Reguläre Differentialformen des Körpers der Siegelschen Modulfunktionen

Von *Eberhard Freitag* in Heidelberg und *Klaus Pommerening* in Mainz

---

Einleitung

Eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ der reellen symplektischen Gruppe heißt mit der Siegelschen Modulgruppe $\Gamma_n = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ kommensurabel, wenn $\Gamma \cap \Gamma_n$ sowohl in Γ als auch in Γ_n endlichen Index hat. Die Gruppe Γ operiert dann auf der Siegelschen Halbebene

$$S_n = \{Z = Z' = Z^{(n)} = X + iY, \quad Y > 0 \text{ (positiv definit)}\}$$

eigentlich diskontinuierlich durch die bekannte Formel

$$Z \to M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Auf Grund der Kompaktifizierungstheorie von Satake und Baily ist der Quotientenraum S_n/Γ als offener dichter Teil in eine (kompakte) projektive algebraische Varietät X_Γ einbettbar. Der „Rand“ $S_\Gamma = X_\Gamma \setminus S_n/\Gamma$ ist eine algebraische Teilvarietät der Kodimension n. Die Dimension von X_Γ ist $\frac{1}{2}n(n+1)$. Im allgemeinen ist X_Γ zwar normal, aber nicht singularitätenfrei. Wir bezeichnen mit $X_\Gamma^0 \subset X_\Gamma$ den regulären Ort von X_Γ. Auf Grund der Hironakaschen Desingularisierungstheorie existiert eine singularitätenfreie projektive (insbesondere kompakte) algebraische Mannigfaltigkeit $\tilde{X}_\Gamma$, welche X_Γ^0 als Zariski-offenen Teil enthält.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit besagt: *Jede holomorphe alternierende Differentialform*

$$\omega \in A^p\,\Omega(X_\Gamma^0)$$

vom Grade $p < \frac{1}{2}n(n+1)$ *auf* X_Γ^0 *ist auf ganz* $\tilde{X}_\Gamma$ *holomorph fortsetzbar.*

Der Fall $n=1$ ist natürlich trivial, denn dann ist $X_\Gamma = X_\Gamma^0 = \tilde{X}_\Gamma$. Wir setzen daher im folgenden $n \geqq 2$ voraus. Dann besteht eine natürliche Isomorphie

$$A^p\,\Omega(X_\Gamma^0) = (A^p\,\Omega(S_n))^\Gamma \qquad (n \geqq 2).$$

0075-4102/82/0331-0015$02.00

In [3] wurde die Existenz nicht verschwindender holomorpher alternierender Γ-invarianter Differentialformen auf S_n vom Grade $p=\frac{1}{2}n(n+1)-1$ bewiesen. In diesem Spezialfall wurde dort auch die holomorphe Fortsetzbarkeit auf $\tilde{X}_\Gamma$ bewiesen. Die Frage nach der Existenz derartiger Differentialformen für andere Grade p ist ein schwieriges Problem.

Wie uns D. Mumford und M. Stillman mitteilten, sind ihnen solche Konstruktionen gelungen. Wir betrachten dies als Rechtfertigung für die Publikation des erwähnten Fortsetzungssatzes.

§ 1. Reguläre Tensoren des Körpers der Modulfunktionen

Wir werden ein Kriterium für die holomorphe Fortsetzbarkeit von Tensoren beweisen. Unter einem (holomorphen kovarianten) Tensor auf einer analytischen Mannigfaltigkeit X verstehen wir einen globalen Schnitt des Bündels

$$\Omega_X^{\otimes p}=\Omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\cdots\otimes\Omega_X \qquad (p\text{-fach}),$$

wobei $\mathcal{O}_X$ die Garbe der holomorphen Funktionen und Ω_X die Garbe der holomorphen Differentiale (= Differentialformen ersten Grades) bezeichne.

Ist speziell $X=D$ ein Gebiet in einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum $\mathscr{Z}$, so kann man einen Tensor T als eine holomorphe Abbildung auffassen, welche einem Punkt $z\in D$ eine Multilinearform

$$T(z)\colon \mathscr{Z}^p=\mathscr{Z}\times\cdots\times\mathscr{Z}\to\mathbb{C}$$

zuordnet. Ist φ eine biholomorphe Selbstabbildung von D, so definiert man den transformierten Tensor φ^*T durch

$$(\varphi^*T)(z)(\xi_1,\ldots,\xi_p)=T(\varphi(z))\left(J(\varphi,z)\xi_1,\ldots,J(\varphi,z)\xi_p\right).$$

Hierbei ist

$$J(\varphi,z)\colon \mathscr{Z}\to\mathscr{Z}$$

das Differential von φ im Punkte z, also diejenige lineare Abbildung, welche nach Wahl einer Basis von $\mathscr{Z}$ durch die Jacobimatrix vermittelt wird.

Unser Interesse gilt dem Spezialfall

$D=S_n$ (Siegelsche Halbebene),

$\mathscr{Z}=\mathscr{Z}_n$ (Vektorraum der n-reihigen symmetrischen komplexen Matrizen).

Der Einfachheit halber setzen wir in diesem Abschnitt voraus, daß Γ eine Hauptkongruenzgruppe ist:

$$\Gamma=\Gamma_n[l]=\operatorname{Kern}(\operatorname{Sp}(n,\mathbb{Z})\to\operatorname{Sp}(n,\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})), \qquad l\geqq 3.$$

Die Voraussetzung $l\geqq 3$ garantiert, daß Γ fixpunktfrei operiert. Da wir $n\geqq 2$ vorausgesetzt haben, gilt dann

$$\Omega^{\otimes p}(X_\Gamma^0)=\Omega^{\otimes p}(S_n/\Gamma)=\Omega^{\otimes p}(S_n)^\Gamma.$$

Ist T ein holomorpher Tensor auf S_n und $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ eine symplektische Substitution, so schreiben wir

$$T|M \quad \text{anstelle von} \quad M^*T.$$

Sei nun T ein Element von $\Omega^{\otimes p}(S_n)^{\Gamma_n[l]}$, also ein auf S_n holomorpher Tensor T, welcher unter $\Gamma_n[l]$ invariant ist, $T|M = T$ für alle $M \in \Gamma_n[l]$. Dann ist T insbesondere periodisch und kann daher in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$T(Z) = \sum_{H=H' \text{ gerade}} a(H) e^{\frac{\pi i}{l} \mathrm{Sp}(HZ)}.$$

Die Fourierkoeffizienten sind Multilinearformen auf $\mathscr{X}_n$, in naheliegender Bezeichnung gilt also

$$a(H) \in \mathrm{Mult}(\mathscr{X}_n^p, \mathbb{C}).$$

Der sogenannte Koechereffekt besagt

$$a(H) \neq 0 \Rightarrow H \geqq 0.$$

Sei $M \in \Gamma_n$ eine Modulsubstitution. Der transformierte Tensor $T|M$ ist ebenfalls unter $\Gamma_n[l]$ invariant, da diese Gruppe ein Normalteiler in Γ_n ist. Die Fourierentwicklung von $T|M$ bezeichnen wir mit

$$T|M(Z) = \sum a_M(H) e^{\frac{\pi i}{l} \mathrm{Sp}(HZ)}.$$

Die Tensoren $T|M$ und die Koeffizienten $a_M(H)$ hängen natürlich nur von dem Bild von M in der endlichen Gruppe $\Gamma_n/\Gamma_n[l]$ ab.

Satz 1. *Sei*

$$T \in \Omega^{\otimes p}(S_n)^{\Gamma_n[l]}, \quad l \geqq 3, \quad n \geqq 2,$$

ein $\Gamma_n[l]$-invarianter Tensor,

$$T|M = \sum_{H=H' \text{ gerade}} a_M(H) e^{\frac{\pi i}{l} \mathrm{Sp}(HZ)} \quad \text{für} \quad M \in \Gamma_n,$$

$$a_M(H) \in \mathrm{Mult}(\mathscr{X}_n^p, \mathbb{C}).$$

Dieser Tensor definiert genau dann einen holomorphen Tensor auf einem (kompakten) singularitätenfreien Modell $\tilde{X}_{\Gamma_n[l]}$ des Körpers $K(\Gamma_n[l])$ der Modulfunktionen bezüglich $\Gamma_n[l]$, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

Seien $W_1, \ldots, W_p$ Vektoren aus $\mathscr{X}_n$ mit der Eigenschaft

$$a_M(H) \quad (W_1, \ldots, W_p) \neq 0$$

und sei $S = S^{(n)}$ eine semipositive ganze Matrix. Bezeichnet man mit

$$\rho(S; W_1, \ldots, W_p) = \#\{j;\, W_j = S\}$$

die Anzahl der mit S übereinstimmenden W_j, so gilt

$$\frac{1}{2} \mathrm{Sp}(SH) \geqq \rho(S; W_1, \ldots, W_p).$$

Anmerkung. Hinreichend für diese Bedingung ist

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(SH) \geqq p.$$

Beweis (vgl. [3], [4]). Die Regularität (d.h. Fortsetzbarkeit auf $\tilde{X}_\Gamma$) von T ist gleichbedeutend mit folgender Aussage: Sei

$$\psi\colon \dot{E}\times E^{N-1} \to X_\Gamma^0, \quad N=\frac{1}{2}n(n+1), \qquad (E=\{q\in\mathbb{C};\ |q|<1\},\ \dot{E}=E\setminus\{0\})$$

eine holomorphe Abbildung, welche sich zu einer stetigen (und damit holomorphen) Abbildung von E^N in die Satakekompaktifizierung X_Γ fortsetzen läßt. Dann ist der Tensor $\psi^*(T)$ auf E^N holomorph fortsetzbar.

Der Beweis von Satz 1 beruht auf einer expliziten Beschreibung der möglichen Abbildungen ψ [3], [4]. Zunächst hebt man ψ auf die universellen Überlagerungen hoch:

a) Die universelle Überlagerung von $\dot{E}\times E^{N-1}$ ist

$$S_1\times E^{N-1} \to \dot{E}\times E^{N-1}, \quad (z,w)\to(q,w); \qquad q=e^{2\pi i z}.$$

b) Wenn Γ fixpunktfrei operiert, ist die natürliche Projektion

$$S_n \to S_n/\Gamma$$

die universelle Überlagerung von S_n/Γ.

Hilfssatz 1a). *Sei $\Gamma\subset\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ eine mit der Siegelschen Modulgruppe kommensurable Gruppe und sei*

$$\Psi\colon S_1\times E^{N-1} \to S_n$$

eine holomorphe Abbildung mit den Eigenschaften

a) $\Psi(z+1,w)=M\langle\Psi(z,w)\rangle$ *für ein* $M\in\Gamma$.

b) *Die durch Ψ induzierte Abbildung*

$$\psi\colon \dot{E}\times E^{N-1} \to S_n/\Gamma$$

ist zu einer stetigen Abbildung von E^N in die Satakekompaktifizierung $\overline{S_n/\Gamma}$ fortsetzbar. (Diese Bedingung ist nach einem Satz von A. Borel im Falle $n\geqq 2$ stets erfüllt.)

Dann ist M im Stabilisator einer Randkomponente enthalten. Im Falle $M\in\Gamma[l]$, $l\geqq 3$, gibt es eine Matrix

$$N\in\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \quad \textit{mit} \quad NMN^{-1}=\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei S_n^* die Vereinigung von S_n mit allen rationalen Randkomponenten. Sei

$$a\in S_n^*, \quad a\notin S_n,$$

ein Randpunkt, welcher den Punkt $\psi(0)$ repräsentiert. Es gibt eine Umgebung U von a bezüglich der Sataketopologie, so daß zwei Punkte in U genau dann bezüglich Γ äquivalent sind, wenn sie bezüglich des Stabilisators Γ_a äquivalent sind. Hieraus folgt Hilfssatz 1a).

Hilfssatz 1b). *Es sei*

$$\Psi: S_1 \times E^{N-1} \to S_n$$

eine holomorphe Abbildung mit der Eigenschaft

$$\Psi(z+1, w) = \Psi(z, w)[U] + S \quad \textit{für} \quad U \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{Z}), \quad S = S' \textit{ reell.}$$

Die Matrix U ist dann von endlicher Ordnung m, d.h.

$$U^m = E, \quad m \in \mathbb{N} \textit{ geeignet.}$$

Mit einer geeigneten reellen, symmetrischen, semipositiven Matrix S_0 gilt

$$\Psi(z, w) = S_0 z + \Psi_0(q_m, w), \quad q_m = e^{\frac{2\pi i z}{m}}.$$

Die Funktion Ψ_0 hat in $q_m = 0$ eine hebbare Singularität, ist also auf ganz E^N holomorph fortsetzbar.

Der Beweis ist in [3] zu finden.

Wir kommen nun zum eigentlichen *Beweis von Satz* 1. Sei

$$\psi: \dot{E} \times E^{N-1} \to S_n / \Gamma_n[l]$$

eine holomorphe Abbildung, welche zu einer stetigen (und damit holomorphen) Abbildung von E^N in die Satakekompaktifizierung fortsetzbar ist. Wir müssen zeigen, daß $\psi^* T$ auf ganz E^N fortsetzbar ist. Wir heben die Abbildung ψ auf die universellen Überlagerungen hoch und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (z, w) \in S_1 \times E^{N-1} & \xrightarrow{\Psi} & S_n \\ \downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \\ (q, w) \in \dot{E} \times E^{N-1} & \xrightarrow{\psi} & S_n / \Gamma_n[l] \end{array} \quad (l \geqq 3), \quad q = e^{2\pi i z}.$$

Wegen Hilfssatz 1a) ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß Ψ die in Hilfssatz 1b) angegebene Form hat. Dabei muß (in den Bezeichnungen von Hilfssatz 1b)) notwendig $m = 1$ sein, also

$$\Psi(z, w) = S_0 z + \Psi_0(q, w), \quad q = e^{2\pi i z}.$$

Die Funktion $\Psi_0(q, w)$ hat in $q = 0$ eine hebbare Singularität. Es gilt $S_0 \equiv 0 \bmod l$.

Wir berechnen nun den zurückgezogenen Tensor $\Psi^*(T)$ auf $S_1 \times E^{N-1}$. Dieser Tensor ist eine Funktion, welche jedem Punkt $(z, w) \in S_1 \times E^{N-1}$ eine Multilinearform

$$\Psi^*(T)\ (z, w) \in \mathrm{Mult}(\overbrace{\mathbb{C}^N \times \cdots \times \mathbb{C}^N}^{p\text{-mal}}, \mathbb{C})$$

zuordnet. Sei $J(\Psi, (z, w))$ die „Jacobimatrix" von Ψ in (z, w), interpretiert als lineare Abbildung

$$J(\Psi, (z, w)): \mathbb{C}^N \to \mathscr{Z}_n.$$

Wir bezeichnen die Koordinaten von $\mathbb{C}^N$ mit

$$\mathfrak{z} = (\xi, \eta_2, \ldots, \eta_N)$$

und schreiben abkürzend

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial \Psi}{\partial z}(z, w), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial w_\nu} = \frac{\partial \Psi}{\partial w_\nu}(z, w) \quad \text{für} \quad \nu = 2, \ldots, N.$$

Dann gilt

$$J(\Psi, (z, w))\,(\mathfrak{z}) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}\xi + \sum_{\nu=2}^{N} \frac{\partial \Psi}{\partial w_\nu}\eta_\nu.$$

Dies ist bei festem $\mathfrak{z}$ eine holomorphe Funktion von (z, w).

Seien

$$\mathfrak{z}_\nu \in \mathbb{C}^N, \quad W_\nu = J(\Psi, (z, w))\mathfrak{z}_\nu; \qquad \nu = 1, \ldots, p.$$

Nach Definition von Ψ^* gilt

$$\begin{aligned}
[\Psi^*(T)\,(z, w)]\quad (\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_p) &= T(\Psi(z, w))\quad (W_1, \ldots, W_p) \\
&= \sum_H a(H)\quad (W_1, \ldots, W_p)\, e^{\frac{\pi i}{l}\mathrm{Sp}(H(S_0 z + \Psi_0(q, w)))} \\
&= \sum_H a(H)\quad (W_1, \ldots, W_p)\, q^{\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(HS)} g_H(q, w).
\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$S = \frac{1}{l} S_0 = S' \geqq 0$$

eine ganze Matrix, $\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(HS)$ also eine nicht negative ganze Zahl. Die Funktion

$$g_H(q, w) = e^{\frac{\pi i}{l}\mathrm{Sp}(H \cdot \Psi_0(q, w))}$$

ist in $q = 0$ regulär.

Wir betrachten nun für einen festen Index H den Tensor

$$\check{T} \in \Omega^{\otimes p}(S_1 \times E^{N-1}),$$

welcher durch

$$\check{T}(z, w)\ (\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_p) = a(H)\ (W_1, \ldots, W_p)\, q^{\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(HS)}$$

definiert ist. Dieser ist periodisch (bezüglich $z \longrightarrow z+1$) und ist daher das Urbild eines holomorphen Tensors

$$\check{t} \in \Omega^{\otimes p}(\dot{E} \times E^{N-1}).$$

Wir zeigen, daß (unter den in Satz 1 angegebenen Bedingungen) der Tensor $\check{t}$ auf E^N holomorph fortsetzbar ist. Hiermit gleichbedeutend ist folgende Aussage: *Seien*

$$\mathfrak{z}_\nu = (\xi^{(\nu)}, \eta_2^{(\nu)}, \dots, \eta_N^{(\nu)}), \qquad \nu = 2, \dots, N,$$

feste Punkte,

$$\mathfrak{z}_\nu(q) = \left(\frac{\xi^{(\nu)}}{q}, \eta_2^{(\nu)}, \dots, \eta_N^{(\nu)}\right).$$

Die Funktion

$$(q, w) \to \check{T}(z, w) \quad \big(\mathfrak{z}_1(q), \dots, \mathfrak{z}_p(q)\big)$$

hat in $q = 0$ eine hebbare Singularität.

Um dies zu zeigen, benutzen wir die explizite Gestalt der Abbildung Ψ. Aus ihr ergibt sich

$$W_\nu(q) = J(\Psi, (z, w)) \big(\mathfrak{z}_\nu(q)\big) = \frac{\xi^{(\nu)}}{q} S_0 + \tilde{W}_\nu,$$

wobei $\tilde{W}_\nu$ in $q = 0$ eine hebbare Singularität hat. Wir müssen zeigen, daß ein eventueller Pol (in $q = 0$) der Funktion

$$a(H) \left(\frac{\xi^{(1)}}{q} S_0 + \tilde{W}_1, \dots, \frac{\xi^{(N)}}{q} S_0 + \tilde{W}_p\right)$$

höchstens die Ordnung $\frac{1}{2}\operatorname{Sp}(SH)$ hat. Wertet man diese Funktion multilinear aus, so erhält man eine Darstellung als Linearkombination von Funktionen

$$q^{-m} a(H) \quad (W_1^*, \dots, W_p^*),$$

wobei m der Funktionen W_ν^* konstant S sind und die restlichen $k - m$ in $q = 0$ regulär sind. Nach der in Satz 1 gemachten Voraussetzung ist dieser Ausdruck nur dann von 0 verschieden, wenn

$$m \leqq \frac{1}{2}\operatorname{Sp}(SH)$$

gilt. Damit ist die Fortsetzungseigenschaft für den Tensor T bewiesen.

Den Beweis für die Umkehrung (daß holomorphe Tensoren auf $\tilde{X}_\Gamma$ die Bedingung in Satz 1 erfüllen), wollen wir übergehen, da im folgenden kein Gebrauch davon gemacht wird.

Satz 2. *Sei*

$$T \in \Omega^{\otimes p}(S_n)^{\Gamma_n[l]}, \qquad l \geqq 3,$$

ein $\Gamma_n[l]$-invarianter Tensor,

$$T|M = \sum_{H = H'} a_M(H) e^{\frac{\pi i}{l}\operatorname{Sp}(HZ)} \quad \textit{für} \quad M \in \Gamma_n,$$

mit der Eigenschaft

$$a_M(H) \neq 0 \Rightarrow H > 0.$$

Sei $p' \geqq p$.

Der Tensor T definiert dann einen holomorphen Tensor auf einem singularitätenfreien Modell des Körpers $K(\Gamma_n[lp'])$ der Modulfunktionen der Stufe lp'.

Beweis. Die Fourierentwicklung von $T|M$ in bezug auf die Gruppe $\Gamma_n[lp']$ lautet

$$T|M = \sum_{H=H' \text{ gerade}} b_M(H) e^{\frac{\pi i}{lp'} \operatorname{Sp}(HZ)},$$

$$b_M(H) = \begin{cases} a_M\left(\frac{1}{p'} H\right), & \text{falls } \frac{1}{p'} H \text{ gerade}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$b_M(H) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{p'} H \text{ gerade} \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{Sp}(HS) \geqq p' \geqq p, \qquad (S = S' \geqq 0 \text{ ganz}, \ S \neq 0).$$

Wir wenden uns nun dem Spezialfall alternierender Tensoren (= alternierender Differentialformen) zu.

Satz 3. *Sei $\Gamma = \Gamma_n[l]$ mit $l \geqq 3$, $n \geqq 2$. Auf S_n/Γ existiere eine holomorphe alternierende Differentialform vom Grade p, welche nicht auf $\tilde{X}_\Gamma$ holomorph fortsetzbar ist. Dann muß eine alternierende Multilinearform a vom Grade p auf $\mathfrak{X}_n$ und eine Zahl r, $0 \leqq r \leqq n$, existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1) $a(W_1[U], \ldots, W_p[U]) = a(W_1, \ldots, W_p)$ *für alle*

$$U = \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in SL(n, \mathbb{C}), \quad B = B^{(r, n-r)}, \quad D = D^{(n-r)}.$$

2) *Es existiert eine ganzzahlige semipositive symmetrische Matrix*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = S_2^{(n-r)},$$

mit

$$a(S, W_2, \ldots, W_p) \neq 0.$$

Beweis. Der Tensor $T|M$ (in den Bezeichnungen von Satz 1) ist invariant unter der Gruppe

$$\{U \in GL(n, \mathbb{Z}) \mid U \equiv E \bmod l\}$$

unimodularer Substitutionen $Z \to Z[U]$, welche in $Gl(n, \mathbb{Z})$ endlichen Index hat. Für diese Substitutionen gilt

$$a_M(H[U']) \ (W_1[U^{-1}], \ldots, W_p[U^{-1}]) = a_M(H) \ (W_1, \ldots, W_p).$$

Ist insbesondere $H[U'] = H$, so wird daraus die Bedingung

$$a_M(H) \ (W_1, \ldots, W_p) = a_M(H) \ (W_1[U], \ldots, W_p[U]).$$

Wir nehmen nun an, daß T und damit $a_M(H)$ ein alternierender Tensor ist. Ist

$$a_M(H)\ (W_1, \dots, W_p) \neq 0,$$

so müssen $W_1, \dots, W_p$ linear unabhängig, insbesondere paarweise verschieden sein. Die in Satz 1 formulierte Bedingung kann höchstens dann verletzt sein, wenn die Situation

$$\mathrm{Sp}(SH) = 0, \quad a_M(H)\ (S, W_2, \dots, W_p) \neq 0$$

auftritt. Durch einen geeigneten ganzzahligen Basiswechsel läßt sich H ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf die Gestalt

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = H_1^{(r)} > 0,$$

bringen. Dann besteht die Stabilitätsgruppe

$$G_H = \{U \in SL(n, \mathbb{Z}) \mid H[U'] = H, \ U \equiv E \bmod l\}$$

genau aus den ganzzahligen Matrizen der Gestalt

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

wobei $A \in GL(r, \mathbb{Z})$ mit $H_1[A'] = H_1$, $A \equiv E \bmod l$, $B \equiv 0 \bmod l$ und $D \in GL(n-r, \mathbb{Z})$ mit $D \equiv E \bmod l$ und $\mathrm{Det}\, D = \mathrm{Det}\, A$. Darin enthalten ist die nur von r abhängige Untergruppe

$$G_r(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in SL(n, \mathbb{Z}) \mid B \equiv 0 \bmod l, \ D \equiv E \bmod l \right\}.$$

Es gilt sogar (was im folgenden nicht benötigt wird), daß $G_r(\mathbb{Z})$ in G_H endlichen Index hat, weil die Stabilitätsgruppe der positiv-definiten Matrix H_1 in $GL(r, \mathbb{Z})$ endlich ist.

Da die Fixpunkte von $G_r(\mathbb{Z})$ genau die Fixpunkte des Zariski-Abschlusses

$$G_r = \left\{ \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in SL(n, \mathbb{C}) \right\}$$

sind, folgt die Bedingung 1) des Satzes. Die Bedingung $\mathrm{Sp}(SH) = 0$ bedeutet gerade, daß S die in der Bedingung 2) des Satzes genannte Gestalt hat.

Im Falle $p = \dfrac{n(n+1)}{2}$ existiert eine Multilinearform a mit den in Satz 3 angegebenen Bedingungen, nämlich die Determinantenform auf $\mathscr{X}_n$. Tatsächlich existieren in diesem Falle auch holomorphe Differentialformen, welche nicht fortsetzbar sind.

Im nächsten Abschnitt wollen wir zeigen, daß im Falle $p < \dfrac{n(n+1)}{2}$ derartige alternierende Formen *nicht* existieren können.

§ 2. Invariante alternierende Multilinearformen von symmetrischen Matrizen

Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes, in dem $\mathscr{Z}$ den Vektorraum der symmetrischen komplexen $n \times n$-Matrizen und G_r die im Beweis von Satz 3 eingeführte Gruppe bezeichnet.

Satz 4. *Sei $a\colon \mathscr{Z}^p \to \mathbb{C}$ für $1 \leqq p < N = n(n+1)/2$ eine alternierende Multilinearform mit der Invarianzeigenschaft*

$$a(W_1[U], \ldots, W_p[U]) = a(W_1, \ldots, W_p)$$

für alle $U \in G_r$. Dann gilt

$$a(S, W_2, \ldots, W_p) = 0$$

für alle $W_2, \ldots, W_p \in \mathscr{Z}$ und alle $S \in \mathscr{Z}$ der Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad S_2 = S_2^{(n-r)}.$$

Beweis. Wird der Dualraum $\mathscr{Z}^*$ mit Hilfe der Spurform mit $\mathscr{Z}$ identifiziert, so ist die Operation von $SL(n, \mathbb{C})$ auf $\mathscr{Z}^*$ gegeben durch

$$(U, Z) \mapsto UZU' = Z[U'].$$

Die Multilinearform a ist auf natürliche Weise als Element von $\Lambda^p \mathscr{Z}^*$ identifizierbar.

Wir ersetzen nun $\mathscr{Z}^*$ durch den Vektorraum $V = S^2(\mathbb{C}^n)$; dabei geht die Operation von $SL(n, \mathbb{C})$ auf $\mathscr{Z}^*$ in die gewöhnliche Operation auf V über. Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{C}^n$. Daraus ergibt sich die kanonische Basis $\{e_i e_j \mid 1 \leqq i \leqq j \leqq n\}$ von V, die bezüglich der durch die Spurform induzierten Bilinearform orthogonal ist. Sei V_r der von den $e_i e_j$ mit $1 \leqq i \leqq r$, $i \leqq j \leqq n$ aufgespannte Unterraum.

Satz 4 ist nun eine unmittelbare Folge von

Satz 4'. *Alle G_r-Fixpunkte in $\Lambda^p V$ mit $1 \leqq p < N$ liegen in $\Lambda^p V_r$.*

Der Beweis von Satz 4' wird auf einen Hilfssatz reduziert. Sei dazu G_r^+ die Untergruppe aller unipotenten oberen Dreiecksmatrizen in G_r. Sei E_{ij} die Matrix, die eine 1 an der Stelle (i, j) und sonst nur Nullen enthält. Ein $x \in \Lambda^p V$ ist genau dann G_r^+-invariant, wenn für alle i, j mit $1 \leqq i < j$, $r < j \leqq n$ gilt: $(E_n + tE_{ij})x = x$ für alle $t \in \mathbb{C}$, also $E_{ij}x = 0$. Dabei ist bei dieser letzten Gleichung zu beachten, daß E_{ij} bezüglich des äußeren Produkts $\wedge$ und bezüglich des symmetrischen Produkts $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to S^2(\mathbb{C}^n)$ als Derivation operiert. Insbesondere gilt

$$E_{ij} e_k^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k, \\ 2e_i e_k & \text{für } j = k, \end{cases}$$

$$E_{ij} e_k e_l = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k, l, \\ e_i e_l & \text{für } j = k < l, \\ e_i e_k & \text{für } k < j = l. \end{cases}$$

Die kanonische Basis der äußeren Algebra ΛV besteht aus den $\wedge$-Produkten von je einer Teilmenge der Basis $\{e_i e_j\}$ von V; als Gedankenstütze ist es nützlich, sich einen solchen Basisvektor dadurch zu veranschaulichen, daß man in einen $n \times n$-Kasten an die Stelle (i,j) mit $1 \leqq i \leqq j \leqq n$ einen Stern oder eine Null setzt, je nachdem, ob $e_i e_j$ als Faktor in diesem Basisvektor vorkommt oder nicht. Beispiel für $n=4$:

$$\boxed{\begin{array}{cccc} * & 0 & * & 0 \\ & * & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{array}} \qquad \text{bedeutet} \quad e_1^2 \wedge e_1 e_3 \wedge e_2^2.$$

Ein Basisvektor v von ΛV, der nicht zu ΛV_r gehört, ist, wie man direkt sieht, genau dann G_r^+-invariant, wenn er die folgende Bedingung erfüllt:

(B_r) Kommt $e_l e_m$ mit $r < l \leqq m \leqq n$ in v vor, so auch alle $e_i e_j$ mit $1 \leqq i \leqq l$ und $i \leqq j \leqq m$.

Für den zu v gehörigen $n \times n$-Kasten formuliert bedeutet dies: Ist die Stelle (l, m) mit einem Stern besetzt, so auch alle Stellen, die von (l, m) aus in einer Richtung zwischen links und oben einschließlich liegen.

Hilfssatz 2. *Sei $x \in \Lambda V$ ein G_r^+-Fixpunkt. Dann läßt sich x zerlegen in $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \Lambda V_r$ und $x_2 =$ Linearkombination von G_r^+-invarianten kanonischen Basisvektoren, die nicht zu ΛV_r gehören.*

Beweis. Die Basis $\{e_i e_j\}$ von V sei lexikographisch geordnet. Die kanonischen Basisvektoren von ΛV seien immer als Produkt der $e_i e_j$ in aufsteigender Reihenfolge geschrieben; die kanonische Basis von ΛV sei dann auch lexikographisch geordnet. Sei nun v der lexikographisch erste Basisvektor außerhalb ΛV_r, der in x vorkommt, etwa mit dem Koeffizienten c. Zu zeigen ist, daß v die Bedingung (B_r) erfüllt. Der Hilfssatz folgt dann durch Induktion, indem man x durch $x - cv$ ersetzt usw.

Die Bedingung (B_r) wird ihrerseits durch (lexikographische) Induktion über (l, m) nachgewiesen. Sei also $e_l e_m$ der erste Faktor von v, der gegen (B_r) verstößt. Zu zeigen: $c = 0$.

1. *Fall.* $l = m$. Sei

$$I = \{k = 1, \dots, m-1 \mid e_k e_m \ \text{ fehlt in } v\},$$

$$J = \{(i,j) \mid 1 \leqq i < j, \quad i, j \in I, \quad e_i e_j \ \text{ kommt in } v \text{ vor}\}.$$

Für $(i,j) \in J$ sei v_{ij} der kanonische Basisvektor, der aus v entsteht, indem man $e_i e_j$ und e_m^2 durch $e_i e_m$ und $e_j e_m$ ersetzt (und diese an die richtige Stelle rückt). Sei

$$x = cv + \sum_{(i,j) \in J} c_{ij} v_{ij} + x_0,$$

wobei x_0 Linearkombination der übrigen Basisvektoren ist. Für $k \in I$ sei $E_{km} v$ wieder als Linearkombination der kanonischen Basis dargestellt. Dabei tritt der Basisvektor w_k auf, der aus v entsteht, indem man e_m^2 durch $e_k e_m$ ersetzt. Die übrigen Basisvektoren w, für die w_k in $E_{km} w$ auftritt, sind genau die v_{kj} mit $(k,j) \in J$ oder aber Basisvektoren, die bis zur Stelle $(k, m-1)$ wie v aussehen und dann $e_k e_m$ enthalten, also lexikographisch vor v stehen und nicht in ΛV_r liegen, also nicht in v vorkommen. Da x Fixpunkt ist, muß der Koeffizient von w_k in $E_{km}x$ Null sein. Zu diesem Koeffizienten liefert v den Beitrag

$$(-1)^{a_k} \cdot 2c,$$

wobei a_k die Anzahl der Sterne in den Zeilen $k+1, \ldots, m-1$ plus die Anzahl der Sterne in Zeile k rechts von der Stelle (k, m) im zu v gehörigen Kasten ist, d.h., die Anzahl der Vorzeichenwechsel, wenn man e_m^2 in v durch $e_k e_m$ ersetzt und dieses an die richtige Stelle rückt. Die weiteren Beiträge zum Koeffizienten von w_k kommen nur von den v_{ij} mit $(i, j) \in J$, und zwar

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{für} \quad k \neq i, j, \\ (-1)^{a_k - a_j + 1 + b_{kj}} \cdot c_{kj} & \text{für} \quad k = i, \\ (-1)^{b_{ik}} \cdot c_{ik} & \text{für} \quad k = j, \end{array}$$

wobei b_{ij} die Zahl der Sterne in Zeile i von $(i, j+1)$ bis $(i, m-1)$ einschließlich ist. Wir erhalten die Gleichung

$$0 = 2c + \sum_{j \text{ mit } (k,j) \in J} (-1)^{-a_j + 1 + b_{kj}} \cdot c_{kj} + \sum_{i \text{ mit } (i,k) \in J} (-1)^{-a_k + b_{ik}} \cdot c_{ik}$$

für alle $k \in I$. Diese $|I|$ Gleichungen ergeben aufaddiert

$$0 = 2 \cdot |I| \cdot c + \sum_{(i,j) \in J} (-1)^{-a_j + 1 + b_{ij}} \cdot c_{ij} + \sum_{(i,j) \in J} (-1)^{-a_j + b_{ij}} \cdot c_{ij},$$

also $2 \cdot |I| \cdot c = 0$ und $c = 0$.

2. *Fall.* $l < m$. Falls links von (l, m) im Kasten von v noch ein Stern steht, so auch an allen noch weiter links gelegenen Stellen; das folgt nämlich aus der Induktionsannahme, daß (l, m) der erste Verstoß gegen (B_r) ist. Es gibt also auf jeden Fall ein h mit $l \leqq h \leqq m$, so daß $e_l e_i$ für $l \leqq i < h$ in v vorkommt, für $h \leqq i < m$ hingegen nicht. Sei diesmal

$$I = \{k = 1, \ldots, l-1 \mid e_k e_m \quad \text{fehlt in } v\},$$

$$J = \{(i, j) \mid i \in I, \quad h \leqq j < m, \quad e_i e_j \quad \text{kommt in } v \text{ vor}\}.$$

Für $(i, j) \in J$ sei v_{ij} der Basisvektor, der aus v entsteht, indem man $e_i e_j$ und $e_l e_m$ durch $e_i e_m$ und $e_l e_j$ ersetzt.

In $E_{kl}x$ für $k \in I$ tritt der Basisvektor w_k auf, der aus v entsteht, indem man $e_l e_m$ durch $e_k e_m$ ersetzt. Der zugehörige Koeffizient erhält von v den Beitrag

$$(-1)^{a_k} \cdot c,$$

wobei a_k die Anzahl der Sterne in den Zeilen $k+1, \ldots, l-1$ plus die Anzahl der Sterne in Zeile l echt links von (l, m) plus die Anzahl der Sterne in Zeile k rechts von (k, m) im Kasten von v ist. Die weiteren Beiträge kommen erstens von den v_{kj} mit $(k, j) \in J$, und zwar

$$(-1)^{a_k + 1 + b_{kj}} \cdot (1 + \delta_{lj}) \cdot c_{kj},$$

wobei b_{kj} die Anzahl der Sterne in Zeile k zwischen $(k, j+1)$ und $(k, m-1)$ einschließlich ist, oder aber zweitens von Basisvektoren, die lexikographisch vor v stehen und nicht in ΛV_r liegen, also in x nicht vorkommen. Wir erhalten die Gleichung

$$0 = c + \sum_{j \text{ mit } (k,j) \in J} (-1)^{1+b_{kj}} \cdot (1 + \delta_{lj}) \cdot c_{kj}$$

für alle $k \in I$, also aufaddiert

$$(1) \qquad 0 = |I| \cdot c + \sum_{(i,j) \in J} (-1)^{1+b_{ij}} \cdot (1 + \delta_{lj}) \cdot c_{ij}.$$

Für $k = h, \ldots, m-1$ tritt in $E_{km} x$ der Basisvektor w_k auf, der aus v entsteht, indem man $e_l e_m$ durch $e_l e_k$ ersetzt, und zwar mit dem Koeffizienten

$$0 = c + \sum_{i \text{ mit } (i,k) \in J} (-1)^{b_{ik}} \cdot c_{ik}.$$

Diese $m-h$ Gleichungen werden wieder aufaddiert; im Falle $k = h = l$ wird die entsprechende Gleichung zweimal berücksichtigt. Das ergibt

$$(2) \qquad 0 = (m - h + \delta_{hl}) \cdot c + \sum_{(i,j) \in J} (-1)^{b_{ij}} \cdot (1 + \delta_{jl}) \cdot c_{ij}.$$

Die Addition von (1) und (2) ergibt $\big(|I| + m - h + \delta_{hl}\big) \cdot c = 0$, also $c = 0$.

Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen. Für den Beweis von Satz 4′ bestimmen wir noch unter den G_r^+-Invarianten diejenigen, die auch unter der Gruppe $T_r \cong (\mathbb{C}^*)^{n-r-1}$ der in G_r gelegenen Diagonalmatrizen invariant sind. Die Zuordnung $\chi_i \colon T_r \to \mathbb{C}^*$ des i-ten Diagonalelements zu einer solchen Diagonalmatrix für $r+1 \leqq i \leqq n$ ist ein (rationaler multiplikativer) Charakter von T_r. Die kanonische Basis von ΛV besteht aus Gewichtsvektoren bezüglich T_r, und zwar gehört ein Basisvektor v zum Gewicht $\chi = \chi_{r+1}^{m_{r+1}} \cdots \chi_n^{m_n}$, wobei m_i im zugehörigen Kasten die Anzahl der Sterne in Spalte i plus die Anzahl der Sterne in Zeile i ist. Genau dann ist $\chi = 1$, also v eine T_r-Invariante, wenn $m_{r+1} = \cdots = m_n$. Es gibt hierfür zwei Möglichkeiten: Entweder liegt v in ΛV_r und $m_n \leqq r$, oder aber ein $m_i > r$, also $m_n > r$, also wegen (B_r) $m_{r+1} = n+1$, also $m_{r+1} = \cdots = m_n = n+1$ und $v \in \Lambda^N V$. Da der Raum der G_r^+-Fixpunkte und auch das orthogonale Komplement zu V_r in V beide T_r-stabil sind, ist Satz 4′ bewiesen.

Damit ist auch der Beweis von Satz 4 vollständig erbracht.

Bemerkungen. 1) Die Beweise von Hilfssatz 2 und Satz 4′ gelten offensichtlich genauso, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen unendlichen Integritätsbereich der Charakteristik 0 oder $> n$ ersetzt.

2) Die G_r^+-Fixpunkte in ΛV_r sind nicht ganz so leicht zu bestimmen. Für $n = 3$, $r = 2$ ist zum Beispiel

$$e_1^2 \wedge e_1 e_2 \wedge e_2 e_3 - e_1^2 \wedge e_1 e_3 \wedge e_2^2$$

G_r^+-invariant.

3) Im Fall $r = 0$ liefert der obige Beweis die Zerlegung von ΛV in irreduzible $SL(n, \mathbb{C})$-Moduln: Die Höchstgewichtsvektoren der irreduziblen Summanden sind genau die kanonischen Basisvektoren, die die Bedingung (B_0) erfüllen. Insbesondere sind $\Lambda^0 V$ und $\Lambda^N V$ die einzigen trivialen irreduziblen Summanden von ΛV.

§ 3. Das Hauptergebnis

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt, daß im Falle $\Gamma = \Gamma_n[l]$, $l \geqq 3$, jede holomorphe Differentialform auf $X_\Gamma^0 (= S_n/\Gamma)$ auf ganz $\tilde{X}_\Gamma$ holomorph fortsetzbar ist. Für alternierende Differentialformen (nicht für beliebige Tensoren) gilt [1]: Sei $f: X \to Y$ eine surjektive eigentliche holomorphe Abbildung gleich-dimensionaler zusammenhängender analytischer Mannigfaltigkeiten und ω eine meromorphe Differentialform auf Y. Wenn $f^*\omega$ auf ganz X holomorph ist, wird auch ω auf ganz Y holomorph. Damit erhalten wir allgemein das in der Einleitung angekündigte Resultat:

Satz 5. *Sei $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ mit der Siegelschen Modulgruppe kommensurabel. Im Falle $n \geqq 2$ definiert jede Γ-invariante holomorphe Differentialform vom Grad $p < \frac{1}{2} n(n+1)$ auf der Siegelschen Halbebene S_n einen holomorphen Tensor auf einem kompakten singularitätenfreien Modul $\tilde{X}_\Gamma$ des Körpers der Modulfunktionen $K(\Gamma)$.*

Literatur

[1] *E. Freitag*, Über die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen. I, J. reine angew. Math. **247** (1971), 97—117.

[2] *E. Freitag*, Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe, Invent. math. **30** (1975), 181—196.

[3] *E. Freitag*, Der Körper der Siegelschen Modulfunktionen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **47** (1975), 25—41.

[4] *E. Freitag*, Die Kodairadimension von Körpern automorpher Funktionen, J. reine angew. Math. **296** (1977), 162—170.

Mathematisches Institut, Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 288, D-6900 Heidelberg

Fachbereich Mathematik, Universität Mainz, Saarstraße 21, D-6500 Mainz

Eingegangen 9. September 1981