Eine Bemerkung zu Andrianovs expliziten Formeln für die Wirkung der Heckeoperatoren auf Thetareihen

Eberhard Freitag
Mathematisches Institut, Universität Heidelberg, Heidelberg (FRG)

We prove an explicit formula for the action of Hecke-operators on theta-series. Similar formulas have been obtained by Andrianov using different methods. Our method is based on the notion of a singular modular form.

Einleitung

Mithilfe der Theorie der singulären Modulformen gelang es, innerhalb des Vektorraums $[\Gamma_g, r]$ aller Siegelschen Modulformen g-ten Grades vom Gewicht r, die Teilschar, welche von den Thetareihen

$$\vartheta_S(Z) = \sum_{G \text{ ganz}} e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)}$$

aufgespannt wird, funktionentheoretisch zu kennzeichnen [2], [3], [4].

Hierbei sei S eine positiv definite, gerade quadratische Form der Determinante Eins. Als Folge erhält man, dass diese Teilscharen unter Heckeoperatoren invariant sind. Andrianov hat in seiner grossen Arbeit [1] explizite Formeln für die Wirkung der Heckeoperatoren auf diese Thetareihen aufgestellt.

Da die von mir verwendete Beweismethode in [3] durchaus effektiv ist, war es naheliegend, längs des dort vorgezeichneten Weges die Formeln neu zu beweisen. Der auf diesem Wege gewonnene Beweis für «explizite Formeln» ist viel einfacher als der Andrianovsche. Durch einen Kunstgriff gelingt es überdies, die Theorie der singulären Modulformen ganz zu vermeiden. Dies scheint mir mitteilenswert zu sein, schon im Hinblick auf die interessanten Anwendungen dieser Formeln. Wie Andrianov gezeigt hat, ist der Siegelsche Hauptsatz in vielen Spezialfällen eine direkte Folge dieser Formeln.

Es scheint jedoch nicht so zu sein, dass man den Siegelschen Hauptsatz in voller Allgemeinheit aus den besagten Formeln erhält. Dies mag daran liegen, dass man bislang nicht den linearen Raum, welcher von allen Thetareihen zu Formen eines festen Geschlechts aufgespannt wird, funktionentheoretisch kennzeichnen kann. Wie Witt gezeigt hat, liegen alle positiven geraden quadratischen Formen der Determinante Eins in einem Geschlecht. Die zugehörigen Thetareihen sind Modulformen zur vollen Siegelschen Modulgruppe.

Ich möchte mich aus diesem Grunde in dem vorliegenden Aufsatz ganz auf die volle Siegelsche Modulgruppe beschränken. Diese Einschränkung ist für den Beweis der Andrianovschen Formeln, welche man in [1] nachlesen kann, jedoch ohne Belang.

1. Siegelsche Modulformen

Die Siegelsche Halbebene g-ten Grades S_g besteht aus allen g-reihigen symmetrischen komplexen Matrizen $Z=Z'$, deren Imaginärteil positiv definit ist. Die Siegelsche Modulgruppe g-ten Grades Γ_g besteht aus allen ganzen symplektischen Transformationen

$$Z \to MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z}).$$

Sei

$$f(Z) = \sum_{\substack{T=T' \geq 0,\\ T \text{ gerade}}} a(T)\, e^{\pi i \,\mathrm{Sp}(TZ)}$$

eine in S_g konvergente Fourierreihe, wobei nur über symmetrische, semipositive und gerade Matrizen T summiert wird. (Eine symmetrische Matrix heisst gerade, wenn sie ganz ist und wenn ihre Diagonalelemente gerade sind.)

Die Reihe $f(Z)$ heisst Modulform g-ten Grades vom Gewicht $r \in \mathbf{Z}$, falls sie das Transformationsverhalten

$$f\big((AZ+B)(CZ+D)^{-1}\big) = \det(CZ+D)^r f(Z), \qquad M \in \Gamma_g, \tag{1}$$

besitzt. Beispiele für solche Modulformen sind die Thetareihen zu positiven, geraden quadratischen Formen $S = S^{(2r)}$ der Determinante 1

$$\vartheta_S(Z) = \sum_{G = G^{(2r,g)} \text{ ganz}} e^{\pi i \,\mathrm{Sp}(G'SGZ)}. \tag{2}$$

Die Fourierentwicklung dieser Reihe hat die Form

$$\vartheta_S(Z) = \sum A(S, T)\, e^{\pi i \,\mathrm{Sp}(TZ)},$$

wobei $A(S, T)$ die Anzahl aller Darstellungen

$$G'SG = T, \qquad G = G^{(2r,g)} \text{ ganz},$$

bezeichne.

Wir bezeichnen mit $[\Gamma_g, r]$ den Vektorraum aller Modulformen g-ten Grades vom Gewicht r. Dieser ist endlichdimensional, und es gilt

$$[\Gamma_g, r] = 0 \quad \text{für} \quad r < 0, \qquad [\Gamma_g, 0] = \mathbf{C}.$$

Der Siegelsche Φ-Operator

$$[\Gamma_g, r] \to [\Gamma_{g-1}, r]$$

$$(f|\Phi)(Z^{(g-1)}) = \lim_{t\to\infty} f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \text{it} \end{pmatrix}$$

ist für Induktionsbeweise von fundamentaler Bedeutung. Sein Kern

$$[\Gamma_n, r]_0 = \{f \in [\Gamma_n, r], f|\Phi = 0\}$$

ist der Unterraum der Spitzenformen. Es gilt

$$\vartheta_S(Z^{(g)})|\Phi = \vartheta_S(Z^{(g-1)}).$$

Definition 1.1. *Eine Modulform g-ten Grades $f \in [\Gamma_g, r]$ heisst singulär, wenn ihre Fourierentwicklung*

$$f(Z) = \sum_{\substack{T = T' \geq 0, \\ T \text{ gerade}}} a(T) e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

der Bedingung

$$a(T) \neq 0 \Rightarrow \det T = 0$$

genügt.

Ohne die Theorie der singulären Modulformen zu benutzen, beweisen wir

Satz 1.2. *Jede singuläre Modulform $f \in [\Gamma_g, r]$ ist Linearkombination von Thetareihen ϑ_S zu positiv definiten, geraden quadratischen Formen $S = S^{(2r)}$ der Determinante* 1.

FOLGERUNG (Resnikoff [5]). *In* $[\Gamma_g, r]$ *kann nur dann eine singuläre Modulform existieren, wenn*

$$g > 2r$$

gilt.

(Der Hauptsatz der Theorie der singulären Modulformen besagt, dass auch umgekehrt unter dieser Bedingung jede Modulform singulär ist.)

BEWEIS. Sei

$$f(Z) = \sum a(T)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

eine singuläre Modulform, welche nicht identisch verschwindet. Wir wählen einen von 0 verschiedenen Fourierkoeffizienten $a(T)$, so dass der Rang ρ von T maximal ist. Bekanntlich existiert eine unimodulare Matrix $U \in \mathrm{Gl}(g, \mathbf{Z})$ mit

$$U' T U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \qquad S = S^{(\rho)} > 0\,.$$

Wir wählen nun T und U so, dass die Determinante $\det S$ minimal ist. Schlüssel zum Beweis von 1.2 ist die

BEHAUPTUNG. Es gilt
a) $\rho = 2r$
b) $\det S = 1$.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Wir entwickeln die Funktion

$$f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}; \qquad Z = Z^{(\rho)}, \quad W = W^{(g-\rho)}$$

in eine Fourierreihe

$$f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \sum A_T(W)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}.$$

Bekanntlich sind die Funktionen $A_T(W)$ selbst Modulformen g-ten Grades vom Gewicht r. Durch Umordnen der Fourierreihe von f erhält man

$$A_T(W) = \sum a\begin{pmatrix} T_1 & T'_{12} \\ T_{12} & T \end{pmatrix} e^{\pi i \operatorname{Sp}(T_1 W)}.$$

Zu summieren ist über alle T_1, T_{12}, so dass die Matrix

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T_1 & T'_{12} \\ T_{12} & T \end{pmatrix}$$

gerade und semipositiv ist.

Wir bestimmen die Funktion $A_T(W)$ im Spezialfall $T = S$. Wenn der Koeffizient $a(\tilde{T})$ von 0 verschieden ist, so gilt nach Wahl von ρ

$$\tilde{T} = U' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} U, \qquad U \in \mathrm{Gl}(g, \mathbf{Z}), \quad T^* = T^{*(\rho)} \geq 0.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$S = G' T^* G, \qquad U = \begin{pmatrix} * & * \\ * & G \end{pmatrix}, \quad G = G^{(\rho)}.$$

Hieraus folgt $\det T^* \neq 0$. Nach Wahl von S erhalten wir

$$\det T^* \geq \det S.$$

Die Matrizen S und T^* sind demnach unimodular äquivalent und wir erhalten

$$A_S(W) = a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \sum_{\begin{pmatrix} T & T'_{12} \\ T_{12} & S \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}} e^{\pi i \operatorname{Sp}(TW)}.$$

Die in der Summationsbedingung auftretenden Matrizen sind alle von der Form

$$\begin{pmatrix} G'SG & G'S \\ SG & S \end{pmatrix}; \qquad G \text{ ganz}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{A_S(W)}{a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}} = \vartheta_S(W).$$

Insbesondere ist

$$\vartheta_S(W) \in [\Gamma_\rho, r].$$

Hieraus folgt aber $\det S = 1$ und $\rho = 2r$, wie behauptet.

Satz 1 ist eine einfache Folgerung aus der Behauptung: Wir bezeichnen mit $S_1, \ldots, S_h$ ein Vertretersystem der unimodularen Klassen aller positiven geraden Formen $S = S^{(2r)}$ der Determinante Eins und bilden

$$f_0(Z) = f(Z) - \sum_{\nu=1}^{h} c_\nu \vartheta_{S_\nu}(Z) = \sum a_0(T)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

(3)

$$c_\nu = \frac{a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_\nu \end{pmatrix}}{A(S_\nu, S_\nu)}.$$

Dann gilt jedenfalls

$$a_0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{falls } \det S = 1, S = S^{(2r)}.$$

Aus der Behauptung folgt $f_0 = 0$. Das Verfahren, eine singuläre Modulform als Linearkombination von Thetareihen darzustellen, ist also durchaus effektiv.

2. Die Wirkung der Heckeoperatoren auf Thetareihen im Falle $g > 2r$

Im folgenden seien g, n, r feste natürliche Zahlen. Die Bausteine der Heckeoperatoren «vom Typ $T(n)$» sind Substitutionen der Art

$$Z \to MZ = (AZ + B) D^{-1}$$

Dabei seien A, B, D ganze g-reihige Matrizen mit der Eigenschaft

$$AD' = nE, \qquad BD^{-1} = (BD^{-1})'.$$

Gegeben seien l Substitutionen von diesem Typ

$$M_j \leftrightarrow (A_j, B_j, D_j), \qquad j = 1, \ldots, l,$$

sowie ein l-Tupel komplexer Zahlen $c_1, \ldots, c_l$. Wir bilden die formale Summe

$$« T = \sum_{j=1}^{l} c_j M_j »$$

und fassen T als Operator auf, welcher eine Funktion $f\colon S_g \to \mathbf{C}$ in

$$(f|T)(Z) := \sum_{j=1}^{l} c_j f\big((A_j Z + B_j) D_j^{-1}\big)$$

überführt. Dieser Operator führt eine Fourierreihe

$$f(Z) = \sum_{H = H' \text{ gerade}} a(H)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}$$

wieder in eine Fourierreihe über, und zwar gilt

$$(4) \qquad \begin{aligned} (f|T)(Z) &= \sum_{H = H', nH \text{ gerade}} a_T(H)\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)} \\ a_T(H) &= \sum_{1 \le j \le l,\, D_j H A_j^{-1} \text{ gerade}} a(D_j H A_j^{-1})\, e^{\pi i \operatorname{Sp}(HA_j^{-1}B_j)}. \end{aligned}$$

THEOREM 2.1. *Sei $g > 2r$. Mit $S_1, \ldots, S_h$ werde ein Vertretersystem der Klassen positiver gerader g-reihiger Matrizen der Determinante* 1 *bezeichnet. Der Operator*

$$«T = \sum_{j=1}^{l} c_j M_j», \qquad M_j \leftrightarrow (A_j, B_j, D_j),$$

möge den Vektorraum $[\Gamma_g, r]$ in sich überführen. Dann gilt

$$\vartheta_{S_\nu} | T = \sum_{\mu=1}^{h} c_{\nu\mu}(T)\, \vartheta_{S_\mu}, \qquad 1 \le \nu \le h,$$

mit

$$(5) \qquad c_{\nu\mu}(T) = \sum_{j=1}^{l} c_j \frac{A\left(S_\nu, D_j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_\mu \end{pmatrix} A_j^{-1}\right)}{A(S_\mu, S_\mu)}\, e^{\pi i \operatorname{Sp}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_\mu \end{pmatrix} A_j^{-1} B_j\right)}.$$

ZUSATZ. *Diese Formel ist auch im Falle $g = 2r$ richtig, wenn man voraussetzt, dass T die von den Thetareihen ϑ_{S_ν}, $1 \le \nu \le h$, aufgespannte Teilschar von $[\Gamma_g, r]$ in sich überführt.*

Wir spezialisieren Theorem 2.1 auf den Fall eines Heckeoperators. Sei $M = M^{(2g)}$ eine $2g$-reihige ganze Matrix mit der Eigenschaft

$$M' I M = n I, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Bekanntlich zerfällt die Doppelnebenklasse $\mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z}) M \,\mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z})$ in endlich viele Linksnebenklassen

(6) $$\mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z}) M \,\mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z}) = \bigcup_{j=1}^{l} \mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z}) \cdot M_j .$$

Man findet sogar ein Vertretersystem der Form

$$M_j = \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ 0 & D_j \end{pmatrix}$$

und es gilt dann

$$A_j D_j' = nE, \qquad B_j D_j^{-1} \text{ ist symmetrisch}.$$

Der Operator

$$f(Z) \to \sum_{j=1}^{l} (\det D_j)^{-r} f\big((A_j Z + B) D_j^{-1}\big)$$

bildet den Vektorraum $[\Gamma_g, r]$ in sich ab und seine Wirkung auf diesem Raum hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten M_j ab. Wir erhalten also einen wohldefinierten Operator

(7) $$T_M : [\Gamma_g, r] \to [\Gamma_g, r],$$

den sogenannten *Heckeoperator* zur Doppelnebenklasse $\mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z}) M \,\mathrm{Sp}(g, \mathbf{Z})$. Das Vertauschungsgesetz zwischen Heckeoperatoren und Siegelschem Φ-Operator ist wohlbekannt [6]. Insbesondere weiss man

Satz 2.2 (Žarkovskaya [6]). *Zu jedem Heckeoperator $T = T_M$ vom Grade g existiert eine Linearkombination $\tilde{T} = \sum c_\nu T_{M_\nu}$ von Heckeoperatoren $(g+1)$-ten Grades, so dass*

(8) $$f \,|\, \tilde{T} \,|\, \Phi = f \,|\, \Phi \,|\, T \quad \text{für} \quad f \in [\Gamma_{g+1}, r]$$

gilt.

Aus diesem Satz und aus Theorem 2.1 folgt, dass der von den Thetareihen aufgespannte Unterraum unter Heckeoperatoren invariant bleibt. Da die Zuordnung $T \to \tilde{T}$ in Žarkovskayas Arbeit durchaus konkret beschrieben ist, kann man sagen:

Theorem 2.1 in Verbindung mit Žarkovskayas Vertauschungsgesetz ergibt explizite Formeln für die Wirkung der Heckeoperatoren auf Thetareihen.

Wir können nun 2.1 für Heckeoperatoren T_M auch im Falle $g=2r$ anwenden, insbesondere für den Operator

$$T(n) := \sum T_M,$$

wobei M ein Vertretersystem aller Doppelnebenklassen (6) mit der Eigenschaft $M'IM=nI$ durchläuft.

Bekanntlich existiert ein System $\mathscr{D}(M)$ von g-reihigen ganzen Matrizen D mit von 0 verschiedener Determinante, so dass folgendes gilt:

Für jedes feste $D \in \mathscr{D}(M)$ durchlaufe B ein Vertretersystem ganzer Matrizen mit der Eigenschaft $(BD^{-1}) = (BD^{-1})'$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$B_1 \sim B_2 \Leftrightarrow (B_1 - B_2)\, D^{-1} \text{ ganz}.$$

Dann durchlaufen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}; \qquad A'D = nE$$

ein volles Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von

$$\{M = M^{(2g)} \textit{ ganz}, \ M'IM = nI\}.$$

Wir können den Heckeoperator $T(n)$ also als formale Summe

$$(9) \qquad \text{«}\ T(n) = \sum_{D \in \mathscr{D}(M)} \ \sum_{\substack{B \bmod D \\ B \text{ ganz}, \ BD^{-1} \text{ symmetrisch}}} (\det D)^{-\frac{g}{2}} \begin{pmatrix} nD'^{-1} & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{»}$$

schreiben.

Wir setzen für beliebige ganze symmetrische $S = S^{(g)}$ und $D = D^{(g)} \in \mathscr{D}(M)$

$$(10) \qquad \sigma(D, S) = \sum_{\substack{B \bmod D \\ B \text{ ganz}, \ BD^{-1} \text{ symmetrisch}}} e^{\pi i \, \mathrm{Sp}(SBD^{-1})}.$$

Die in Theorem 2.1 auftretenden Koeffizienten haben nun die Form ($g=2r$)

$$(11)\qquad c_{\nu\mu}(T(n)) = \sum_{D\in\mathscr{D}(M)} (\det D)^{-\frac{g}{2}} \frac{A\left(S_\nu, \frac{1}{n} S_\mu [D']\right)}{A(S_\mu, S_\mu)}\, \sigma\left(D, \frac{1}{n} S_\mu [D']\right).$$

Die Summe $\sigma(D,S)$ kann man leicht berechnen. Dazu führen wir D durch geeignete unimodulare Matrizen $U, V\in \mathrm{Gl}(g,\mathbf{Z})$ in Elementarteilerform über

$$UDV=D_E=\begin{pmatrix} d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_g\end{pmatrix},\quad d_\nu \mid d_{\nu+1} \quad \text{für} \quad 1\le \nu\le g.$$

Offensichtlich gilt

$$(12)\qquad \sigma(S,D)=\sigma(S[U'],D_E).$$

Wir können zur Berechnung von $\sigma(S,D)$ annehmen, dass D eine Elementarteilermatrix ist.

HILFSSATZ 2.3. *Sei $S=S^{(g)}$ eine symmetrische ganze Matrix und $D=D_E$ eine Elementarteilermatrix. Wenn die Summe $\sigma(D,S)$ von 0 verschieden ist, so gilt*

$$(13)\qquad 2d_\nu \mid s_{\nu\nu} \quad \text{und} \quad d_\mu \mid s_{\nu\mu} \quad \text{für} \quad 1\le\nu\le\mu\le g,$$

und in diesem Fall ist

$$\sigma(D,S)=d_n d_{n-1}^2\cdots d_1^n.$$

BEWEIS. Die Matrix BD^{-1} ist genau dann symmetrisch, wenn

$$b_{\nu\mu}=\frac{d_\mu}{d_\nu} b_{\mu\nu}$$

gilt. Ist also $b_{\mu\nu}$; $1\le\nu\le\mu\le n$ ein willkürliches System von ganzen Zahlen, so kann man dieses eindeutig zu einer ganzen Matrix B ergänzen, so dass BD^{-1} symmetrisch ist. Ein Vertretersystem $\mathrm{mod}\, D$ erhält man durch die Forderung

$$0\le b_{\nu\mu}<d_\mu \quad \text{für} \quad \nu\ge\mu.$$

Dieses Vertretersystem enthält genau $d_n d_{n-1}^2\cdots d_1^n$ Elemente. Der Hilfssatz ist nunmehr evident.

Eine erhebliche Vereinfachung der Formel (11) erhält man, wenn $n=p$ eine Primzahl ist. Ein System $\mathscr{D}(M)$ kann man in diesem Fall leicht angeben. Bezeichnet man mit $\mathscr{D}(j)$, $0 \leq j \leq g$ ein Vertretersystem aller Linksnebenklassen $\mathrm{Gl}(g, \mathbf{Z})\, D$, so dass die zu D gehörige Elementarteilermatrix D_E die Form

$$D_E = \begin{pmatrix} E^{(g-j)} & 0 \\ 0 & pE^{(j)} \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq j \leq g,$$

hat, so kann man

$$\mathscr{D}(M) = \bigcup_{j=0}^{g} \mathscr{D}(j) \tag{14}$$

nehmen.

Behauptung. Wenn die in der Formel (11) auftretende Zahl $A\left(S_\nu, \frac{1}{p} S_\mu[D']\right)$, $D \in \mathscr{D}(j)$, von 0 verschieden ist, so gilt $j \geq \frac{g}{2}$ und

$$(\det D)^{-\frac{g}{2}} \sigma\left(D, \frac{1}{p} S_\mu[D']\right) = p^{\frac{j(j+1-g)}{2}}.$$

Beweis. Wir können $D = D_E$ annehmen. Wenn die Matrix

$$\frac{1}{p} S_\mu[D'] = \begin{pmatrix} * & * \\ * & S_0 \end{pmatrix}, \qquad S_0 = S_0^{(j)}$$

ganz ist, so gilt
a) $p^g \mid (\det D)^2$, also $g \leq 2j$
b) $S_0 \equiv 0 \bmod p$.

Die in Hilfssatz 2.3 formulierte Bedingung für das Nichtverschwinden der Summe $\sigma(D, S)$ ist also erfüllt.
Wir erhalten nun die Koeffizientenformel

$$c_{\nu\mu}(T(p)) = \sum_{j=g/2}^{g} p^{\frac{j(j+1-g)}{2}} \sum_{D \in \mathscr{D}(j)} \frac{A(S_\nu, p\, S_\mu[D'])}{A(S_\mu, S_\mu)}. \tag{15}$$

Hierbei durchlaufe $\mathscr{D}(j)$ ein Vertretersystem aller Linksnebenklassen $\mathrm{Gl}(g, \mathbf{Z}) \cdot D$, so dass die zu D gehörige Elementarteilermatrix die Form

$$D_E = \begin{pmatrix} E^{(g-j)} & 0 \\ 0 & pE^{(j)} \end{pmatrix}$$

hat.

Andrianov hielt im Sommersemester 1979 in Heidelberg eine Vorlesung über seine expliziten Formeln. Aus dieser Vorlesung stammt eine weitere Vereinfachung der Formel (15)

HILFSSATZ 2.4. *Für $g/2 \leq j \leq g$ gilt*

$$A(S_\nu, pS_\mu) = a(p,j,g) \sum_{D \in \mathscr{D}(j)} A\left(S_\nu, \frac{1}{p} S_\mu [D']\right). \tag{16}$$

Dabei sei

$$a(p,j,g) = \frac{(p^{g-j+1}-1)(p^{g-j+2}-1)\cdots(p^{g/2}-1)}{(p-1)(p-1)\cdots(p^{j-g/2}-1)}. \tag{17}$$

BEWEIS. Wir setzen

$$D_j = \begin{pmatrix} E^{(g-j)} & 0 \\ 0 & pE^{(j)} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Ist eine Darstellung

$$G' S_\nu G = p S_\mu, \qquad G \text{ ganz}, \tag{19}$$

gegeben, so ist die Elementarteilermatrix G_E von G notwendig von der Form

$$G_E = D_{g/2},$$

wie man sich leicht überlegt. Da die Matrizen $D_{g/2}$ und $pD_{g/2}^{-1}$ unimodular äquivalent sind, existieren unimodulare Matrizen U, $V \in \mathrm{Gl}(g, \mathbf{Z})$ mit der Eigenschaft

$$U \cdot G \cdot V = p \cdot D_{g/2}^{-1}.$$

Nach Voraussetzung ist $j \geq g/2$. Daher gilt

$$p \cdot D_{g/2}^{-1} = \tilde{D}_j p \cdot D_j^{-1}$$

mit einer ganzen Matrix $\tilde{D}_j$. Infolgedessen besitzt die Matrix G eine Zerlegung

$$G = G_1 p D'^{-1}; \qquad D \in \mathscr{D}(j),\ G_1 \text{ ganz},$$

und aus (19) folgt

$$S_\nu[G_1] = \frac{1}{p} S_\mu[D']. \tag{20}$$

Hilfssatz 2.4 folgt nun aus folgender

Behauptung. Die in (17) definierte Zahl $a(p,j,g)$ ist gleich der Anzahl aller Matrizen $D \in \mathscr{D}(j)$, für die $G_1 = (1/p)\,GD'$ ganz ist.

Es ist klar, dass die Anzahl nicht von der Wahl des Vertretersystems abhängt. Nach Voraussetzung existieren unimodulare Matrizen U, V mit der Eigenschaft

$$G = U D_{g/2} V.$$

Da mit D auch die Matrizen DV' ein Vertretersystem der gewünschten Art durchlaufen, kann man zur Berechnung obiger Anzahl

$$G = D_{g/2}$$

annehmen. Damit ist gezeigt, dass die gesuchte Anzahl nicht von G, also nur von p, j, g abhängt. Da nur dies für den Fortgang der Rechnungen und für die Anwendungen in §3 von Belang ist, verzichten wir hier auf die genaue Bestimmung dieser Anzahl.

Theorem 2.5 (Andrianov). *Seien m, g natürliche Zahlen, p eine Primzahl. Mit $S_1, \ldots, S_h$ werde ein Vertretersystem der Klassen positiver, gerader, m-reihiger Matrizen der Determinante* 1 *bezeichnet. Es gilt*

$$\vartheta_{S_\nu}(Z^{(g)}) \mid T(p) = \beta(p,m,g) \cdot \sum_{\mu=1}^{h} A(S_\nu, pS_\mu)\, \theta_{S_\mu}.$$

Dabei ist

$$\beta(p,2r,g) = p^{\frac{1}{2}g(g+1)-gr} \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{r-g} (1+p^{j-1})^{-1} & \text{für } g \leq r \\ \prod\limits_{j=1}^{g-r} (1+p^{-j}) & \text{für } g \geq r. \end{cases}$$

Im Falle $g = m = 2r$ ist Theorem 2.5 eine Folge aus (15), (16), sowie aus der Summenformel

$$\beta(p,g,g) = \sum_{j=g/2}^{g} a(p,j,g)\, p^{\frac{j(j+1-g)}{2}}. \tag{21}$$

Der allgemeine Fall ist nun eine Folge des Vertauschungsgesetzes

$$f \mid T(p) \mid \Phi = (1+p^{g-r}) f \mid \Phi \mid T(p). \tag{22}$$

3. Der Siegelsche Hauptsatz

Wir leiten aus Theorem 2.5 in Anlehnung an Andrianovs Arbeit [1] kurz gewisse Spezialfälle des Siegelschen Hauptsatzes her.

SATZ 3.1. *In* $[\Gamma_g, r]$, $r \equiv 0 \mod 2$, $r > g+1$, *existiert eine und nur eine Modulform f mit den folgenden Eigenschaften*:
a) *Der O-te Fourierkoeffizient ist f.*
b) *Es gilt*

$$f \mid T(p) = \lambda(p) f$$

für unendlich viele Primzahlen p.
Diese Funktion ist sogar Eigenfunktion unter allen Heckeoperatoren und es gilt

$$\lambda(p) = \sum_{j=1}^{g} (p^{r-j}+1)^2 .$$

BEWEIS. 1) *Existenz*. Mithilfe von Thetareihen kann man zeigen, dass eine Modulform f mit nichtverschwindendem O-tem Fourierkoeffizienten existiert. Da $[\Gamma_g, r]$ bekanntlich eine Basis aus Eigenformen besitzt, muss sogar eine Eigenform mit dieser Eigenschaft existieren. Die Eigenwerte $\lambda(p)$ kann man leicht ausrechnen, indem man die Wirkung des Operators $T(p)$ auf den O-ten Fourierkoeffizienten bestimmt.

2) *Eindeutigkeit*. Da man durch Induktion nach g schliessen kann, genügt es, folgendes zu zeigen: [1], Lemma 4.5.1.

Sei $f \in [\Gamma_g, r]_0$ *eine von* 0 *verschiedene Spitzenform mit der Eigenschaft* $f \mid T(p) = \mu(p) f$ *für unendlich viele p. Dann gilt*

$$\frac{\mu(p)}{\lambda(p)} \to 0 \quad \textit{für} \quad p \to \infty$$

(also insbesondere $\mu \neq \lambda$*).*

Eine brauchbare Abschätzung für die Eigenwerte $\mu(p)$ erhält man mittels der bekannten Heckeschen Methode, bei welcher ausgenutzt wird, dass die Funktion $|f(Z)(\det Y)^{r/2}|$ für Spitzenformen beschränkt bleibt.

Die *Eisensteinreihe* zur Siegelschen Modulgruppe wird unter der Konvergenzbedingung $r > g+1$ durch

$$E_{g,r}(Z) = \sum \det(CZ+D)^{-r}$$

definiert. Hierbei ist über ein Vertretersystem aller Klassen $\{(UC, UD),\ U \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{Z})\}$ zu summieren, wobei die Matrizenpaare $C = C^{(g)}$, $D = D^{(g)}$ folgenden Bedingungen zu genügen haben.

a) $C'D = D'C$

b) Die Rechteckmatrix (C, D) ist ganz und primitiv, d.h. zu einer unimodularen Matrix ergänzbar.

THEOREM 3.2 (Siegel). *Im Falle $m = 2r > 2(g+1)$ gilt*

$$\sum_{\nu=1}^{h} m_\nu \vartheta_{S_\nu}(Z) = E_{g,r}(Z), \qquad Z \in S_g.$$

$$m_\nu = \frac{A(S_\nu, S_\nu)^{-1}}{A(S_1, S_1)^{-1} + \cdots + A(S_m, S_m)^{-1}}.$$

Bekanntlich ist die Eisensteinreihe Eigenform der Heckeoperatoren. Wir müssen also im Hinblick auf Satz 3.1 nur zeigen, dass die Siegelsche Linearkombination der Thetareihen eine Eigenform unter allen $T(p)$ ist. Dies folgt unmittelbar aus den expliziten Formeln, wenn man zeigt:

Der Ausdruck

$$\lambda_\mu(p) := \sum_{\nu=1}^{h} \frac{A(S_\nu, pS_\mu)}{A(S_\nu, S_\nu)}; \qquad \mu = 1, \ldots, h \tag{23}$$

hängt nicht von μ ab.

Die Zahl $\lambda_\mu(p)$ stimmt offenbar mit der Anzahl aller Linksnebenklassen $\mathrm{Gl}(g, \mathbf{Z})\, G$ überein, wobei $G = G^{(g)}$ alle ganzen Matrizen durchläuft, so dass

$$pS_\mu[G^{-1}]$$

unimodular und gerade ist. Die Matrizen $S_1, \ldots, S_h$ liegen alle im selben Geschlecht. Man kann daher die Vertreter $S_1, \ldots, S_h$ so wählen, dass

$$S_1 \equiv S_2 \equiv \cdots \equiv S_h \bmod l$$

gilt, wobei l eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl ist. Wählt man für l eine genügend grosse p-Potenz, so ergibt sich die Unabhängigkeit der Summe (23) von μ.

LITERATUR

[1] Andrianov, A.N.: *Die multiplikative Arithmetik Siegelscher Modulformen.* (russisch) Uspechi Math. Nauk. *34, 1* (205), 1979.

[2] Freitag, E.: *Stabile Modulformen.* Math. Ann. *230* (1977), 197–211.

[3] Freitag, E.: *Die Invarianz gewisser von Thetareihen erzeugter Vektorräume unter Heckeoperatoren.* Math. Z. *156* (1977), 141–155.

[4] Freitag, E.: *Korrektur zu [3].* erscheint in der Math. Z.

[5] Resnikoff, H.L.: *On a class of linear differential equations for automorphic forms in several complex variables.* Amer. J. Math. *95* (1973), 321–332.

[6] Žarkovskaya, N.A.: *Siegel-Operator und Hecke-Operatoren.* Funkcional'. Anal. Priložen. *82* (1974), 30–38.

Received: June 20, 1979.