Math. Z. 171, 27–35 (1980)

Mathematische Zeitschrift

Eine Bemerkung zur Theorie der Hilbertschen Modulmannigfaltigkeiten hoher Stufe

Eberhard Freitag

Mathematisches Institut der Universität, Im Neuenheimer Feld 288, D-6900 Heidelberg 1, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Kürzlich hat Van der Geer [5] gezeigt, daß die Hilbertschen Modulflächen zu Hauptkongruenzgruppen genügend hoher Stufe minimal sind.

Dieses Resultat kann man auf beliebige Dimensionen verallgemeinern, wie im folgenden dargelegt werden soll. Wir werden allgemeiner zeigen:

Jede holomorphe Abbildung einer rationalen oder elliptischen Kurve in eine durch die Spitzen kompaktifizierte Hilbertsche Modulmannigfaltigkeit genügend hoher Stufe ist konstant.

Dieser Satz impliziert neben der erwähnten Minimalität auch Aussagen über die Automorphismengruppe der entsprechenden Funktionenkörper.

Die Beweismethode ist elementar und beruht auf der genauen Beschreibung von holomorphen Kurven in der Nähe von Spitzen (Satz 1).

Dieses „Kurvenlemma" läßt sich auch für andere Modulmannigfaltigkeiten, beispielsweise die Siegelschen, beweisen [4]. Im Falle der Hilbertschen Modulgruppe ist der Beweis fast trivial.

Im folgenden seien L ein total reeller Zahlkörper vom Grad n und

$$L \to \mathbb{R}, \quad a \to a^{(j)}, \quad j=1,\dots,n$$

die n verschiedenen Einbettungen von L in $\mathbb{R}$. Sei

$$\mathfrak{t} \subset L \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gitter vom Rang n und

$$\Lambda \subset \mathfrak{o}^*$$

eine Gruppe von total positiven Einheiten, welche in der vollen Einheitengruppe endlichen Index hat und welche auf $\mathfrak{t}$ operiert.

$$\varepsilon \in \mathfrak{t}, \quad a \in \Lambda \Rightarrow \varepsilon a \in \mathfrak{t}.$$

0025-5874/80/0171/0027/$01.80

Es gilt

$$\mathfrak{t} \cong \mathbb{Z}^n \quad \text{und}$$
$$\Lambda \cong \mathbb{Z}^{n-1} \quad \text{(Dirichletscher Einheitensatz)}$$

Die Gruppen $\mathfrak{t}$ und Λ operieren auf dem Produkt von n oberen Halbebenen

$$H^n = H \times \ldots \times H, \qquad H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$$

fixpunktfrei und diskontinuierlich. Wir wollen die holomorphen Abbildungen

$$\varphi\colon E^{\bullet} \to H^n/\mathfrak{t} \cdot \Lambda$$
$$E^{\bullet} = \{q \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1\}$$

genau beschreiben. Hebt man φ auf die universelle Überlagerung hoch, so erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} z \arrow[d] & H \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & H^n \arrow[d] & \\ q & E^{\bullet} \arrow[r, "\varphi"'] & H^n/\mathfrak{t} \cdot \Lambda & q = e^{2\pi i z} \end{tikzcd}$$

$$\Phi(z+1) = \varepsilon\, \Phi(z) + a, \qquad \varepsilon \in \Lambda, \qquad a \in \mathfrak{t}.$$

1. Satz. *Ist*

$$\varphi\colon E^{\bullet} \to H^n/\mathfrak{t} \cdot \Lambda$$

eine holomorphe Abbildung, so gilt

$$\Phi(z) = a\, z + \Phi_0(q), \qquad a \in \mathfrak{t}.$$

Die Funktion Φ_0 hat in $q=0$ eine hebbare Singularität.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem

2. Hilfssatz. *Sei $\Phi\colon H \to H$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft*

$$\Phi(z+1) = \varepsilon\, \Phi(z) + a; \qquad \varepsilon > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

a) $\varepsilon = 1$

b) *die Funktion* $\dfrac{d\Phi(z)}{dz}$ *hat als Funktion von* $q = e^{2\pi i z}$ *eine hebbare Singularität in* $q=0$.

Beweis.

1. Fall: $\varepsilon = 1$.

Die Funktion $\Phi(z)$ ist dann von der Form

$$\Phi(z) = a\, z + \Phi_0(q).$$

Wir wählen eine positive reelle Zahl C, so daß $C \cdot a$ ganz rational ist. Die Bedingung $\operatorname{Im} \Phi(z) > 0$ impliziert

$$|e^{-2\pi i C\Phi(z)}| > 1.$$

Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz hat die Funktion

$$e^{-2\pi i C \cdot \Phi_0(q)}$$

in $q=0$ eine außerwesentliche Singularität. Hieraus folgt, daß auch die Funktion $\Phi_0(q)$ selbst in $q=0$ eine außerwesentliche Singularität hat. Aus der Bedingung $\operatorname{Im} \Phi(z) > 0$ schließt man nun leicht, daß diese Singularität hebbar ist.

2. Fall: $\varepsilon \neq 1$.
Dann gilt

$$\frac{d\Phi(z+1)}{dz} = \varepsilon \cdot \frac{d\Phi(z)}{dz},$$

also

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \varepsilon^z \cdot \tilde{\Phi}(q)$$

Entwickelt man $\tilde{\Phi}$ in eine Laurentreihe, so folgt durch Integration

$$\Phi(z) = \varepsilon^z \cdot \Phi_0(q).$$

Es gilt also $a=0$ und daher

$$\log \Phi(z+1) = \log \varepsilon + \log \Phi(z).$$

Wie im ersten Fall beweist man nun, daß $\Phi_0(q)$ eine hebbare Singularität im Punkt $q=0$ hat. Die Bedingung

$$\operatorname{Im} \varepsilon^z \cdot \Phi_0(q) > 0$$

kann nun leicht zu einem Widerspruch geführt werden.

Wir interessieren uns für holomorphe Tensoren auf der analytischen Mannigfaltigkeit

$$H^n/\mathfrak{t} \cdot \Lambda,$$

also für invariante Tensoren

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_l \leq n} f_{j_1, \ldots, j_l} \, dz_{j_1} \otimes \ldots \otimes dz_{j_l},$$

$f_{\ldots}: H^n \to \mathbb{C}$ holomorph.
Die Invarianz bedeutet

$$f_{j_1, \ldots, j_l}(\varepsilon z + a) \, \varepsilon^{(j_1)} \ldots \varepsilon^{(j_l)} = f_{j_1, \ldots, j_l}(z).$$

Insbesondere sind die Komponenten periodisch und können in Fourierreihen entwickelt werden.

$$f_{j_1,\dots,j_l}(z)=\sum_{g\in\mathfrak{t}_0} a(g)\,e^{2\pi i g z},$$
$$a(g)=a^{j_1,\dots,j_l}(g).$$

Dabei sei

$$g\,z=g^{(1)}z_1+\dots+g^{(n)}z_n$$

und $\mathfrak{t}^0$ das zu $\mathfrak{t}$ duale Gitter.

Aufgrund des Götzky-Koecherprinzips[1] gilt

$$a(g)\neq 0 \Rightarrow g\geqq 0$$
$$(\text{d.h. } g^{(j)}\geqq 0 \text{ für } j=1,\dots,n).$$

Wir nennen ω eine Spitzenform, wenn überdies

$$a(g)\neq 0 \Rightarrow g>0$$

gilt.

3. *Definition: Der Tensor ω hat die starke Fortsetzungseigenschaft, wenn für jede holomorphe Abbildung*

$$\varphi\colon \dot{E}\times E^{n-1}\to H^n/\mathfrak{t}\cdot\Lambda$$

gilt:

Der zurückgezogene Tensor $\varphi^*\omega$ ist auf E^n holomorph fortsetzbar.

Wir erläutern die Bedeutung des Begriffes:

Bekanntlich läßt sich der Raum $H^n/\mathfrak{t}\cdot\Lambda$ durch Hinzufügen eines Punktes ∞ zu einem normalen komplexen Raum

$$X_\infty=H^n/\mathfrak{t}\cdot\Lambda\cup\{\infty\}$$

erweitern. Eine Umgebungsbasis von ∞ definiert man mit Hilfe der Mengen

$$U_C=\{z\in H^n,\ y_1\dots y_n>C\}.$$

Die Spitze ∞ ist jedoch im Falle $n>1$ nicht unformisierbar. Man kann sie jedoch auflösen [6]:

$$p\colon \tilde{X}_\infty\to X_\infty$$

4. *Bemerkung* (vgl. [4], §1). *Sei ω ein holomorpher Tensor auf $H^n/\mathfrak{t}\cdot\Lambda$ mit der starken Fortsetzungseigenschaft. Der Tensor $p^*\omega$ ist auf ganz $\tilde{X}_\infty$ holomorph fortsetzbar.*

Wir betrachten Untergruppen von endlichem Index

$$\mathfrak{t}_0\subset\mathfrak{t},\qquad \Lambda_0\subset\Lambda,$$

wobei Λ_0 ebenfalls auf $\mathfrak{t}_0$ operiere.

---

[1] s. etwa [3], Hilfssatz 2.2, Beweis des „2. Falles“ auf S. 114

5. Satz. *Sei ω ein Tensor vom Grad l auf der Mannigfaltigkeit $H^n/\mathfrak{t}\cdot\Lambda$. Es gelte*

a) *ω ist eine Spitzenform,*

b) *$l\cdot\mathfrak{t}\subset\mathfrak{t}_0$.*

Dann besitzt das Urbild von ω auf $H^n/\mathfrak{t}_0\,\Lambda_0$ die starke Fortsetzungseigenschaft.

Beweis. Die holomorphe Abbildung φ hat nach Satz 1 die Gestalt

$$\Phi(z)=a\,z+\Phi_0(q,w).$$

Es ist leicht zu sehen, daß a und $\Phi_0(q,w)$ auch von den Variablen $w\in E^{n-1}$ analytisch abhängen. Insgesamt ist also Φ_0 eine analytische Funktion

$$\Phi_0\colon E^n\to\mathbb{C}.$$

Der Vektor a gehört einer diskreten Menge an, ist also von w unabhängig.

Wir ziehen nun einen Tensor der Form

$$\omega=f\,dz_{j_1}\otimes\ldots\otimes dz_{j_l}$$

zurück:

$$\Phi^*\,\omega=f(\Phi(z))\,d\Phi_{j_1}\otimes\ldots\otimes d\Phi_{j_l}$$

Dabei ist allgemein

$$d\Phi_\nu=a_\nu\,dz+\frac{\partial\Phi_0(q,\omega)}{\partial q}\,dq,$$

$$dz=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{dq}{q}.$$

Nach Voraussetzung ist f eine Spitzenform bezüglich $\mathfrak{t}$. Der Vektor a gehört dem Gitter $\mathfrak{t}_0$ an. Daher hat die Funktion $f(\Phi(z))$ eine Nullstelle mindestens l-ter Ordnung in $q=0$. Dies folgt leicht aus der Bedingung $l\cdot\mathfrak{t}\subset\mathfrak{t}_0$.

Die *Hilbertsche Modulgruppe* $\Gamma_L=Sl(2,\mathfrak{O})$, $\mathfrak{O}$ der Ring der ganz algebraischen Zahlen in L, operiert auf H^n diskontinuierlich:

$$M\,z=(M^{(1)}\,z_1,\ldots,M^{(n)}\,z_n),$$

$$M^{(j)}\,z_j=\frac{a^{(j)}\,z_j+b^{(j)}}{c^{(j)}\,z_j+d^{(j)}}.$$

Die Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma_L[l]=\{M\in\Gamma_L;\ M\equiv E \bmod l\}$$

operiert fixpunktfrei, wenn l hinreichend groß ist.

Man kann den Quotienten $H^n/\Gamma_L[l]$ durch Hinzufügen endlich vieler Spitzen zu einem kompakten komplexen Raum

$$X=\overline{H^n/\Gamma_L[l]}$$

ergänzen. Bekanntlich ist X sogar eine projektive algebraische Varietät.

6. Satz. *Es existiert eine natürliche Zahl* $l_0 = l_0(L)$ *mit folgender Eigenschaft:*

Sei $\mathfrak{R}$ *eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht* 0 *oder* 1. *Jede holomorphe Abbildung*

$$\varphi\colon \mathfrak{R} \to \overline{H^n/\Gamma_L[l]}, \qquad l \geqq l_0$$

ist konstant.

Beweis.

1. Fall: $\varphi(\mathfrak{R})$ enthält keine Spitzen. Die Zahl l_0 sei so groß gewählt, daß $\Gamma_L[l]$ fixpunktfrei operiert. Dann kann man φ auf die universellen Überlagerungen hochheben.

$$\Phi\colon \tilde{\mathfrak{R}} \to H^n.$$

Nun ist H^n zu einem beschränkten Gebiet biholomorph äquivalent. Nach Voraussetzung ist $\tilde{\mathfrak{R}}$ die Zahlkugel oder die komplexe Ebene. Nach dem Satz von Liouville ist Φ konstant.

2. Fall: $\varphi(\mathfrak{R})$ enthält Spitzen.

Unter einer Hilbertschen Modulform vom Gewicht $r \in \mathbb{Z}$ versteht man eine holomorphe Funktion

$$f\colon H^n \to \mathbb{C}$$

mit der Eigenschaft

$$f(Mz) = \prod_{\nu=1}^{n} (c^{(\nu)} z_\nu + d^{(\nu)})^{2r} f(z), \qquad M \in \Gamma_L.$$

Offenbar ist der Tensor

$$\omega = f(dz_1 \otimes \ldots \otimes dz_n)^{\otimes r}$$

invariant unter Γ_L.

Behauptung. Wenn $\varphi(\mathfrak{R})$ *Spitzen enthält, sind folgende beide Aussagen gleichbedeutend*

a) $\varphi^* \omega = 0$.
b) *Die Nullstellenmannigfaltigkeit von* f *umfaßt* $\varphi(\mathfrak{R})$.

Beweis. Wir können annehmen, daß $\varphi(\mathfrak{R})$ die Spitze ∞ enthält. In der Nähe der Spitze ∞ hat dann φ die in Satz 1 angegebene Form, wobei in der dortigen Bezeichnung a von 0 verschieden ist.

Es gilt dann aber auch

$$a^{(\nu)} \neq 0 \qquad \text{für } \nu = 1, \ldots, n$$

und daher

$$\Phi^* \, \mathrm{d}z_\nu \neq 0.$$

Wir wählen nun die natürliche Zahl l_0 so groß, daß zu je zwei Γ_L-inäquivalenten Punkten $a, b \in H$ eine Spitzenform f vom Gewicht l_0 existiert, welche diese beiden Punkte trennt:

$$f(a)=0, \qquad f(b)\neq 0.$$

Der Tensor

$$\omega = f(dz_1 \otimes \ldots \otimes dz_n)^{l_0}$$

ist bezüglich Γ_L und daher auch bezüglich jeder Untergruppe invariant. Der zurückgezogene Tensor $\varphi^* \omega$ ist im Falle $l \geqq l_0$ auf ganz $\mathfrak{R}$ holomorph, wie unmittelbar aus Satz 5 folgt.

Wenn das Geschlecht von $\mathfrak{R}$ kleiner oder gleich Eins ist, so ist der Vektorraum der holomorphen Tensoren eines festen Gewichts höchstens eindimensional. Mit obiger Methode können wir jedoch zwei linear unabhängige Tensoren vom Gewicht l_0 konstruieren, wenn φ nicht konstant ist. Damit ist Satz 6 bewiesen.

Folgerung. *Sei*

$$\tilde{X} \supset H^n/\Gamma_K[l]$$

eine singularitätenfreie projektive Mannigfaltigkeit, welche $H^n/\Gamma_K[l]$ als Zariski-offenen dichten Teilraum enthält. Sei

$$f\colon \tilde{X} \to Y$$

eine holomorphe, birationale Abbildung auf eine weitere singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit Y. Dann gilt:

Die Einschränkung von f auf $H^n/\Gamma_K[l]$ ist eine offene Einbettung.

Zum Beweis dieser Folgerung hat man zu benutzen, daß die Fasern einer birationalen Abbildung singularitätenfreier algebraischer Mannigfaltigkeiten unirational sind. Dies ist für monodiale Transformationen trivial und folgt allgemein aus Hironakas Desingularisierungstheorie [6] (Chap. 0, Sect. 5, S. 144). Aus Satz 6 folgt, daß $H^n/\Gamma_K[l]$ keine unirationale Varietät positiver Dimension enthalten kann.

Wir bezeichnen mit

$$K = K(\Gamma_L[l])$$

den *Körper der Modulfunktionen*, also der Körper der meromorphen (= rationalen) Funktionen auf X. Wir sind an den Automorphismen dieses Körpers interessiert. Dazu betrachten wir den Normalisator

$$\tilde{\Gamma}_L[l] \supset \Gamma_L[l]$$

von $\Gamma_L[l]$ in der Gruppe aller biholomorphen Automorphismen von H^n. Bekanntlich ist $\tilde{\Gamma}_L[l]$ eine Erweiterung von endlichem Index [8].

$$[\tilde{\Gamma}_L[l] : \Gamma_L[l]] < \infty.$$

Die endliche Gruppe

$$G = \tilde{\Gamma}_L[l]/\Gamma_L[l]$$

operiert in naheliegender Weise auf $H^n/\Gamma_L[l]$ und daher auch auf K.

7. Satz. *Die Abbildung*

$$G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(K(\Gamma_L[l])$$

ist für hinreichend großes l ein Isomorphismus.

Insbesondere ist die Automorphismengruppe endlich, was schon aus der Tatsache folgt, daß $K(\Gamma_L[l])$, $l \gg 0$, von allgemeinem Typ ist ([1], S. 301).

Zum Beweis benötigt man eine Information über eine Desingularisierung

$$\tilde{X} \supset H^n/\Gamma_L[l].$$

Solche Desingularisierungen wurden in [1, 7] konkret konstruiert. Der expliziten Konstruktion entnimmt man:

Die irreduziblen Komponenten von $\tilde{X} - H^n/\Gamma_L[l]$ sind unirational.

(Im Falle $n=2$ wurde dies ohne Kenntnis einer expliziten Auflösung bereits in [2] gezeigt.)

Sei nun σ ein Automorphismus des Funktionenkörpers K, also eine birationale Abbildung

$$\sigma: \tilde{X} \to \tilde{X}.$$

Wie in Hironakas Theorie der Auflösung von Singularitäten gezeigt wird [6] (Cap. 0, Sect. 5, S. 144), existiert eine Modifikation

$$\pi: \tilde{\tilde{X}} \to \tilde{X}$$

und eine *holomorphe* Abbildung

$$\tilde{\sigma}: \tilde{\tilde{X}} \to \tilde{X}$$

mit der Eigenschaft

$$\sigma \circ \pi = \tilde{\sigma}.$$

Aus Satz 6 und unserer Information über $\tilde{X}$ folgt nun leicht (vgl. den Beweis der Folgerung zu Satz 6):

Die Abbildung σ definiert eine holomorphe Abbildung

$$\sigma: H^n/\Gamma_L[l] \to H^n/\Gamma_L[l].$$

Diese muß biholomorph sein. Hebt man diese Abbildung auf die universelle Überlagerung hoch, so erhält man ein Element des Normalisators von $\Gamma_L[l]$.

Literatur

1. Ash, A., Mumford, D., Rapoport, M., Tai, Y.: Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties. Brookline, Mass. USA: Math. Sci. Press 1975
2. Freitag, E.: Die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen. II. J. Reine Angew. Math. **254**, 1–16 (1972)
3. Freitag, E.: Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe. Invent. Math. **17**, 106–134 (1972)
4. Freitag, E.: Der Körper der Siegelschen Modulfunktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **47**, 25–41 (1978)
5. Van der Geer, G.B.M.: On Hilbert modular surfaces of principal congruence subgroups. Dissertation, Rijksuniversiteit te Leiden (1977)
6. Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I. Ann. of Math. **79**, 109–326 (1964)
7. Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. Enseignement Math. **19**, 183–281 (1973)
8. Köhler, G.: Der Normalisator von Hilbert-Siegelschen Stufengruppen. Math. Z. **126**, 247–274 (1972)

Eingegangen am 19. März 1979