Sonderdruck aus
Arch. Math., Vol. 59, 157–164 (1992)
0003-889X/92/5902-0157 $ 3.10/0

Ein Ring elliptischer Modulformen

Von

R. Busam, E. Freitag und W. Karcher

Dieter Puppe gewidmet

Eine elliptische Modulform bezüglich einer Untergruppe

$$\Gamma_0 \subset \Gamma := \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

von endlichem Index in der elliptischen Modulgruppe ist eine holomorphe Funktion $f(z)$ in der oberen Halbebene, welche einem Transformationsverhalten

$$f(Mz) = v(M)(cz + d)^{r/2} f(z)$$

für alle

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \quad \left(Mz = \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

genügt und welche in den Spitzen regulär ist. Dies bedeutet, daß für jede Modulmatrix $N \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ die transformierte Funktion

$$(f \mid N)(z) := (cz + d)^{-r/2} f(Nz)$$

im Bereich $y \geqq 1$ beschränkt bleibt, wobei es genügt, wenn N ein endliches System $\mathcal{M}$ durchläuft. Und zwar soll

$$N(\infty) = a/c, \quad N \in \mathcal{M},$$

ein Vertretersystem der *Spitzenklassen* $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}/\Gamma_0$ durchlaufen. Dabei ist das sogenannte *Multiplikatorsystem* $v(M)$, $M \in \Gamma_0$, ein System komplexer Zahlen vom Betrag 1, so daß $J(M, z) = v(M)(cz + d)^{r/2}$ der bekannten Kozykelrelation genügt. Bei ungeradem r muß man natürlich eine der beiden holomorphen Wurzeln aus $cz + d$ auswählen. Um konkret zu sein, wählen wir den Hauptwert.

Wir bezeichnen mit

$$[\Gamma_0, r/2, v]$$

den Vektorraum all dieser Modulformen.

Für jede Modulmatrix $N \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ definiert die Zuordnung

$$f \mapsto f \mid N^{-1}$$

einen Isomorphismus

$$[\Gamma_0, r/2, v] \to [N\,\Gamma_0\,N^{-1}, r/2, v^N].$$

Hierbei ist v^N ein gewisses Multiplikatorsystem auf der konjugierten Gruppe $N\Gamma_0\,N^{-1}$, wir nennen es auch einfach das konjugierte Multiplikatorsystem. Die explizite Bestimmung des konjugierten Multiplikatorsystems kann in der vorliegenden Arbeit immer sehr leicht mittels einer konkreten Form f durchgeführt werden. Wir benötigen insbesondere nicht den etwas umständlichen Peterssonschen Kalkül.

Das fundamentale Thetamultiplikatorsystem v_ϑ ist auf der *Thetagruppe*

$$\Gamma_\vartheta = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\ a+b+c+d \text{ gerade}\right\}$$

erklärt. Diese Gruppe wird bekanntlich von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Aus den wohlbekannten Formeln

$$\vartheta(z+2) = \vartheta(z); \qquad \vartheta\left(\frac{-1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\vartheta(z)$$

folgt, daß die Thetareihe

$$\vartheta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 z)$$

eine Modulform vom Gewicht 1/2 bezüglich eines gewissen Multiplikatorsystems v_ϑ ist. Wir werden keine expliziten Formeln für v_ϑ benötigen.

Die Thetagruppe hat in der vollen Modulgruppe den Index drei. Dementsprechend besitzt $\vartheta(z)$ genau drei konjugierte Formen, neben ϑ selbst handelt es sich um die beiden Formen

$$\tilde{\vartheta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp(\pi i n^2 z),$$

$$\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i (n+1/2)^2 z).$$

Es gelten die Transformationsformeln

$$\vartheta(z+1) = \tilde{\vartheta}(z), \quad \tilde{\vartheta}(z+1) = \vartheta(z), \quad \tilde{\tilde{\vartheta}}(z+1) = e^{\pi i/4}\,\tilde{\tilde{\vartheta}}(z);$$

$$\tilde{\vartheta}(-1/z) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\tilde{\tilde{\vartheta}}(z), \quad \tilde{\tilde{\vartheta}}(-1/z) = \sqrt{\frac{z}{i}}\,\tilde{\vartheta}(z).$$

Es folgt insbesondere

$$\vartheta \in [\Gamma_\vartheta, 1/2, v_\vartheta],$$

$$\tilde{\vartheta} \in [\tilde{\Gamma}_\vartheta, 1/2, \tilde{v}_\vartheta], \qquad \tilde{\Gamma}_\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_\vartheta \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\vartheta}} \in [\tilde{\tilde{\Gamma}}_\vartheta, 1/2, \tilde{\tilde{v}}_\vartheta], \qquad \tilde{\tilde{\Gamma}}_\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\Gamma}_\vartheta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Werte der drei konjugierten Multiplikatorsysteme berechnet man für jede vorgegebene Matrix aus einer der konjugierten Gruppen am einfachsten dadurch, indem man diese Matrix durch die Erzeugenden der vollen Modulgruppe ausdrückt und obigen Formelsatz anwendet.

Der Durchschnitt der drei Konjugierten der Thetagruppe ist die Hauptkongruenzgruppe der Stufe 2,

$$\Gamma_\vartheta \cap \tilde{\Gamma}_\vartheta \cap \tilde{\tilde{\Gamma}}_\vartheta = \Gamma[2] := \mathrm{Kern}\,(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})).$$

Wir werden benutzen, daß die Hauptkongruenzgruppe der Stufe 2 von den drei Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

Die drei konjugierten Multiplikatorsysteme stimmen jedoch auf $\Gamma[2]$ nicht überein. Dies geschieht erst auf einer kleineren Gruppe, nämlich der von Igusa [1, 2] eingeführten Gruppe

$$\Gamma[4, 8] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma;\ a \equiv b \equiv 1 \bmod 4;\ b \equiv c \equiv 0 \bmod 8 \right\}.$$

Die von dieser und der negativen Einheitsmatrix erzeugte Gruppe bezeichnen wir mit $\tilde{\Gamma}[4, 8]$. Es gilt

$$\tilde{\Gamma}[4, 8] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma;\ a \equiv b \equiv 1 \bmod 2;\ b \equiv c \equiv 0 \bmod 8 \right\}.$$

Die beiden Gruppen definieren dieselben Transformationsgruppen.

1 Hilfssatz ([1, 2]). *Die Gruppe $\Gamma[4, 8]$ ist ein Normalteiler in der vollen Modulgruppe. Die Gruppe*

$$\Gamma[2]/\tilde{\Gamma}[4, 8]$$

ist isomorph zur Gruppe

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Der Isomorphismus wird durch die Korrespondenz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (1, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (0, 1)$$

hergestellt.

Folgerung. *Die drei Multiplikatorsysteme $v_\vartheta, \tilde{v}_\vartheta, \tilde{\tilde{v}}_\vartheta$ stimmen auf der Gruppe $\Gamma[4, 8]$ überein. Sie nehmen auf dieser Gruppe nur die Werte ± 1 an. Gerade Potenzen von ihnen sind insbesondere trivial.*

Beweis. Jedes Element von $\Gamma[2]$ kann in der Form

$$M = \pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^y K$$

mit einem Element der Kommutatorgruppe von $\Gamma[2]$ geschrieben werden. Wie man mittels der Erzeugenden leicht nachrechnet, ist K in $\Gamma[4, 8]$ enthalten. Es folgt, daß M genau dann in $\Gamma[4, 8]$ enthalten ist, wenn das Plus-Zeichen gilt und wenn x und y beide durch 4 teilbar sind.

Wir betrachten nun den graduierten Ring von Modulformen

$$A(\Gamma[4, 8]) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} [\Gamma[4, 8], r/2, v_\vartheta^r].$$

2 Theorem. *Es gilt*

$$A(\Gamma[4, 8]) = \mathbb{C}[\vartheta, \tilde{\vartheta}, \tilde{\tilde{\vartheta}}].$$

Definierende Relation ist die Jacobische Thetarelation

$$\vartheta^4 = \tilde{\vartheta}^4 + \tilde{\tilde{\vartheta}}^4.$$

Dieser Satz ist ein Spezialfall sehr viel tieferer Resultate von Igusa [1, 2]. Abweichend von Igusa [1, 2] wollen wir einen ganz elementaren Beweis dieses Theorems darlegen, welcher ohne weiteres im Rahmen eines einführenden Seminars in die Theorie der Modulformen behandelt werden kann.

Zum Beweis dieses Satzes nutzen wir aus, daß die endliche *abelsche* Gruppe

$$\mathcal{G} = \Gamma[2]/\tilde{\Gamma}[4, 8]$$

auf dem Vektorraum $[\Gamma[4, 8], r/2, v_\vartheta^r]$ vermöge

$$f(z) \mapsto f^M(z) := v_\vartheta^{-r}(M)\,(cz + d)^{-r/2} f(Mz)$$

operiert. Wir können daher $[\Gamma[4, 8], r/2, v_\vartheta^r]$ nach den 16 Charakteren dieser Gruppe zerlegen, d.h. es gilt

$$[\Gamma[4, 8], r/2, v_\vartheta^r] = \bigoplus_v [\Gamma[2], r/2, v v_\vartheta^r].$$

Hierbei durchläuft v alle 16 Charaktere von $\Gamma[2]$ mit der Eigenschaft

$$v(\pm M) = 1 \quad \text{für} \quad M \in \Gamma[4, 8].$$

Diese Charaktere sind durch ihre Werte auf den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt und können auf ihnen beliebige vierte Einheitswurzeln annehmen. Wir kodieren sie durch Zahlenpaare $[a, b]$,

$$a = v\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = v\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da sich zwei Multiplikatorsysteme desselben Gewichts $r/2$ nur um einen Charakter unterscheiden, unterscheiden sich die drei fundamentalen Multiplikatorsysteme nur um einen der 16 Charaktere. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\tilde{v}_\vartheta / v_\vartheta = [1, -i], \quad \tilde{\tilde{v}}_\vartheta / v_\vartheta = [i, 1].$$

Als nächstes nutzen wir aus, daß die Gruppe $\Gamma[2]$ in Γ Normalteiler ist. Dies bedeutet, daß die Zuordnung

$$f \mapsto f \,|\, N^{-1}$$

einen Isomorphismus

$$[\Gamma[2], r/2, v v_\vartheta^r] \to [\Gamma[2], r/2, v^{(N,r)} v_\vartheta^r]$$

bewirkt. Dabei ist die Zuordnung

$$v \mapsto v^{(N,r)}$$

für jedes $r \in \mathbb{Z}$ und jedes $N \in \Gamma$ eine Permutation der 16 Charaktere. Diese Permutation hängt natürlich nur von r mod 4 ab. Wir erhalten also 4 Darstellungen der Modulargruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad (\cong S_3)$$

in der Gruppe der Permutationen der 16 Charaktere. Es ist leicht, diese Permutationen explizit zu berechnen. Mit Hilfe der Formel

$$v^{(N,r)} = v^N \left(\frac{v_\vartheta^N}{v_\vartheta^r} \right)^r$$

zeigt man:

3 Hilfssatz. 1) *Im Falle* $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *gilt*

$$[a, b]^{(N,r)} = [a, (-i)^r a b^{-1}].$$

2) *Im Falle* $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *gilt*

$$[a, b]^{(N,r)} = [i^r a^{-1} b, b].$$

Die beiden angegebenen Matrizen erzeugen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

4 Hilfssatz. *Die drei Basisthetareihen* $\vartheta, \tilde{\vartheta}, \tilde{\tilde{\vartheta}}$ *haben keine Nullstellen in der oberen Halbebene.*

Beweis. Wegen des Transformationsverhaltens braucht man dies nur im Fundamentalbereich der Modulgruppe zu beweisen, mithin unter der Voraussetzung $y \geqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Für ϑ folgt dies aus der Abschätzung

$$|\vartheta(z) - 1| \leqq 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2} n^2} < 1,$$

für die beiden anderen Thetareihen ähnlich.

Die Gruppe $\Gamma_{\tilde{\tilde{\vartheta}}}[2]$ besitzt 3 Spitzenklassen, nämlich die durch ∞, 0, 1 repräsentierten. Die Thetareihe $\tilde{\tilde{\vartheta}}$ besitzt in ∞ eine Nullstelle der Ordnung 1, wobei die Ordnung in dem Parameter

$$q := e^{\pi i z/4}$$

gemessen wird. Da jede Modulform aus $[\Gamma[4, 8], r/2, v_\vartheta^r]$ Periode 8 hat, also eine Entwicklung nach Potenzen von q zuläßt, erhalten wir

5 Hilfssatz. *Die Zuordnung*

$$f \mapsto f\,\tilde{\tilde{\vartheta}}$$

definiert einen Isomorphismus von $[\Gamma[2], r/2, v v_\vartheta^r]$ *auf den Unterraum aller in* ∞ *verschwindenden Formen aus*

$$[\Gamma[2], (r+1)/2, v^* v_\vartheta^{r+1}], \quad v^* = v\,\frac{\tilde{\tilde{v}}_\vartheta}{v_\vartheta}.$$

Zwangsnullstellen. Wir nehmen

$$v\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 1$$

an. Alle Formen aus $[\Gamma[2], r/2, v v_\vartheta^r]$ verschwinden dann zwangsweise in der Spitze ∞, wie man aus der Gleichung

$$f(z+2) = v\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(z)$$

durch Grenzübergang $y \to \infty$ zeigt.

6 Definition. 1) Eine Form f aus

$$[\Gamma[2], r/2, vv_\vartheta^r]$$

hat Zwangsnullstelle in ∞, falls

$$v\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \neq 1.$$

2) Sei $N \in \Gamma$ eine Modulmatrix. Die Form f hat eine Zwangsnullstelle in der Spitze $N(\infty)$, falls die transformierte Form $f \mid N^{-1}$ eine Zwangsnullstelle in ∞ hat.

7 Bemerkung. Wenn die Form $f \in [\Gamma[2], r/2, v_\vartheta^r]$ eine Zwangsnullstelle in einer Spitze hat, so ist eine der drei Modulformen

$$f/\vartheta, \quad f/\tilde{\vartheta}, \quad f/\tilde{\tilde{\vartheta}}$$

eine (auch in den Spitzen reguläre) Modulform.

Aus Hilfssatz 3 folgt

8 Satz. *Nur in dem Fall*

$$r \equiv 0 \bmod 4, \quad v = 1$$

haben die Formen aus $[\Gamma[2], r/2, vv_\vartheta^r]$ *keine Zwangsnullstelle in irgendeiner Spitze.*

Wir beweisen nun durch Induktion nach r, daß der Raum $[\Gamma[2], r/2, v\vartheta^r]$ von den Potenzprodukten

$$\vartheta^\alpha \tilde{\vartheta}^\beta \tilde{\tilde{\vartheta}}^\gamma, \quad \alpha+\beta+\gamma = r \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}_0)$$

erzeugt wird. Wenn eine Zwangsnullstelle vorliegt, so kann man durch eine der drei Basisformen dividieren und gelangt in einen (isomorphen) Raum kleineren Gewichts. Wenn keine Zwangsnullstelle vorliegt, ist r durch 4 teilbar und v trivial. In diesem Falle liegt ϑ^r in dem Raum. Die Differenz einer gegebenen Form aus dem Raum und einem konstanten Vielfachen von ϑ^r verschwindet in der Spitze ∞. Man kann daher durch $\tilde{\tilde{\vartheta}}$ dividieren und die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Eine leichte Verfeinerung dieser Schlußweise liefert auch die definierenden Relationen des Rings:

Offensichtlich verschwindet $\vartheta^4 - \tilde{\vartheta}^4$ in ∞ in mindestens 4. Ordnung und kann daher durch $\tilde{\tilde{\vartheta}}^4$ geteilt werden. Der Quotient ist eine Modulform vom Gewicht 0, mithin konstant. Auf diesem Weg beweist man die Jacobische Thetarelation

$$\vartheta^4 = \tilde{\vartheta}^4 + \tilde{\tilde{\vartheta}}^4.$$

Daher ist jede Modulform aus $[\Gamma[4, 8], r/2, v_\vartheta^r]$ Linearkombination von Monomen

$$\vartheta^\alpha \tilde{\vartheta}^\beta \tilde{\tilde{\vartheta}}^\gamma, \quad \alpha+\beta+\gamma = r, \quad 0 \leqq \alpha \leqq 3.$$

Die Anzahl dieser Monome ist

$$\begin{cases} 3, & \text{falls } r = 1; \\ 6, & \text{falls } r = 2; \\ 10, & \text{falls } r = 3; \\ 4r - 2, & \text{falls } r \geqq 4. \end{cases}$$

Andererseits liefert obiger Induktionsbeweis auch die Dimension der 16 Konstituenten von $[\Gamma[4, 8], r/2, v_\vartheta^r]$. Summiert man sie auf, so erhält man genau die Anzahl der Monome. Diese bilden also eine Basis.

References

[1] J. I. IGUSA, On Siegel modular forms of genus two II. Amer. J. Math. **86**, 392–412 (1964).
[2] J. I. IGUSA, On the graded ring of theta constants. Amer. J. Math. **88**, 221–236 (1966).

Eingegangen am 31. 10. 1991

Anschrift der Autoren:

R. Busam
E. Freitag
W. Karcher
Mathematisches Institut
Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
DW-6900 Heidelberg