfrak{w}=\begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}, \quad W=(\mathfrak{w}^{(1)},\dots,\mathfrak{w}^{(n)}), \quad C={}_{+}\sqrt{\rho^*}=\begin{pmatrix} {}_{+}\sqrt{\rho^{(1)}} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & {}_{+}\sqrt{\rho^{(n)}}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Wir zeigen nun $A=WC\in A(K,T)$. Es ist

$$AA'T=WC^2W'T=W\rho^*W'T=\left(\mathrm{Sp}(w_i\,\rho\,w_j\,t_j)\right). \tag{30}$$

Daher ist $AA'T$ ganz rational. Außerdem gilt

$$|AA'T|=|WC^2W'T|=d\cdot\mathcal{N}(\rho\cdot\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})=1,$$

also ist $AA'T$ unimodular. Aufgrund obiger Überlegungen ist auch $A\alpha^*A'T$ für alle $\alpha\in G$ ganz rational, und wir erhalten, daß $A\alpha^*A'T\cdot T^{-1}A'^{-1}A^{-1}=A\alpha^*A^{-1}$ für beliebiges $\alpha\in G$ ganz rational ist. Satz 3 ist nunmehr evident.

Es liegt nahe im Fall $n=2$, wo die Differente durch die Diskriminante d eindeutig bestimmt ist, einfache Bedingungen zwischen d und t

$$\left(\text{es sei jetzt } T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}\right)$$

zu suchen, die (17) äquivalent sind. Die Formeln, die man dabei erhält, sind jedoch komplizierter als im Falle $t=1$ (s. [3]). Wir beschränken uns daher auf sog. orthogonale Einbettungen.

Definition. *Die durch $A \in A(K, T)$ definierte Einbettung von S_1^n in S_n heißt orthogonal, falls $A' A T = E$ gilt.*

Dies ist gleichbedeutend damit, daß $A T^{\frac{1}{2}}$ eine orthogonale Matrix ist. Im Falle $n=2$ liefert A genau dann eine orthogonale Einbettung, falls

$$(31) \qquad A T^{\frac{1}{2}} \text{ orthogonal}, \qquad A\left(\frac{d+\sqrt{d}}{2}\right)^{*} A^{-1} \text{ ganz rational ist}.$$

Eine explizite Rechnung, auf die wir hier verzichten, zeigt nun:

Satz 4. *Im Falle $n=2$ entsprechen die orthogonalen Einbettungen $A \in A(K, T)$ den Lösungen der Pellschen Gleichung*

$$d=a^2+t\,b^2; \qquad a,\, b \text{ ganz rational},\ b \equiv 0 \bmod 2.$$

Orthogonale Einbettungen ($n=2$ vorausgesetzt) existieren daher bei gegebenem Körper daher genau dann, wenn $d \equiv 0$ oder 1 mod 4 ist.

In [3] konnte HAMMOND die Struktur der Formenringe zu den erweiterten Hilbertschen Modulgruppen zu $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ bestimmen, indem er benutzte, daß in diesen Fällen eine Einbettung (im obigen Sinne) von $\boldsymbol{S}_1^2$ in $\boldsymbol{S}_2$ möglich ist und der Struktursatz für

$$\Gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

dank IGUSA [4] bekannt ist. In [1] wurden die Modulformen zu einer Erweiterung $\hat{\Gamma}$ von

$$\Gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

bestimmt. Es dürfte möglich sein, auch hieraus Konsequenzen für die Theorie der Hilbertschen Modulformen zu ziehen.

Allgemein drängt sich folgendes Problem auf. Sei $A \in A(K, T)$. Wann ist eine Hilbertsche Modulform (zu K) Einschränkung einer Siegelschen Modulform (der Stufe T)? Betrachtet man die Gesamtheit der Automorphismen von $\boldsymbol{S}_1^n$, die sich (bezüglich der Einbettung (7)) zu einer Substitution aus $\Gamma(T)$ fortsetzen lassen, so erhält man eine Gruppe Γ_0, die Γ_K umfaßt. Wie man an Beispielen zeigen kann, fällt Γ_0 mit Γ_K i.a. nicht zusammen. Man kann daher höchstens erwarten, daß Modulformen zu Γ_0 im obigen Sinne fortsetzbar sind. Dies scheint ein sehr schwieriges Problem zu sein. Bei Modulfunktionen ist die Situation jedoch einfacher.

Satz 5. *Jede Modulfunktion zu Γ_0 ist bezüglich der Einbettung (7) zu einer Modulfunktion der Stufe T fortsetzbar.*

Dies ist ein Spezialfall eines allgemeinen Fortsetzungssatzes für automorphe Funktionen [2].

Literatur

[1] FREITAG, E.: Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper. Heidelberger Akad. d. Wiss. Nr. 1 (1967).
[2] — Fortsetzung von automorphen Funktionen. Erscheint in den Math. Ann.
[3] HAMMOND, W.: The modular groups of Hilbert and Siegel. Journ. of Math. **88**, 497—516 (1966).
[4] IGUSA, J.: On Siegel modular forms of genus two. Amer. J. Math. **84**, 306—316 (1962).

Mathematisches Institut der Universität, 6900 Heidelberg, Tiergartenstraße