Math. Ann. 258, 419–440 (1982)

Mathematische Annalen

Die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten

E. Freitag

Mathematisches Institut der Universität, Im Neuenheimer Feld 288, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden explizite Formeln für die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten abgeleitet. Sie stellen eine Verallgemeinerung der in [1, 3] bewiesenen Formeln dar, wo gewöhnliche Thetareihen (ohne harmonische Koeffizienten) behandelt werden.

Die Formeln, die wir erhalten, werden besonders einfach für den Operator $T(p)$ (s. 4.5), p prim und scheinen selbst im Falle der elliptischen Modulgruppe neu zu sein. Ihr Beweis – selbst dieser Spezialfall! – stützt sich auf die Theorie der vektorwertigen singulären Siegelschen Modulformen. In der Arbeit [4] wurde gezeigt, daß jede vektorwertige singuläre Modulform in kanonischer Weise als Linearkombination von Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten darstellbar ist. Da Heckeoperatoren trivialerweise singuläre Modulformen in singuläre überführen, erhält man zunächst explizite Formeln für die Wirkung von Heckeoperatoren auf singuläre Thetareihen. Jede Thetareihe mit harmonischen Koeffizienten ist das Bild einer vektorwertigen singulären Modulform unter einem verallgemeinerten Φ-Operator. Die allgemeinen Formeln erhält man nun aus dem Vertauschungsgesetz zwischen diesem Φ-Operator und Heckeoperatoren. Dieses Vertauschungsgesetz wurde im Spezialfall skalarwertiger Modulformen von Žarkovskaja [7] bewiesen.

Ich beschränke mich in der vorliegenden Arbeit auf Modulformen zur vollen Siegelschen Modulgruppe. Daher können nur positiv definite Formen behandelt werden, welche durch unimodulare gerade Matrizen dargestellt werden.

Die Methode der singulären Modulformen ist stark verallgemeinerungsfähig. Sie ist auf allgemeinere Gruppen anwendbar, beispielsweise die Hilbert-Siegelsche Modulgruppe.

Es sollte noch darauf hingewiesen werden, daß in anderen Arbeiten, beispielsweise den Andrianovschen, der Operator $T(p)$ anders normiert ist.

1. Die Heckealgebra

Sei Γ eine Untergruppe der Gruppe Δ.

0025-5831/82/0258/0419/$04.40

Annahme. Jede Doppelnebenklasse $\Gamma g \Gamma$, $g \in \Delta$, enthält nur endlich viele Linksnebenklassen

$$\Gamma g \Gamma = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma g_j .$$

Dem Paar (Γ, Δ) ordnet man nach Shimura einen Ring

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(\Gamma, \Delta),$$

den Heckering des Paares (Γ, Δ) zu. Wir orientieren uns an der Darstellung Andrianovs [1].

Wir bezeichnen mit

1) $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\Gamma, \Delta)$ den von allen Linksnebenklassen $L = \Gamma g$, $g \in \Delta$, erzeugten freien $\mathbb{C}$-Modul.

2) $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\Gamma, \Delta)$ den von allen Doppelnebenklassen $T = \Gamma g \Gamma$, $g \in \Delta$, erzeugten freien $\mathbb{C}$-Modul.

Wir ordnen jeder Doppelnebenklasse

$$\Gamma g \Gamma = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma g_j \qquad \text{(disjunkte Zerlegung)}$$

das Element

$$j(\Gamma g \Gamma) = \sum_{j=1}^{h} \Gamma g_j \in \mathscr{L}$$

zu und dehnen j linear auf $\mathscr{H}$ aus

$$j \colon \mathscr{H} \to \mathscr{L} .$$

Die Gruppe Δ (erst recht Γ) operiert auf der Menge der Linksnebenklassen durch Multiplikation von rechts

$$(L, g) \to Lg .$$

Wir dehnen diese Operation linear auf $\mathscr{L}$ aus.

1.1 Hilfssatz. *Die Abbildung j definiert einen Isomorphismus von $\mathscr{H}$ auf den Untermodul der Γ-Invarianten von $\mathscr{L}$*

$$j \colon \mathscr{H} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^{\Gamma} .$$

Man definiert eine bilineare Abbildung

$$\mathscr{H} \times \mathscr{L} \to \mathscr{L}$$

durch

$$(\Gamma g \Gamma) \cdot (\Gamma g_0) = \sum_{j=1}^{h} \Gamma g_j g_0 ,$$

$$\Gamma g \Gamma = \bigcup_{j=1}^{h} \Gamma g_j .$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten ab. Das Produkt eines Elementes $T \in \mathscr{H}$ mit einem Γ-invarianten Element $L \in \mathscr{L}^{\Gamma}$ ist ebenfalls Γ-invariant,

$$\mathscr{H} \times \mathscr{L}^{\Gamma} \to \mathscr{L}^{\Gamma} .$$

Mittels des Isomorphismus j (1.1) erhält man eine bilineare Abbildung

$$\mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{H}.$$

Man zeigt leicht

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot L = T_1 \cdot (T_2 \cdot L) \quad \text{für} \quad T_1, T_2 \in \mathscr{H}, L \in \mathscr{L}$$

und folgert hieraus

1.2 Hilfssatz. *Durch die eingeführte Multiplikation wird $\mathscr{H}$ eine assoziative $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement*

$$1_{\mathscr{H}} = \Gamma e \Gamma = \Gamma \qquad (e\text{: neutrales Element}).$$

Es seien nun speziell

1) $\Delta = \Delta_n$ die Gruppe der rationalen symplektischen Ähnlichkeitsmatrizen

$$\Delta_n = \{M \in \mathrm{Gl}(2n, \mathbb{Q}),\ M'IM = lI,\ l > 0\}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\Gamma = \Gamma_n = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ die Siegelsche Modulgruppe.

Es ist nicht sehr schwer zu zeigen, daß in jeder Linksnebenklasse

$$\Gamma_n M, \quad M \in \Delta_n,$$

ein Repräsentant der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

enthalten ist. Hieraus kann man folgern, daß in jeder Doppelnebenklasse $\Gamma_n M \Gamma_n$, $M \in \Delta_n$, nur endlich viele Linksnebenklassen enthalten sind.

Die Heckealgebra

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}^{(n)} = \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$$

ist also wohldefiniert.

Ersten Aufschluß über die Struktur von $\mathscr{H}^{(n)}$ gibt der *symplektische Elementarteilersatz.*

1.3 Satz. *In jeder Doppelnebenklasse*

$$\Gamma_n M \Gamma_n, \quad M \in \Delta_n,$$

ist ein eindeutig bestimmter Repräsentant der folgenden Form enthalten:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & a_n & & & \\ \hline & & & d_1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & d_n \end{array}\right], \quad a_j,\ d_j \in \mathbb{N},$$

$$a_1 | a_2,\ a_2 | a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} | a_n,$$

$$a_n | d_n,$$

$$d_n | d_{n-1},\ d_{n-1} | d_{n-2},\ \ldots,\ d_2 | d_1.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß durch

$$\Gamma_n M \Gamma_n \to \Gamma_n M' \Gamma_n$$

ein Antiautomorphismus des Heckerings definiert wird. Aus 1.3 folgt

$$\Gamma_n M \Gamma_n = \Gamma_n M' \Gamma_n$$

und daher

1.4 Satz. *Der Heckering*

$$\mathscr{H}^{(n)} = \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_n)$$

ist kommutativ.

Sei p eine Primzahl. Unter der p-Komponente von $\mathscr{H}^{(n)}$ versteht man den Unterring

$$\mathscr{H}_p^{(n)} = \mathscr{H}(\Gamma_n, \Delta_{n,p}),$$

$$\Delta_{n,p} = \Delta_n \cap \mathrm{Gl}\left(2n, \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right).$$

1.5 Satz. *Die Heckealgebra $\mathscr{H}^{(n)}$ ist das Tensorprodukt ihrer p-Komponenten*:

$$\mathscr{H}^{(n)} = \bigotimes_{p \text{ prim}} \mathscr{H}_p^{(n)}.$$

Der Beweis ergibt sich as der trivialen Formel

a) $(\Gamma_n M \Gamma_n) \cdot (\Gamma_n l E \Gamma_n) = \Gamma_n l M \Gamma_n$

und aus der Formel

b) $(\Gamma_n M \Gamma_n) \cdot (\Gamma_n N \Gamma_n) = \Gamma_n M N \Gamma_n$,

falls

$$M, N \text{ ganz} \quad \text{und} \quad (\det M, \det N) = 1.$$

Die letztere Formel beweist man mittels des Elementarteilersatzes 1.3.

Es kommt nun darauf an, die Struktur der p-Komponente $\mathscr{H}_p^{(n)}$ für eine feste Primzahl p zu untersuchen.

Bezeichnung. Sei l eine natürliche Zahl,

$$O_n(l) = \{M = M^{(2n)} \text{ ganz}, \; M' I M = l I\}.$$

Dies ist eine Teilmenge von Δ_n, welche in endlich viele Doppelnebenklassen modulo Γ_n zerfällt. Die Summe der in $O_n(l)$ enthaltenen Doppelnebenklassen wird mit

$$T(l) = T^{(n)}(l) \in \mathscr{H}^{(n)}$$

bezeichnet.

Aus dem Elementarteilersatz 1.3 folgt

1.6 Hilfssatz. *Sei p eine Primzahl.*

1) *Die Menge $O_n(p)$ besteht aus einer einzigen Doppelnebenklasse*

$$T(p) = T^{(n)}(p) = O_n(p) = \Gamma_n \begin{pmatrix} E^{(n)} & 0 \\ 0 & pE^{(n)} \end{pmatrix} \Gamma_n.$$

2) *Die Menge $O_n(p^2)$ besteht aus $n+1$ Doppelnebenklassen*

$$T(p^2) = T^{(n)}(p^2) = \sum_{i+k=n} T_{ik}(p^2)$$

$$T_{ik}(p^2) = T_{ik}^{(n)}(p^2) = \Gamma_n \left[\begin{array}{cc|cc} E^{(i)} & 0 & & \\ 0 & pE^{(k)} & & 0 \\ \hline & & p^2E^{(i)} & 0 \\ & 0 & 0 & pE^{(k)} \end{array}\right] \Gamma_n .$$

Bezeichnung. $\check{\mathscr{L}}_p^{(n)}$ besteht aus den Linearkombinationen von Linksnebenklassen

$$\Gamma_n M \quad \text{mit } \textit{ganzem} \quad M \in \Delta_{np}.$$

$\check{\mathscr{H}}_p^{(n)}$ bestehe entsprechend aus den Linearkombinationen von Doppelnebenklassen

$$\Gamma_n M \Gamma_n \quad \text{mit } \textit{ganzem} \quad M \in \Delta_{np}.$$

Offensichtlich ist $\check{\mathscr{H}}_p^{(n)}$ ein Unterring von $\mathscr{H}_p^{(n)}$ und es gilt

$$\mathscr{H}_p^{(n)} = \check{\mathscr{H}}_p^{(n)} [T_p^{-1}], \qquad T_p = \Gamma_n (pE) \Gamma_n .$$

In der Bezeichnung von 1.6 ist

$$T_p = T_{on}(p^2).$$

Von Shimura [6] stammt

1.7 Satz. *Die $\mathbb{C}$-Algebra $\check{\mathscr{H}}_p^{(n)}$ wird von den $n+1$ Elementen*

$$T(p), \quad T_{ik}(p^2), \quad i+k=n, \quad 0 \leq i < n,$$

erzeugt. Diese sind algebraisch unabhängig.

In unseren Anwendungen reicht dieser Struktursatz nicht aus. Wir benötigen detaillierte Information über die Zerlegung von Doppel- in Linksnebenklassen. Dazu konstruieren wir eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$P: \check{\mathscr{L}}_p^{(n)} \to \mathbb{C}[X_0, X_0^{-1}, \ldots, X_n^{-1}] \quad (X_0, \ldots, X_n \text{ seien Unbestimmte}).$$

Sei

$$\Gamma_n M, \quad M \in \Delta_{np}, \quad M'IM = p^{k_0} I$$

eine Linksnebenklasse. Wir können den Repräsentanten M in der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p^{k_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p^{k_n} \end{pmatrix}$$

ansetzen. Die Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ sind eindeutig bestimmt. Wir können der Linksnebenklasse daher das Monom

$$P(\Gamma_n M) = (\det A)^{n+1} X_0^{-k_0} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{X_j}{p^j}\right)^{k_j}$$

zuordnen und diese Abbildung linear auf $\mathscr{L}_p^{(n)}$ ausdehnen. Offensichtlich gilt

$$P(TL)=P(T)\,P(L) \quad \text{für} \quad T\in\mathscr{H}_p^{(n)},\ L\in\mathscr{L}_p^{(n)}.$$

Die Einschränkung von P auf die Heckealgebra definiert also einen Homomorphismus, welchen wir ebenfalls mit P bezeichnen

$$P\colon \mathscr{H}_p^{(n)}\to\mathbb{C}\,[X_0^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}].$$

Das Bild von $\mathscr{H}_p^{(n)}$ unter P ist invariant unter einer gewissen Gruppe W_n. Sei

$$w_j\colon \mathbb{C}\,[X_0^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}]\to\mathbb{C}\,[X_0^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}], \quad 1\leqq j\leqq n,$$

der durch

$$\begin{aligned} w_j(X_0)&=\frac{X_0}{X_j}\\ w_j(X_j)&=X_j^{-1}\\ w_j(X_\nu)&=X_\nu \quad \text{für} \quad \nu\neq 0,j \end{aligned}$$

definierte Automorphismus. Mit W_n bezeichnen wir die Gruppe, welche von $w_1,\dots,w_n$ und von den Permutationen der Variablen $X_1,\dots,X_n$ erzeugt wird. Diese Gruppe ist endlich. Der Unterring aller W_n-Invarianten werde mit

$$\mathbb{C}\,[X_0^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}]^{W_n}$$

bezeichnet. Spezielle W_n-Invarianten sind

a) $Y_0=X_0^{-2}X_1\dots X_n$.

b) $Y_1=X_0^{-1}(E_0+\dots+E_n)$, wobei E_i das i-te elementar-symmetrische Polynom bezeichne, also

$$\begin{aligned} E_0&=1\\ E_1&=X_1+\dots+X_n\\ &\ \vdots\\ E_n&=X_1\dots X_n. \end{aligned}$$

c) $Y_{i+1}=\sum\limits_{\substack{\varepsilon_\nu\in\{0,1,-1\}\\ |\varepsilon_1|+\dots+|\varepsilon_n|=i}} X_1^{\varepsilon_1}\dots X_n^{\varepsilon_n} \quad (1\leqq i<n)$.

Die folgenden beiden Sätze stammen aus Žarkovskajas Arbeit [7].

1.8 Hilfssatz. *Die Funktionen $Y_0,\dots,Y_n$ sind algebraisch unabhängig. Es gilt*

$$\mathbb{C}\,[X_0^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}]^{W_n}=\mathbb{C}\,[Y_0,\dots,Y_n]\,[Y_0^{-1}].$$

1.9 Satz. *Die Abbildung P definiert einen Isomorphismus*

$$P\colon \mathscr{H}_p^{(n)}\to\mathbb{C}\,[X_0^{\pm1},\dots,X_n^{\pm1}]^{W_n}.$$

Der Beweis erfolgt durch eine detaillierte Analyse der Zerlegung von $O_n(p)$, $O_n(p^2)$ in Linksnebenklassen in Verbindung mit Shimuras Satz 1.7. Die Schwierigkeit hierbei ist der Nachweis, daß das Bild der Heckealgebra unter P bezüglich W_n invariant ist. Ein anderer Beweis stützt sich auf p-adische Integration [6].

2. Vektorwertige Modulformen und Heckeoperatoren

Eine analytische Funktion

$$f: S_n \to \mathscr{X}$$

auf der Siegelschen Halbebene

$$S_n = \{Z = Z^{(n)} = Z' = X + iY,\ Y > 0\}$$

mit Werten in einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum $\mathscr{X}$ heißt Modulform bezüglich der rationalen Darstellung

$$\varrho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X}),$$

falls sie das Transformationsverhalten

$$f(M\langle Z\rangle) = \varrho(CZ+D)\, f(Z) \qquad \text{für} \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$$

besitzt und falls sie im Falle $n=1$ einer gewissen Wachstumsbedingung im Unendlichen genügt.

Diese Modulformen bilden einen endlichdimensionalen Vektorraum, welchen wir mit $[\Gamma_n, \varrho]$ bezeichnen.

Wir verwenden die Bezeichnung

$$(f\,|\,M)\langle Z\rangle = (f\,\underset{\varrho}{|}\,M)\langle Z\rangle = \varrho(CZ+D)^{-1} f(M\langle Z\rangle),$$

wobei M eine reelle projektive symplektische Matrix sei, d.h.

$$M'IM = lI;\ l > 0.$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$(f\,|\,M)\,|\,N = f\,|\,MN.$$

Das für eine Modulform charakteristische Transformationsverhalten kann in der Form

$$f\,\underset{\varrho}{|}\,M = f \qquad \text{für} \qquad f \in \Gamma_n$$

geschrieben werden.

Ist f eine Modulform, so hängt $f\,|\,N$ nur von der Linksnebenklasse $L = \Gamma_n N$ ab. Wir schreiben

$$f\,|\,L = f\,|\,N$$

und dehnen diese Operation linear auf $\mathscr{L}^{(n)}$ aus. Ist $T \in \mathscr{H}^{(n)}$ ein Element der Heckealgebra, so schreiben wir

$$f\,|\,T = f\,|\,j(T) \qquad (\text{s. } 1.1).$$

Offensichtlich gilt

$$(f\,|\,T)\,|\,L = f\,|\,TL.$$

Hieraus ergibt sich:

2.1 Bemerkung. Die Heckealgebra $\mathscr{H}^{(n)}$ operiert auf dem Vektorraum $[\Gamma_n, \varrho]$, d.h.

Durch $(f, T) \to f|T$ wird ein Algebrenhomomorphismus

$$\mathscr{H}^{(n)} \to \operatorname{End}[\Gamma_n, \varrho]$$

definiert.

Modulformen sind periodisch;

$$f(Z+S) = f(Z);\ S = S' \text{ ganz},$$

besitzen also eine Fourierentwicklung

$$f(Z) = \sum_{H = H' \text{ ganz}} a(H)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}.$$

Bekanntlich gilt

$$a(H) \neq 0 \Rightarrow H \geqq 0$$

und hieraus folgt die Existenz des Grenzwerts

$$(f|\Phi)(Z) = \lim_{t \to \infty} f\begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \sum_{H = H^{(n-1)}} a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}.$$

Offensichtlich ist $f|\Phi$ eine Modulform bezüglich der Darstellung

$$(\varrho|\Phi)(A) := \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad A \in \operatorname{Gl}(n-1, \mathbb{C}).$$

Die Darstellung $\varrho|\Phi$ braucht nicht irreduzibel zu sein, selbst wenn ϱ irreduzibel ist. Es ist daher sinnvoll, an Φ einen weiteren Reduktionsoperator anzuschließen (nämlich Projektionsoperatoren).

2.2 Bemerkung. Gegeben seien

a) eine rationale Darstellung

$$\varrho: \operatorname{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \operatorname{Gl}(\mathscr{Z}),$$

b) eine rationale Darstellung

$$\varrho_0: \operatorname{Gl}(n-1, \mathbb{C}) \to \operatorname{Gl}(\mathscr{Z}_0),$$

c) eine lineare Abbildung

$$R: \mathscr{Z} \to \mathscr{Z}_0$$

mit der Eigenschaft

$$R \circ \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \varrho_0(A) \circ R \qquad \text{für} \qquad A \in \operatorname{Gl}(n-1, \mathbb{C}).$$

Durch

$$f|\Phi_R = R \circ f|\Phi$$

wird eine lineare Abbildung

$$[\Gamma_n, \varrho] \to [\Gamma_{n-1}, \varrho_0]$$

definiert.

2.3 Hilfssatz. *Wenn unter den Voraussetzungen von 2.2 die Darstellungen ϱ und ϱ_0 irreduzibel sind, so existiert eine ganze Zahl r mit der Eigenschaft*

$$R \circ \varrho \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = a^r \circ R.$$

Beweis. Nach dem „Schurschen Lemma" operieren $\varrho(aE^{(n)})$, $\varrho_0(a^{-1}E^{(n-1)})$ durch Multiplikation mit einem Skalar. Nach Voraussetzung gilt

$$R \circ \varrho \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \varrho_0(a^{-1}E) \circ R \circ \varrho(aE).$$

2.4 Hilfssatz. *Ist f eine Modulform bezüglich der rationalen Darstellung ϱ, so gilt*

$$\varrho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{z} & E \end{pmatrix} f | \Phi(Z) = f | \Phi(Z) \qquad \textit{für } \mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

Beweis. Da diese Identität rational in $\mathfrak{z}$ ist, braucht man sie nur für ganze $\mathfrak{z}$ zu beweisen. In diesem Falle ist die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{z} & E \end{pmatrix}$$

unimodular und es gilt

$$f(Z[U^{-1}]) = \varrho(U) f(Z).$$

Die in 2.4 behauptete Formel bedeutet dann

$$\lim_{t \to \infty} f \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \lim_{t \to \infty} f \begin{pmatrix} it + Z[\mathfrak{z}] & -\mathfrak{z}'Z \\ -Z\mathfrak{z} & Z \end{pmatrix}.$$

Man beweist diese Formel mittels der Fourierentwicklung von f.

Zur Formulierung des Vertauschungsgesetzes konstruieren wir einen von ϱ abhängigen Homomorphismus

$$\mathscr{H}^{(n)} \to \mathscr{H}^{(n-1)}, \qquad T \to T^*.$$

Das Vertauschungsgesetz wird dann die Form

$$f | T | \Phi = f | \Phi | T^*$$

haben.

Es ist zweckmäßig, das Vertauschungsgesetz zunächst auf dem Niveau der Linksnebenklassen abzuleiten. Jeder Linksnebenklasse

$$L = \Gamma_n M, \qquad M \in \Delta_n,$$

wurde ein Operator

$$[\Gamma_n, r] \to \{f : S_n \to \mathfrak{X}\}, \qquad f \to f | L$$

zugeordnet. Im allgemeinen ist $f|L$ keine Modulform zur vollen Siegelschen Modulgruppe. Der Operator

$$(f|L) | \Phi(Z) = \lim_{t \to \infty} (f|L) \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

kann auch in diesem Falle gebildet werden.

Wir wählen den Repräsentanten M in der Form

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ * & D_2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} * & * \\ * & B_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$M_2=\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

ist in Δ_{n-1} enthalten. Die Linksnebenklasse

$$L_2=\Gamma_{n-1} M_2$$

ist durch $L=\Gamma_n M$ eindeutig festgelegt. Es gilt

$$(f\,|\,L)\,|\,Z)=\varrho(D)^{-1} f\left(\frac{1}{l} Z[A']+S\right), \qquad S=A^{-1}B,$$

sowie

$$\begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ \mathfrak{a} & A_2' \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} i a_1^2 t+Z[\mathfrak{a}] & \mathfrak{a}' Z A_2' \\ \hline * & Z[A_2'] \end{array}\right).$$

Hieraus ergibt sich mittels der Fourierentwicklung

$$(f\,|\,L\,|\,\Phi)(Z)=\varrho(D)^{-1}(f\,|\,\Phi)\left(\frac{1}{l} Z[A_2']+S_2\right), \qquad S_2=A_2^{-1} B_2.$$

Wegen Hilfssatz 2.4 darf man in dieser Formel

$$D \text{ durch } \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

ersetzen.

$$(f\,|\,L\,|\,\Phi)(Z)=\varrho\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}^{-1} \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}(f\,|\,\Phi\,|\,L_2)(Z).$$

Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit (2.3) machen wir die

Annahme. Es existiert eine ganze Zahl r mit der Eigenschaft

$$R\circ\varrho\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}=a^r\circ R.$$

Unter den Voraussetzungen von 2.2 erhalten wir dann

$$\boxed{\begin{gathered} f\underset{\varrho}{|}L\,|\,\Phi_R=f\,|\,\Phi_R\underset{\varrho_0}{|}L^*, \\ L^*=d_1^{-r} L_2. \end{gathered}}$$

2.5 Satz. *Gegeben seien*

a) *eine rationale Darstellung*

$$\varrho : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}),$$

b) *eine rationale Darstellung*

$$\varrho_0 : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}_0),$$

c) *eine lineare Abbildung*

$$R : \mathscr{Z} \to \mathscr{Z}_0$$

mit den Eigenschaften

1) $R \circ \varrho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \varrho_0(A) \circ R, \qquad A = A^{(n-1)},$

2) $R \circ \varrho\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = a^r R \quad (r \in \mathbb{Z}).$

Für jede Primzahl p existiert ein surjektiver Algebrenhomomorphismus

$$\mathscr{H}_p^{(n)} \to \mathscr{H}_p^{(n-1)}$$
$$T \to T^*$$

mit der Eigenschaft

$$f\,|\,T\,|\,\Phi_R = f\,|\,\Phi_R\,|\,T^*.$$

Dieser Algebrenhomorphismus kann explizit auf dem Niveau der P-Polynome beschrieben werden: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} T & \mathscr{H}_p^{(n)} & \xrightarrow[P]{\sim} & \mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_n][Y_0^{-1}] \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ T^* & \mathscr{H}_p^{(n-1)} & \xrightarrow[P]{\sim} & \mathbb{C}[Y_0, \dots, Y_{n-1}][Y_0^{-1}] \end{array}$$

ist kommutativ, wenn man den rechten Vertikalpfeil durch

$$\begin{aligned} &Y_0^{(n)} \to p^{-r-n}\, Y_0^{(n-1)}, \\ &Y_1^{(n)} \to (p^{-r} + p^{-n})\, Y_1^{(n-1)}, \\ &Y_2^{(n)} \to Y_2^{(n-1)} + p^{n-r} + p^{r-n}, \\ &Y_j^{(n)} \to Y_j^{(n-1)} + (p^{n-r} + p^{r-n})\, Y_{j-1}^{(n-1)}, \quad 2 < j < n, \\ &Y_n^{(n)} \to 0 \end{aligned}$$

definiert.

Die Zerlegung von $O_n(p)$ in Linksnebenklassen kann explizit beschrieben werden (s. Abschn. 4):

$$P(T(p)) = p^{\frac{n(n+1)}{2}} X_0^{-1} (E_0 + \dots + E_n).$$

Man erhält als Spezialfall von Satz 2.5:

2.6 Satz. *Unter den Voraussetzungen von 2.5 gilt*

$$f \,|\, T^{(n)}(p) \,|\, \Phi = (1+p^{n-r})\, f \,|\, \Phi \,|\, T^{(n-1)}(p).$$

3. Die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen

Eine Polynomfunktion

$$P: M_{m,n}(\mathbb{C}) \to \mathscr{X}$$

heißt *harmonische Form bezüglich der rationalen Darstellung*

$$\varrho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X}),$$

wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) $P(XA) = \varrho(A')\, P(X) \quad$ für $\quad A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$.

b) $\Delta P(X) = \sum\limits_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_{ij}^2} = 0.$

Jeder positiv definiten reellen Matrix $S = S^{(m)}$ ordnet man die Thetareihe

$$\vartheta_{S,P}(Z) = \sum_{G \text{ ganz}} P(S^{1/2} G)\, e^{\pi i \mathrm{Sp}(S[G] Z)}$$

zu, wobei $S^{1/2}$ die eindeutig bestimmte positiv definite Wurzel von S bezeichne.

3.1 Hilfssatz. *Sei*

$$S = S^{(2r)} = S' > 0$$

eine positiv definite, gerade, unimodulare Matrix und sei

$$P: M_{2r,n}(\mathbb{C}) \to \mathscr{X}$$

eine harmonische Form bezüglich der rationalen Darstellung

$$\varrho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X}).$$

Die Thetareihe

$$\vartheta_{S,P}(Z) = \sum P(S^{1/2} G)\, e^{\pi i \mathrm{Sp}(S[G] Z)}$$

ist dann eine Modulform bezüglich der Darstellung

$$A \to (\det A)^r \varrho(A).$$

Von besonderem Interesse ist der Fall $2r < n$. Dann ist die Thetareihe $\vartheta_{S,P}(Z)$ singulär.

3.2 Definition. Eine (vektorwertige) Modulform

$$f(Z) = \sum a(H)\, e^{\pi i \mathrm{Sp}(HZ)}$$

heißt singulär, falls die Bedingung

$$a(H) \neq 0 \Rightarrow \det H = 0$$

erfüllt ist.

In der Arbeit [4] wurde bewiesen, daß jede singuläre Modulform in kanonischer Weise als Linearkombination von Thetareihen darstellbar ist. Aus Satz 3.2 (mit Zusatz) dieser Arbeit folgt unmittelbar:

3.3 Satz. *Sei*

$$f(Z) = \sum_{H = H^{(n)} \geqq 0,\, H \text{ gerade}} a(H)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}$$

eine nicht konstante singuläre Modulform bezüglich einer irreduziblen rationalen Darstellung

$$\varrho : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}).$$

Sei r die größte ganze Zahl, so daß die Darstellung

$$\check{\varrho}(A) = (\det A)^{-r} \varrho(A)$$

polynomial ist. Es gilt

$$0 < 2r < n, \qquad r \equiv 0 \bmod 4.$$

Wir bezeichnen mit $S_1, \ldots, S_h$ ein Vertretersystem der Klassen positiver gerader Matrizen $S = S^{(2r)}$ der Determinante 1. *Das Polynom*

$$P_\nu(X) = E(S_\nu)^{-1}\, \check{\varrho}(X' S_\nu^{-1/2}, 0)\, a\begin{pmatrix} S_\nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \leqq \nu \leqq h,$$

$$E(S_\nu) = \# \{ U \in \mathrm{Gl}(2r, \mathbb{Z}),\ U' S_\nu U = S_\nu \},$$

ist eine harmonische Form bezüglich der Darstellung $\check{\varrho}$ und es gilt

$$f = \sum_{\nu=1}^{h} \vartheta_{S_\nu, P_\nu}.$$

Die Wirkung eines Heckeoperators

$$T \in \mathscr{H}^{(n)}, \qquad j(T) = \sum_{j=1}^{l} c_j \Gamma_n M_j, \qquad M_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ 0 & D_j \end{pmatrix}$$

auf eine Modulform

$$f \in [\Gamma_n, \varrho]$$

ist definitionsgemäß durch die Formel

$$(f \mid T)(Z) = \sum_{j=1}^{l} c_j\, \varrho(D_j)^{-1} f((A_j Z + B_j) D_j^{-1})$$

gegeben. Die Fourierkoeffizienten von

$$(f \mid T)(Z) = \sum_{H = H' \geqq 0,\, H \text{ gerade}} a_T(H)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}$$

erhält man aus denen von

$$f(Z)=\sum a(H)\,e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}$$

vermöge

$$a_T(H)=\sum_{\substack{1\leqq j\leqq l\\ D_jHA_j^{-1}\text{ gerade}}} c_j\,\varrho(D_j)^{-1}\,a(D_jHA_j^{-1})\,e^{\pi i \operatorname{Sp}(HA_j^{-1}B_j)}$$

Heckeoperatoren führen demnach singuläre Modulformen in singuläre Modulformen über.

3.4 Satz. *Gegeben seien*

1) *eine positive gerade Matrix* $S=S^{(2r)}$ *der Determinante* 1;

2) *eine harmonische Form* $P(X^{(2r,n)})$ *bezüglich einer rationalen Darstellung*

$$\check{\varrho}:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})\to Gl(\mathscr{X});$$

3) *ein Heckeoperator*

$$T\in\mathscr{H}^{(n)},\qquad j(T)=\sum_{j=1}^{l} c_j\Gamma_n M_j,\qquad M_j=\begin{pmatrix}A_j & B_j\\ 0 & D_j\end{pmatrix}.$$

Im Falle $n>2r$ *gilt*

$$\vartheta_{S,P}|T=\sum_{\nu=1}^{h}\vartheta_{S_\nu,P_\nu}.$$

Hierbei durchlaufe $S_\nu=S_\nu^{(2r)}$; $\nu=1,\ \dots,\ h$, *ein Vertretersystem der Klassen* $2r$*-reihiger positiver gerader Matrizen der Determinante* 1. *Die Koeffizienten* P_ν, $1\leqq\nu\leqq h$, *sind durch*

$$\begin{aligned}&P_\nu(X)\cdot E(S_\nu)\\&=\sum_{j=1}^{1}\ \sum_{\substack{G\text{ ganz}\\ S[G]=D_j\begin{pmatrix}S_\nu&0\\0&0\end{pmatrix}A_j^{-1}}} c_j(\det D_j)^{-r}\,e^{\pi i\operatorname{Sp}\left\{\begin{pmatrix}S_\nu&0\\0&0\end{pmatrix}A_j^{-1}B_j\right\}}\cdot P\left(S^{1/2}GD_j'^{-1}\begin{pmatrix}S_\nu^{-1/2}\cdot X\\ 0\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

definiert und stellen ebenfalls harmonische Formen bezüglich $\check{\varrho}$ *dar.*

Beweis. Da man jede rationale Darstellung als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben kann, braucht man Satz 3.4 nur für irreduzible $\check{\varrho}$ zu beweisen. Nach Voraussetzung ($n>2r$) ist $\vartheta_{S,P}$ singulär. Da dann auch $\vartheta_{S,P}|T$ singulär ist, folgt die Behauptung mittels 3.3. Man muß hierbei beachten, daß die in 3.3 und 3.4 auftretenden Zahlen r übereinstimmen, wenn P nicht identisch verschwindet. Tatsächlich folgt aus der Irreduzibilität von $\check{\varrho}$ und aus der Existenz einer nicht identisch verschwindenden Form P, daß $\check{\varrho}$ polynomial ist. Im Falle $2r>n$ folgt, daß $\check{\varrho}$ nicht auf der Determinantenfläche ($\det A=0$) verschwinden kann.

3.5 Satz. *Gegeben seien*

1) *eine positive gerade Matrix* $S=S^{(2r)}$ *der Determinante* 1;

2) *eine harmonische Form* $P(X^{(2r,n)})$ *bezüglich einer rationalen Darstellung*

$$\check{\varrho}: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X});$$

3) *ein Heckeoperator* $T \in \mathscr{H}^{(n)}$.

Mit $S_1, \ldots, S_h$ *werde ein Vertretersystem der Klassen* $2r$*-reihiger positiver gerader Matrizen der Determinante* 1 *bezeichnet. Es gilt eine Formel*

$$\vartheta_{S,P} | T = \sum_{\nu=1}^{h} \vartheta_{S_\nu, P_\nu}.$$

Hierbei sind $P_1, \ldots, P_h$ *harmonische Formen bezüglich der Darstellung* $\check{\varrho}$. *Diese Formen sind in dem von den Funktionen*

$$X \to P(AX), \qquad A \in \mathrm{Gl}(2r, \mathbb{C})$$

erzeugten Vektorraum enthalten.

Der Beweis erfolgt bei festem S durch „verkehrte Induktion" ($n \to n-1$). Als Induktionsbeginn kann ein beliebiges $n > 2r$ gewählt werden (Satz 3.4).

Sei $P_0(X^{(2r, n-1)})$ eine harmonische Form bezüglich der Darstellung

$$\check{\varrho}_0: \mathrm{Gl}(n-1, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X}_0).$$

Wir stellen die Thetareihe ϑ_{S,P_0} als Φ-Thransformierte einer Thetareihe n-ten Grades dar und benutzen hierzu den in [4, (1.4)] bewiesenen Hochhebungssatz:

Es existieren

1) eine rationale Darstellung

$$\check{\varrho}: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X}),$$

2) eine lineare Abbildung

$$R: \mathscr{X} \to \mathscr{X}_0,$$

$$R \circ \check{\varrho}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \check{\varrho}_0(A) \circ R,$$

3) eine bezüglich $\check{\varrho}$ harmonische Form $P(X^{(2r,n)})$ mit der Eigenschaft

$$P_0(X) = R(P(0, X)).$$

Es gilt dann

$$\vartheta_{S,P} | \Phi_R = \vartheta_{S,P_0}.$$

Zum Beweis des Satzes kann man annehmen, daß $\check{\varrho}_0$ irreduzibel ist. Man kann dann erreichen, daß auch $\check{\varrho}$ irreduzibel ist, indem man $\check{\varrho}$ durch eine geeignete irreduzible Komponente ersetzt. Dann ist auch die Voraussetzung 2) aus Satz 2.5 erfüllt.

Ist $T_0 \in \mathscr{H}^{(n-1)}$ ein Heckeoperator $(n-1)$-ten Grades, so findet man aufgrund Satz 2.5 einen Operator n-ten Grades T mit der Eigenschaft

$$\vartheta_{S,P} | T | \Phi_R = \vartheta_{S,P} | \Phi_R | T_0$$

oder

$$\vartheta_{S,P_0} | T_0 = \vartheta_{S,P} | T | \Phi_R.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\vartheta_{S,P} | T = \sum_{\nu=1}^{h} \vartheta_{S_\nu, P_\nu}$$

mit harmonischen Formen P_ν, welche sich linear durch die Polynome

$$X \to P(AX), \qquad A \in \mathrm{Gl}(2r, \mathbb{C}),$$

ausdrücken lassen. Dann gilt

$$\vartheta_{S,P_0} | T_0 = \sum_{\nu=1}^{h} \vartheta_{S_\nu, P_{0\nu}}$$

mit

$$P_{0\nu}(X) = P_\nu(0, X).$$

Dies sind – wie behauptet – harmonische Polynome, welche sich linear durch die Polynome

$$X \to P(A \cdot (0, X)) = P_0(AX)$$

ausdrücken lassen.

Alle Schritte beim Beweis von Satz 3.5 sind konstruktiv. Wenn man die einzelnen Konstruktionsschritte nachvollzieht, erhält man *explizite Formeln für die Wirkung von Heckeoperatoren auf Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten.*

3.6 Satz. *Man darf in Satz 3.4 die Bedingung „$n > 2r$" durch „$n \geqq 2r$" ersetzen. Im Falle $n = 2r$ lautet die Formel*

$$P_\nu(X) \cdot E(S_\nu) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{G \text{ ganz} \\ S[G] = D_j S_\nu A_j^{-1}}} c_j (\det D_j)^{-r} e^{\pi i \mathrm{Sp}(S_\nu A_j^{-1} B_j)} P(S^{1/2} G D_j'^{-1} S_\nu^{-1/2} X).$$

Beweis. Nach Satz 3.5 gilt jedenfalls eine Formel

$$\vartheta_{S,P} | T = \sum_{\nu=1}^{h} \vartheta_{S_\nu, P_\nu}$$

mit gewissen (bezüglich $\check{\varrho}$) harmonischen Formen P_ν.

Die Polynome

$$\tilde{P}_\nu(X) = \frac{1}{E(S_\nu)} \sum_{U \in \mathscr{E}(S_\nu)} P_\nu(S_\nu^{1/2} U S_\nu^{-1/2} X),$$

$$\mathscr{E}(S_\nu) = \{U \text{ ganz}, U' S_\nu U = S_\nu\}$$

sind ebenfalls harmonisch, da die Matrizen $S_\nu^{1/2} U S_\nu^{-1/2}$ orthogonal sind. Sie sind ebenfalls Formen bezüglich $\check{\varrho}$ und es gilt

$$\vartheta_{S_\nu, P_\nu} = \vartheta_{S_\nu, \tilde{P}_\nu}.$$

Wir können und wollen daher

$$P_\nu(S_\nu^{1/2} U X) = P_\nu(S_\nu^{1/2} X) \quad \text{für} \quad U \in \mathscr{E}(S_\nu)$$

annehmen. Unter dieser Voraussetzung gilt für die Fourier-koeffizienten von

$$\vartheta_{S_\nu, P_\nu} = \sum a_\nu(H)\, e^{\pi i \mathrm{Sp}(HZ)}$$

$$a_\nu(S_\mu) = \begin{cases} E(S_\nu) P_\nu(S_\nu^{1/2}) & \text{für} \quad \nu = \mu, \\ 0 & \text{für} \quad \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Die Polynome P_ν sind durch diese Formel festgelegt:

$$P_\nu(S_\nu^{1/2}X) = \check{\varrho}(X')P_\nu(S_\nu^{1/2}).$$

Satz 3.6 ergibt sich nun aus der durchgeführten Berechnung der Fourierkoeffizienten von $\vartheta_{S,P}|T$.

4. Die Wirkung von $T(p)$ auf Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten

Die Zerlegung von $O_n(p)$ in Linksnebenklassen ist explizit bekannt. Die Primzahl p ist im folgenden fest und wird in den Bezeichnungen daher nicht besonders hervorgehoben.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}(j)$ $(0 \leqq j \leqq n)$ ein Vertretersystem der in der Doppelnebenklasse

$$\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})\begin{pmatrix} E^{(n-j)} & 0 \\ 0 & pE^{(j)} \end{pmatrix}\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})$$

enthaltenen Linksnebenklassen $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})D$.

Wir setzen

$$\mathcal{D} = \bigcup_{j=0}^{n} \mathcal{D}(j).$$

4.1 Hilfssatz. *Für jedes $D \in \mathcal{D}$ durchlaufe B ein Vertretersystem ganzer Matrizen mit der Eigenschaft $(BD^{-1})' = BD^{-1}$ bezüglich der Äquivalenzrelation*

$$B_1 \sim B_2 \Leftrightarrow (B_1 - B_2)D^{-1} \text{ ganz}.$$

Dann durchlaufen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}; \qquad A'D = pE,$$

ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $O_n(p)$.

Auch ein Vertretersystem $\mathcal{D}(j)$ kann man explizit beschreiben.

4.2 Hilfssatz. *Man erhält ein Vertretersystem der in*

$$\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})\begin{pmatrix} E^{(n-j)} & 0 \\ 0 & pE^{(j)} \end{pmatrix}\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})$$

enthaltenen Linksnebenklassen, wenn

$$A = \begin{pmatrix} p^{k_1} & & a_{\mu\nu} \\ & \ddots & \\ 0 & & p^{k_n} \end{pmatrix}$$

alle ganzen Matrizen des folgenden Typs durchläuft:

a) $k_1 + \ldots + k_n = j$;
b) $k_\mu \in \{0,1\}$ *für* $\mu = 1, \ldots, n$;
c) $0 \leqq a_{\mu\nu} < p^{k_\nu}$ *für* $1 \leqq \mu < \nu \leqq n$;
d) $a_{\mu\nu} = 0$ *falls* $k_\mu = k_\nu = 1$.

Im Falle $n=2r$ gilt

$$\vartheta_{S,P}|T(p)=\sum_{\nu=1}^{h}\vartheta_{S_\nu,P_\nu}$$

mit

$$P_\nu(X)\,E(S_\nu)=\sum_{D\in\mathfrak{D}}\sum_{B\bmod D}\sum_{\substack{S[G]=DS_\nu A^{-1}\\ G\,\text{ganz}}}(\det D)^{-r}e^{\pi i\operatorname{Sp}(S_\nu A^{-1}B)}P(S^{1/2}GD'^{-1}S_\nu^{-1/2}X).$$

Als erstes wird die Summation über B ausgeführt. Diese hängt gar nicht von P ab. Wir können uns daher auf die Arbeit [3] stützen, wo der Fall $P=1$ behandelt wurde:

4.3 Hilfssatz. *Sei $D\in\mathfrak{D}(j)$. Wenn eine ganze Lösung G der Gleichung*

$$S[G]=DS_\nu A^{-1}$$

existiert, so gilt $j\geqq\frac{n}{2}$ und

$$\sum_{B\bmod D}e^{\pi i\operatorname{Sp}(S_\nu A^{-1}B)}=(\det D)^{n/2}p^{\frac{j(j+1-n)}{2}}.$$

Wir erhalten

$$P_\nu(X)\,E(S_\nu)=\sum_{j=\frac{n}{2}}^{n}p^{\frac{j(j+1-n)}{2}}\sum_{D\in\mathfrak{D}(j)}\sum_{S[G]=DS_\nu A^{-1},\,G\,\text{ganz}}P(S^{1/2}GD'^{-1}S_\nu^{-1/2}X).$$

Die Gleichung

$$S[G]=DS_\nu A^{-1}$$

ist äquivalent mit

$$S[H]=pS_\nu,\qquad H=pGD'^{-1}.$$

Die Matrizen pD'^{-1} und damit H sind ganz. In der Arbeit [3] wurde gezeigt, daß zu jeder ganzen Lösung

$$S[H]=pS_\nu$$

und für jedes j, $\frac{n}{2}\leqq j\leqq n$, eine Matrix $D\in\mathfrak{D}(j)$ existiert, so daß $G=\frac{1}{p}HD'$ ganz ist.

4.4 Hilfssatz. *Sei H eine ganze Lösung der Gleichung*

$$S[H]=pS_\nu$$

und sei j eine ganze Zahl,

$$\frac{n}{2}\leqq j\leqq n.$$

Die Anzahl aller Matrizen $D\in\mathfrak{D}(j)$, für welche $G=\frac{1}{p}HD'$ ganz ist, wird durch

$$\alpha(p,j,n)=\frac{(p^{n-j+1}-1)(p^{n-j+2}-1)\dots(p^{n/2}-1)}{(p-1)(p^2-1)\dots(p^{j-(n/2)}-1)}$$

gegeben (*hängt also nicht von H ab!*).

Zum Beweis muß man sich klarmachen, daß die Elementarteilermatrix von H notwendig von der Form

$$\begin{pmatrix} E^{(n/2)} & 0 \\ 0 & pE^{(n/2)} \end{pmatrix}$$

ist. Die Behauptung ergibt sich dann leicht mittels des explizit konstruierten Repräsentantensystems $\mathscr{D}(j)$ (4.2).

Benutzt man noch die elementare Identität

$$p^r \prod_{j=1}^{r} (1+p^{-j}) = \sum_{j=r}^{n} p^{\frac{j(j+1-n)}{2}} \alpha(p,j,n) \qquad (n=2r),$$

so erhält man

$$P_\nu(X) = \frac{p^r \prod_{j=1}^{r} (1+p^{-j})}{E(S_\nu)} \sum_{S[G]=pS_\nu,\, G \text{ ganz}} P(p^{-1} S^{1/2} G S_\nu^{-1/2} X).$$

Mittels der expliziten Gestalt des Vertauschungsgesetzes für $T(p)$ mit Φ_R beweist man für beliebiges r und n:

4.5 Theorem. *Gegeben seien*

1) *eine positive gerade Matrix* $S = S^{(2r)}$ *der Determinante* 1;
2) *eine harmonische Form* $P(X^{(2r,n)})$ *bezüglich einer rationalen Darstellung*

$$\check{\varrho}_0 : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X});$$

3) *eine Primzahl* p.

Mit $S_1, \ldots, S_h$ *werde ein Vertretersystem der Klassen* $2r$*-reihiger positiver gerader Matrizen der Determinante* 1 *bezeichnet. Es gilt*

$$\vartheta_{S,P} | T(p) = \sum_{\nu=1}^{h} \vartheta_{S_\nu, P_\nu}$$

mit

$$P_\nu(X) = \frac{\beta(p,2r,n)}{E(S_\nu)} \sum_{S[G]=pS_\nu,\, G \text{ ganz}} P(p^{-1} S^{1/2} G S_\nu^{-1/2} X).$$

Dabei ist

$$\beta(p,2r,n) = p^{\frac{1}{2}n(n+1)-nr} \cdot \begin{cases} \prod_{j=1}^{r-n} (1+p^{j-1})^{-1} & \textit{für} \quad n \leqq r \\ \prod_{j=1}^{n-r} (1+p^{-j}) & \textit{für} \quad n \geqq r. \end{cases}$$

Der Beweis erfolgt analog wie bei 3.5.

Man kann neben der Irreduzibilität von ϱ und ϱ_0 auch annehmen, daß

$$\check{\varrho}_0(aE) = a^k E, \quad \check{\varrho}(aE) = a^k E$$

mit ein und derselben Zahl k gilt [4, Zusatz zu 1.4]. Wegen

$$\varrho(A) = (\det A)^r \check{\varrho}(A), \qquad \varrho_0(A) = (\det A)^r \check{\varrho}_0(A)$$

gilt dann

$$R \circ \varrho\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = a^r R.$$

5. Ein Beispiel für eine Eigen-Spitzen-Form vom Grad $n = 24$ und Gewicht $r = 13$

Das Polynom

$$P(X) = \det X, \qquad X = X^{(m)},$$

ist harmonisch, es gilt sogar

$$\frac{\partial^2 (P(X))}{(\partial x_{ij})^2} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq i, j \leqq m.$$

Dieses Polynom ist eine Form bezüglich der Darstellung

$$\check{\varrho}(A) = \det A.$$

Ist $S^{(2r)}$ eine positive gerade Matrix der Determinante 1, so definiert die Thetareihe

$$\sum_{G \text{ ganz}} \det(G)\, e^{\pi i \operatorname{Sp} S[G] Z)}$$

eine Modulform bezüglich der Darstellung

$$\varrho(A) = (\det A)^r \check{\varrho}(A) = (\det A)^{r+1},$$

also eine Modulform vom Gewicht $r+1$ in üblicher Sprechweise. Die Fourierkoeffizienten dieser Modulform sind

$$a(H) = \sum_{S[G] = H,\, G \text{ ganz}} \det G.$$

Mit der Bezeichnung

$$A_+(S, H) = \{G \text{ ganz}, S[G] = H, \det G > 0\},$$
$$A_-(S, H) = \{G \text{ ganz}, S[G] = H, \det G < 0\}$$

gilt

$$a(H) = \sqrt{\det H}\,(A_+(S, H) - A_-(S, H)).$$

5.1 Bemerkung. Sei $S = S^{(2r)}$ eine positive gerade Matrix der Determinante 1. Die Reihe

$$\sum_{G \text{ ganz}} (\det G)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G] Z)}$$

stellt eine Spitzenform vom Gewicht $r+1$ (und vom Grade $2r$) dar. Diese Spitzenform verschwindet genau dann identisch, wenn eine Lösung

$$S[U] = S, \qquad \det U = -1, \qquad U \text{ ganz}$$

existiert.

In der Theorie der Gitter beweist man (s. [5, Appendix 5, S. 138]): Wenn die Gleichung

$$S[g]=2, \qquad g \text{ ganz},$$

eine Lösung besitzt, existiert in der Einheitengruppe

$$\mathscr{E}(S)=\{U;\, S[U]=S,\, U \text{ ganz}\}$$

stets eine Spiegelung, also ein Element der Determinante -1. Im Falle $n \leqq 24$ sind die positiven geraden Matrizen der Determinante 1 klassifiziert. Die Anzahl der Klassen ist

$$h=\begin{cases} 1 & \text{für} \quad n=8 \quad \text{(Mordell)}\\ 2 & \text{für} \quad n=16 \quad \text{(Witt)}\\ 24 & \text{für} \quad n=24 \quad \text{(Niemeier)}. \end{cases}$$

Einzelheiten mit weiteren Literaturverweisen findet man in [5, Kapitel II, Abschn. 5].

Der Klassifikationstabelle entnimmt man:

Im Falle $n \leqq 24$ existiert eine bis auf unimodulare Äquivalenz eindeutig bestimmte Matrix

$$S=S^{(n)}>0, \qquad S \text{ gerade}, \qquad \det S=1,$$

welche die Zahl 2 nicht darstellt. Ihre Reihenzahl ist $n=24$. Sie entspricht dem bekannten „Leech-Gitter“ [5, Appendix 5]. Die Automorphismengruppe $\mathscr{E}(S)$ dieser Matrix wurde von Conway bestimmt. Er hat gezeigt, daß $\mathscr{E}(S)/\{\pm E\}$ eine einfache (sporadische) Gruppe der Ordnung

$$\frac{1}{2}\cdot 8\,315\,553\,613\,086\,720\,000$$

ist[1]. Da der Kern der Determinantenfunktion auf $\mathscr{E}(S)$ ein Normalteiler ist, welcher $-E$ enthält, muß

$$\det U=+1 \qquad \text{für} \qquad U\in\mathscr{E}(S)$$

gelten.

5.2 Satz. *Die dem Leech-Gitter zugeordnete Thetareihe*

$$\Lambda(Z)=\sum_{G=G^{(24)} \text{ganz}} (\det G)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)}$$

ist eine Spitzenform vom Grade $n=24$ und vom Gewicht $r=13$, welche nicht identisch verschwindet. Sie ist eine Eigenform bezüglich der vollen Heckealgebra

$$\Lambda\,|\,T=\lambda(T)\,\Lambda \qquad \textit{für} \qquad T\in\mathscr{H}^{(n)}.$$

Beweis. Sei $S_1, \ldots, S_{24}$ ein Vertretersystem der 24 unimodularen Klassen, $S=S_1$. Aus den expliziten Formeln (3.5) folgt, daß $\Lambda\,|\,T$ Linearkombination der Reihen

$$\sum \det G\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(S_\nu[G]Z)}$$

---

[1] Conway J.H.: Proc. Nat. Acad. Sci. USA **61**, 398–400 (1968)

ist. Nur im Falle des „Leech-Gitters“ ($v=1$) verschwindet diese Reihe nicht identisch.

5.3 Satz. *Sei p eine Primzahl. Der Eigenwert $\lambda(p)=\lambda(T(p))$ der Spitzenform Λ wird durch*

$$\lambda(p)=\frac{a(pS)}{a(S)}\cdot p^{-12}\prod_{j=1}^{12}(1+p^{-j}),$$

gegeben, wenn $a(H)$ den „H-ten“ Fourierkoeffizienten von Λ bezeichnet.

Literatur

1. Andrianov, A.N.: Multiplicative arithmetic of Siegel modular forms. Usp. Mat. Nauk **34,** 67–135 (1979)
2. Andrianov, A.N.: Action of Hecke operator $T(p)$ on theta series. Math. Ann. **247,** 245–254 (1980)
3. Freitag, E.: Eine Bemerkung zu Andrianovs expliziten Formeln für die Wirkung der Heckeoperatoren auf Thetareihen. Christoffel-Festschrift. Basel, Boston, Stuttgart: Birkhäuser (erscheint demnächst)
4. Freitag, E.: Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten zur Siegelschen Modulgruppe. Math. Ann. **254,** 27–51 (1980)
5. Milnor, J., Husemoller, D.: Symmetric bilinear forms. Ergebnisse der Mathematik Bd. 73. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
6. Shimura, G.: On modular correspondences for $\mathrm{Sp}(N,\mathbb{Z})$ and their congruence relations. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **49,** 824–828 (1963)
7. Žarkovskaya, N.A.: Siegel-Operator und Hecke-Operatoren. Funkcional'. Anal. Priloz. **82,** 30–38 (1974)

Eingegangen am 10. Februar 1981; revidierte Fassung am 12. August 1981