Arch. Math., Vol. 40, 255–259 (1983)

0003-889X/83/4003-0255 $ 2.50/0


# Die Irreduzibilität der Schottkyrelation (Bemerkung zu einem Satz von J. Igusa)

Von

EBERHARD FREITAG

Wie üblich werde mit

$$\mathscr{A}_g = S_g/\Gamma_g;$$
$$S_g = \text{Siegelsche Halbebene } g\text{-ten Grades},$$
$$\Gamma_g = Sp(g, \mathbb{Z}) = \text{Siegelsche Modulgruppe } g\text{-ten Grades},$$

die *Siegelsche Modulmannigfaltigkeit* (= Modulmannigfaltigkeit aller $g$-dimensionalen Abelschen Varietäten vom Hauptpolarisationstypus) bezeichnet und mit

$$\mathscr{M}_g \subset \mathscr{A}_g$$

die *Modulmannigfaltigkeit der kompakten Riemannschen Flächen* vom Geschlecht $g$, welche wir uns als Untermannigfaltigkeit von $\mathscr{A}_g$ konstruiert denken (Periodenabbildung). Bekanntlich trägt $\mathscr{A}_g$ eine Struktur als quasiprojektive algebraische Varietät und $\mathscr{M}_g$ ist eine (i.allg. nicht abgeschlossene) irreduzible quasiprojektive Teilvarietät. Es gilt

$$\dim \mathscr{A}_g = \tfrac{1}{2} g(g+1) \quad \text{und} \quad \dim \mathscr{M}_g = 3g-3 \quad \text{für} \quad g \geqq 2.$$

Im Falle $g = 4$ ist die Kodimension von $\mathscr{M}_g$ in $\mathscr{A}_g$ gleich 1 und man kann erwarten, den Abschluß $\bar{\mathscr{M}}_g$ durch eine einzige Gleichung beschreiben zu können. Tatsächlich konstruierte F. Schottky eine Thetafunktion, welche auf $\mathscr{M}_3$ identisch verschwindet. Wie J. Igusa ausführte [6], ist diese Thetafunktion eine *Siegelsche Modulform vom Gewicht* 8 und zwar eine Spitzenform. Für die Definition dieser Spitzenform verweisen wir auf Igusas Arbeiten [5], [6], [7]. In der Arbeit [7] bewies Igusa den wichtigen Satz, daß der Nullstellendivisor von $f$ *irreduzibel* ist. Insbesondere gilt:

**Theorem** (J. Igusa). *Die Mannigfaltigkeit $\bar{\mathscr{M}}_3$ ist das genaue Nullstellengebilde der Schottkyschen Modulform.*

Igusas Beweis ist kompliziert und erfordert eine detaillierte Analyse der Modulform $f$. Es ist daher vielleicht von Interesse, daß man diesen Satz ganz anders beweisen kann, und zwar gilt

**Satz 1.** *Sei $f$ eine Spitzenform vom Gewicht $r \leqq 8$ zur vollen Siegelschen Modulgruppe 4-ten Grades, welche nicht identisch verschwindet. Der Nullstellendivisor von $f$ ist irreduzibel.*

In der Arbeit [2] wurde gezeigt, daß unter der Voraussetzung $g \geqq 8$ der Nullstellendivisor einer Modulform $f$ genau dann irreduzibel ist, wenn sich $f$ nicht als Produkt von Modulformen geringeren Gewichts schreiben läßt. Tatsächlich läßt sich die Voraussetzung $g \geqq 8$ abschwächen.

**Satz 2.** *Im Falle $g \geqq 3$ ist jeder nichtnegative Divisor auf $S_g/\Gamma_g$ der genaue Nullstellendivisor einer Siegelschen Modulform $f$, also einer holomorphen Funktion*

$$f\colon S_g \to \mathbb{C}$$

*mit dem Transformationsverhalten*

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^r f(Z) \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g .$$

*Dabei ist $r$ eine natürliche Zahl.*

Unter einem Divisor auf $\mathscr{A}_g$ verstehen wir hierbei eine formale, lokal endliche Summe abgeschlossener irreduzibler analytischer Teile von $\mathscr{A}_g$. Nach allgemeinen Fortsetzungssätzen und Algebraizitätssätzen ist jeder Divisor algebraisch, da $\mathscr{A}_g$ eine Kompaktifizierung $\bar{\mathscr{A}}_g$ besitzt, deren „Rand" $\bar{\mathscr{A}}_g - \mathscr{A}_g$ in $\bar{\mathscr{A}}_g$ die Kodimension $\geqq 2$ hat. Da die natürliche Projektion $S_g \to \mathscr{A}_g$ im Falle $g \geqq 3$ in der Kodimension 1 unverzweigt ist, entsprechen die Divisoren auf $\mathscr{A}_g$ den $\Gamma_g$-invarianten Divisoren auf $S_g$.

Beweis von Satz 2. Sei $\operatorname{Pic}\Gamma = H^1(\Gamma, \mathcal{O}(S_g)^*)$ die Gruppe der $\Gamma$-invarianten Divisorenklassen auf $S_g$, wobei $\Gamma$ eine mit $\Gamma_g$ kommensurable Gruppe bezeichne. In der Arbeit [2] wurde unter der Voraussetzung $g \geqq 3$ eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Pic}\Gamma \to H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to H^2(\Gamma, \mathcal{O}(S_g))$$

konstruiert. Diese resultiert aus der Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}(S_g) \to \mathcal{O}(S_g)^* \to 0$$

und aus

$$\boxed{H^1(\Gamma, \mathcal{O}(S_g)) = 0 \qquad (g \geqq 3)}\,.$$

Der Vollständigkeit halber erinnern wir kurz an den Beweis der letzten Aussage.

Diese Aussage ist äquivalent mit der *endlichen Erzeugbarkeit* der Gruppe $\operatorname{Pic}\Gamma$. Aus den erwähnten Algebraizitätssätzen folgt, daß die Abbildung

$$\operatorname{Pic}\tilde{\mathscr{A}}_g = H^1(\tilde{\mathscr{A}}_g, \mathcal{O}^*) \to \operatorname{Pic}\Gamma$$

surjektiv ist, wobei $\tilde{\mathscr{A}}_g$ irgendeine Desingularisierung von $\bar{\mathscr{A}}_g$ bezeichne. Es genügt daher zu zeigen, daß $\operatorname{Pic}\tilde{\mathscr{A}}_g$ endlich erzeugt ist und dies folgt aus

$$H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0\,.$$

Nun kann man Hodgetheorie anwenden und muß nur zeigen, daß der Vektorraum der holomorphen Differentiale verschwindet [3].

An dieser Stelle muß auf einen Irrtum in der Arbeit [3] hingewiesen werden. Dort wird behauptet, daß der Vektorraum der $\Gamma$-invarianten holomorphen Differentialformen vom Grade

$$0 < p < \frac{n(n+1)}{2} - n \qquad (n = g)$$

verschwindet. Dies ist nicht richtig, die dort verwendete Schlußweise zeigt nur

$$\Omega^{[p]}(S_n)^{\Gamma_n} = 0 \text{ für } 0 < p < n.$$

Der Fehler liegt darin, daß die Darstellung $\varrho^{[p]}$ (natürliche Darstellung von $Gl(n, \mathbb{C})$ auf $\Lambda^p(\mathrm{Symm}^2(\mathbb{C}))$ i. a. nicht irreduzibel ist, wie in [3] fälschlicherweise behauptet wird. Sie ist jedenfalls in dem hier benötigten Fall $p = 1$ irreduzibel.

Die Gruppe $\operatorname{Pic}\Gamma$ hat mindestens den Rang 1. Wenn $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ ebenfalls den Rang 1 hat, so ist die Faktorgruppe $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})/\operatorname{Pic}\Gamma$ endlich. Sie muß dann verschwinden, da sie in den $\mathbb{C}$-Vektorraum $H^2(\Gamma, \mathcal{O}(S_n))$ eingebettet ist. Wir erhalten:

$$\dim H^2(\Gamma, \mathbb{C}) = 1 \Rightarrow \operatorname{Pic}\Gamma \cong H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \text{endliche Gruppe}.$$

Die 1-Kozyklen aus $Z^1(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)^*)$ — sogenannte *Automorphiefaktoren* — sind dann kohomolog zu speziellen Faktoren

$$J(M, Z) = v(M) \det(CZ + D)^r, \quad r \text{ rational}.$$

Nach einem Satz von U. Christian (vgl. [8]) können solche Faktoren für $\Gamma = \Gamma_g$ nur existieren, wenn $r$ ganz ist. Dann ist $v$ ein Abelscher Charakter und wir erhalten

$$\operatorname{Pic}\Gamma \cong H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \Gamma_{ab}, \qquad \Gamma_{ab} = \Gamma/[\Gamma, \Gamma].$$

Die Faktorkommutatorgruppe der Siegelschen Modulgruppe ist im Falle $g \geqq 3$ trivial [8],

$$\Gamma_g = [\Gamma_g, \Gamma_g] \quad \text{für} \quad g \geqq 3.$$

Satz 2 ist nach diesen Vorbereitungen eine Folge von

$$\boxed{\dim H^2(\Gamma_g, \mathbb{C}) = 1 \quad \text{für} \quad g \geqq 3}.$$

Herr R. Beyl hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß man für die volle Modulgruppe $\Gamma = \Gamma_g$, $g \geqq 3$, den *Schurmultiplikator*

$$M\Gamma = H_2(\Gamma, \mathbb{Z})$$

berechnen kann und zwar gilt

**Hilfssatz 3.** *Der Schurmultiplikator der Siegelschen Modulgruppe ist*

$$H_2(\Gamma_g, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für} \quad g \geqq 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{für} \quad g = 3. \end{cases}$$

Wegen

$$H_2(\Gamma, \mathbb{C}) = H_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C},$$
$$H^2(\Gamma, \mathbb{C}) \cong \operatorname{Hom}(H_2(\Gamma, \mathbb{C}), \mathbb{C}),$$

folgt nach unseren Vorbereitungen

**Hilfssatz 4.** *Im Falle $g \geqq 3$ gilt*

$$H^2(\Gamma_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

(Ein erzeugendes Element ist die Chernsche Klasse des Automorphiefaktors

$$\det(CZ + D).)$$

Beweis von Hilfssatz 3 (nach einer brieflichen Mitteilung von R. Beyl). Der Fall $g = 3$ stammt von M. R. Stein [10]. Im Falle $g \geqq 4$ benutzt man die Steinbergerweiterung [9];

$$0 \to L(g, C_g) \to St(g, C_g) \to Sp(g, \mathbb{Z}) \to 0.$$

Nach M. R. Stein [9] verschwindet der Schurmultiplikator von $St(g, C_g)$, nach H. Behr [1] ist $L(g, C_g) \cong \mathbb{Z}$ zentral in $St(g, C_g)$. Hieraus folgt die Behauptung und damit auch Satz 2.

Beweis von Satz 1. Nach unseren Vorbereitungen genügt es zu zeigen, daß sich eine Spitzenform $f \neq 0$ vom Grade $g = 4$ und Gewicht $r \leqq 8$ nicht als Produkt von zwei Modulformen geringeren Gewichts schreiben läßt. Wir schließen indirekt, nehmen also

$$f = f_1 \cdot f_2; \quad \text{Gewicht von } f_j = r_j \quad (j = 1, 2),$$

an. Wir können $r_1 \leqq r_2$, insbesondere $r_1 \leqq 4$ annehmen.

Aus der Theorie der Modulformen dritten Grades ist bekannt [5]: (Ein einfacher, elementarer Beweis erscheint in [4].)

*Es existiert keine von 0 verschiedene Modulform dritten Grades, deren Gewicht kleiner als 4 ist.*

Im Falle $r_1 < 4$ ist also $f_1$ eine Spitzenform. Im Falle $r_1 = 4$ gilt auch $r_2 = 4$. Da das Produkt von $f_1$ und $f_2$ eine Spitzenform ist, muß eine der beiden Formen eine Spitzenform sein. Wir können also annehmen, daß $f_1$ eine Spitzenform (vom Gewicht $\leqq 4$) ist.

Mit elementaren Abschätzungen läßt sich aber beweisen [4], I 3.15:

*Es existiert keine von 0 verschiedene Spitzenform 4. Grades, deren Gewicht kleiner oder gleich 4 ist.*

Damit ist Satz 1 bewiesen.

**Literaturverzeichnis**

[1] H. Behr, Explizite Präsentation von Chevalleygruppen über $\mathbb{Z}$. Math. Z. **141**, 235–241 (1975).

[2] E. Freitag, Stabile Modulformen. Math. Ann. **230**, 197–211 (1977).

[3] E. Freitag, Ein Verschwindungssatz für automorphe Formen zur Siegelschen Modulgruppe. Math. Z. **165**, 11–18 (1979).

[4] E. Freitag, Siegelsche Modulfunktionen. Heidelberg-New York 1983.
[5] J. Igusa, Modular forms and projective invariants. Amer. J. Math. **89**, 817—855 (1967).
[6] J. Igusa, Schottky's invariant and quadratic forms. Christoffel Symposium, Basel-Boston-Stuttgart 1981.
[7] J. Igusa, On the irreducibility of Schottky's divisor. Preprint.
[8] H. Maass, Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe. Nachr. Akad. Wiss. **11**, Göttingen 1964.
[9] M. R. Stein, Generators, relations, and coverings of Chevalley groups over commutative rings. Amer. J. Math. **93**, 965—1004 (1971).
[10] M. R. Stein, The Schur multipliers of $\mathrm{Spin}_6(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Spin}_8(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Spin}_7(\mathbb{Z})$, and $F_4(\mathbb{Z})$. Math. Ann. **215**, 165—172 (1975).

Eingegangen am 8. 2. 1982

Anschrift des Autors:

Eberhard Freitag
Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 288
D-6900 Heidelberg 1