Math. Ann. 254, 27–51 (1980)

Mathematische Annalen

Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten zur Siegelschen Modulgruppe

Eberhard Freitag

Mathematisches Institut der Universität, Im Neuenheimer Feld 288, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Unter einer harmonischen Form $P(X)$ vom Gewicht k in einer Matrixvariablen $X = X^{(m,n)}$ verstehen wir ein Polynom

$$P \in \mathbb{C}[x_{\nu\mu}]_{\substack{1 \leqq \nu \leqq m \\ 1 \leqq \mu \leqq n}}$$

mit den Eigenschaften

a) $\Delta P = \sum \dfrac{\partial^2 P}{(\partial x_{\nu\mu})^2} = 0$,

b) $P(XA) = (\det A)^k P(X)$ für $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$.

Eine m-reihige symmetrische reelle Matrix S heißt positiv ($S > 0$), wenn die quadratische Form

$$S[x] = x'Sx = \sum_{1 \leqq \nu, \mu \leqq m} s_{\nu\mu} x_\nu x_\mu$$

positiv definit ist. Bekanntlich ist jede positive Matrix S das Quadrat einer eindeutig bestimmten positiven Matrix $S^{1/2}$.

Wir ordnen dem harmonischen Polynom P und der positiven Matrix S die Thetareihe

$$\vartheta_{S,P}(Z) = \sum_{G = G^{(m,n)} \text{ ganz}} P(S^{1/2}G) e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)}$$

zu, welche in der verallgemeinerten oberen Halbebene

$$S_n = \{Z = Z^{(n)} = Z', \operatorname{Im} Z > 0\}$$

konvergiert.

Diese Thetareihen wurden im Falle $n = 1$ von Hecke [4] und für beliebiges n von Maaß [7] eingeführt. In der zitierten Arbeit bewies Maaß folgende

0025-5831/80/0254/0027/$05.00

Thetatransformationsformel:

$$\vartheta_{S^{-1},P}(iY^{-1}) = (\det S)^{-\frac{n}{2}} (\det Y)^{\frac{m}{2}+k}\, \vartheta_{S,P}(iY).$$

Man nennt die Matrix S gerade, wenn sie nur gerade Zahlen darstellt,

$$S[g] \equiv 0 \bmod 2 \quad \text{für} \quad g \in \mathbb{Z}^n,$$

wenn ihre Komponenten also ganze und die Diagonalelemente sogar gerade Zahlen sind. Wie im Falle $P=1$ ergibt sich aus der Thetatransformationsformel:

Sei $S = S^{(m)}$ eine positive, gerade, unimodulare Matrix[1] *und $P(X^{(m,n)})$ eine harmonische Form vom Gewicht k. Dann ist $\vartheta_{S,P}(Z)$ eine Siegelsche Modulform vom Gewicht $r = k + \frac{m}{2}$.*

Unter einer Siegelschen Modulform vom Gewicht $r \in \mathbb{Z}$ versteht man eine in S_n konvergente Fourierreihe

$$f(Z) = \sum_{H = H' \geqq 0,\, H \text{ gerade}} a(H) e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}$$

mit dem Transformationsverhalten

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^r f(Z)$$

für alle $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n := \operatorname{Sp}(n, \mathbb{Z})$.

Bezeichnet man den Vektorraum dieser Modulformen mit $[\Gamma_n, r]$, so gilt also

$$\vartheta_{S,P} \in [\Gamma_n, r].$$

Wenn man nicht voraussetzen will, daß S gerade und unimodular ist, muß man Γ_n durch gewisse Kongruenzgruppen ersetzen. Für gewisse harmonische Polynome wurde dies in den Arbeiten [1, 6] durchgeführt.

Ich möchte mich in der vorliegenden Arbeit aus Gründen der Einfachheit jedoch ganz auf den Fall der vollen Siegelschen Modulgruppe beschränken.

Alle Thetareihen zu festem m und k spannen eine Teilschar

$$B_{n,r}(m) \subset [\Gamma_n, r]$$

auf. Es ist das Ziel dieser Arbeit, diese Teilscharen funktionentheoretisch zu charakterisieren.

Methoden und Resultate

Wir wählen eine natürliche Zahl $N > m, n$ und bilden die Reihe

$$\tilde{f}(Z^{(N)}) = \sum_{G = G^{(m,N)}} \tilde{P}(S^{1/2} G) e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)}$$

mit

$$\tilde{P}(X) = P(X_1), \qquad X = (X_1^{(m,n)}, X_2^{(m,N-n)}).$$

---

1 Bekanntlich gilt dann $m \equiv 0 \bmod 8$

Diese Reihe ist i.a. keine Modulform, da $\tilde{P}$ keine harmonische Form ist, die Bedingung b) ist verletzt. Es läßt sich jedoch zeigen, daß $\tilde{f}=F_1$ die erste Komponente einer vektorwertigen Modulform

$$F: S_N \to \mathbb{C}^l$$

bezüglich einer Darstellung

$$\varrho: \mathrm{Gl}(N, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(l, \mathbb{C})$$

ist. Diese Funktion besitzt für $M \in \Gamma_N$ das Transformationsverhalten

$$F(M\langle Z\rangle) = \varrho(CZ+D)F(Z).$$

Aufgrund der Wahl von N $(N>m)$, ist diese Modulform singulär, d.h. ihre Fourierentwicklung

$$F(Z) = \sum A(H) e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}$$

genügt der Bedingung

$$A(H) \neq 0 \Rightarrow \det H = 0.$$

Wir werden zeigen (Satz 3.2), daß sich jede vektorwertige singuläre Modulform in kanonischer Weise als Linearkombination von *Thetareihen mit vektorwertigen harmonischen Koeffizienten* darstellen läßt. Die angekündigte funktionentheoretische Charakterisierung der Scharen $B_{n,r}(m)$ ergibt sich hieraus mit Hilfe des Siegelschen Φ-Operators.

Die Theorie der Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten steht also in enger Beziehung zur Theorie der vektorwertigen singulären Modulformen.

1. Harmonische Formen

Im folgenden sei $\mathscr{X}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Gl}(\mathscr{X})$ die Gruppe aller linearen Automorphismen von $\mathscr{X}$. Sei

$$\varrho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X})$$

eine rationale Darstellung, also ein Gruppenhomomorphismus, dessen Komponenten rationale Funktionen sind.

1.1. Definition. Eine harmonische Form bezüglich der Darstellung ϱ ist ein Polynom

$$P: M_{m,n}(\mathbb{C}) \to \mathscr{X}, \qquad M_{m,n}(\mathbb{C}) = \{X = X^{(m,n)}, X \text{ komplex}\}$$

mit den Eigenschaften

1) $P(XA) = \varrho(A')P(X)$ für $A = A^{(n)}$,

2) $\Delta P = 0$.

Wir bezeichnen den Vektorraum aller harmonischen Formen mit $\mathscr{H}(m, \varrho)$.

1.2. Bemerkung. Sei $P(X)$ ein Polynom in der Matrixvariablen $X = X^{(m,n)}$. Folgende beiden Aussagen sind gleichbedeutend:

a) $\partial/\partial X' \partial/\partial X P(X) = 0$,

d.h.

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \frac{\partial}{\partial x_{jk}} P = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq i,\ k \leqq n, \tag{1}$$

b) $\Delta P(XA) = 0$ für jedes $A = A^{(n)}$.

Beweis. Ersetzt man in der Differentialgleichung

$$\Delta P(X) = \mathrm{Sp}(\partial/\partial X' \partial/\partial X) P(X) = 0$$

die Variable X durch XA', so erhält man

$$\mathrm{Sp}(A' \partial/\partial X' \partial/\partial X P(X) A) = 0 .$$

Aus der Gültigkeit dieser Gleichung für alle $A = A^{(n)}$ folgt a). Aus der Darstellung ϱ erhält man durch Reduktion eine Darstellung

$$\begin{aligned} &\varrho|\Phi : \mathrm{Gl}(n-1, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}), \\ &(\varrho|\Phi)(A) = \varrho \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sei $P \in \mathscr{H}(m, \varrho)$ eine harmonische Form.

Das Polynom P

$$(P|\Phi)(X^{(m,n-1)}) = P(X, \mathfrak{o}), \qquad \mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ist ebenfalls harmonisch. Wir erhalten also einen Reduktionsoperator

$$\mathscr{H}(m, \varrho) \xrightarrow{\Phi} \mathscr{H}(m, \varrho|\Phi) .$$

Wir beschreiben einen weiteren Reduktionsoperator. Sei $\tilde{\mathscr{Z}}$ ein weiterer endlichdimensionaler Vektorraum und

$$\tilde{\varrho} : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\tilde{\mathscr{Z}})$$

eine rationale Darstellung. Eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$L : \tilde{\mathscr{Z}} \to \mathscr{Z}$$

heißt äquivariant (bezüglich ϱ und $\tilde{\varrho}$), falls

$$L \circ \tilde{\varrho}(A) = \varrho(A) \circ L \quad \text{für} \quad A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \tag{4}$$

gilt. Ist P eine harmonische Form bezüglich $\tilde{\varrho}$, so ist $L \circ P$ eine harmonische Form bezüglich ϱ, wir erhalten also einen Operator

$$\mathscr{H}(m, \tilde{\varrho}) \to \mathscr{H}(m, \varrho) .$$

Wir kombinieren die beiden Reduktionsoperatoren.

1.3. Bemerkung. Gegeben seien

1) eine rationale Darstellung

$$\varrho : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}),$$

2) eine rationale Darstellung

$$\tilde{\varrho} : \mathrm{Gl}(\tilde{n}, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\tilde{\mathscr{Z}}),$$

3) eine lineare Abbildung

$$L : \tilde{\mathscr{Z}} \to \mathscr{Z}.$$

Annahme. *Es gilt $n \leqq \tilde{n}$, sowie*

$$L \circ \tilde{\varrho} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \varrho(A) \circ L \quad \text{für} \quad A = A^{(n)}, \qquad E = E^{(\tilde{n}-n)}.$$

Wir erhalten dann einen Operator

$$\Phi_L^{\tilde{n}-n} : \mathscr{H}(m, \tilde{\varrho}) \to \mathscr{H}(m, \varrho), \qquad (P | \Phi_L^{\tilde{n}-n})(X) = L \circ P(X, 0).$$

1.4. Hilfssatz. *Sei*

$$P \in \mathscr{H}(m, \varrho)$$

eine harmonische Form bezüglich der rationalen Darstellung

$$\varrho : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}), \qquad \dim \mathscr{Z} < \infty.$$

Zu jeder natürlichen Zahl $\tilde{n} \geqq n$ existieren

1) *eine rationale Darstellung*

$$\tilde{\varrho} : \mathrm{Gl}(\tilde{n}, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\tilde{\mathscr{Z}}), \qquad \dim \tilde{\mathscr{Z}} < \infty,$$

2) *eine lineare Abbildung*

$$L : \tilde{\mathscr{Z}} \to \mathscr{Z},$$

so daß die in 1.3 formulierte Voraussetzung erfüllt ist und so, daß P im Bild des Reduktionsoperators

$$\Phi_L^{\tilde{n}-n} : \mathscr{H}(m, \tilde{\varrho}) \to \mathscr{H}(m, \varrho)$$

enthalten ist.

Zusatz. *Es gelte*

$$\varrho(aE^{(n)}) = a^k \operatorname{id}_{\mathscr{Z}}.$$

Dann kann man

$$\tilde{\varrho}(aE^{(\tilde{n})}) = a^k \operatorname{id}_{\tilde{\mathscr{Z}}}$$

annehmen.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathscr{Z}_0$ den linearen Teilraum von $\mathscr{Z}$, welcher von allen Werten $P(X)$, $X = X^{(m,n)}$, erzeugt wird. Wegen

$$P(XA) = \varrho(A')P(X) \tag{5}$$

bleibt dieser Vektorraum unter allen Transformationen $\varrho(A)$, $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$, invariant. Wir können daher von vornherein $\mathscr{X} = \mathscr{X}_0$ annehmen. Die Komponenten von P bezüglich irgendeiner Basis von $\mathscr{X}$ sind dann linear unabhängige Polynome.

Sei

$$\mathscr{X} = \mathbb{C}^l, \qquad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_l \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Es gibt dann l Punkte $X_1, \ldots, X_l$, so daß die Matrix

$$(P_\nu(X_\mu))_{1 \leqq \nu, \mu \leqq l}$$

nicht ausgeartet ist. Aus (5) folgt dann, daß die Darstellung ϱ polynomial – nicht nur rational – ist.

Wir zerlegen nun die Matrixvariable $X^{(m,\tilde{n})}$;

$$X = X^{(m,\tilde{n})} = (X_1, X_2), \qquad X_1 = X_1^{(m,n)}, \qquad X_2 = X_2^{(m,\tilde{n}-n)} \tag{7}$$

und setzen

$$\tilde{P}_\nu(X) = P_\nu(X_1) \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, l. \tag{8}$$

Wir ergänzen die Polynome $\tilde{P}_\nu(X)$, $1 \leqq \nu \leqq l$ zu einer Basis des Vektorraumes, welcher von allen Polynomen

$$\tilde{P}_\nu(XA); \qquad \nu = 1, \ldots, l; \qquad A = A^{(\tilde{n})} \tag{9}$$

erzeugt wird:

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_l, \tilde{P}_{l+1}, \ldots, \tilde{P}_{\tilde{l}} \quad (l \leqq \tilde{l}) \tag{10}$$

und setzen

$$\tilde{\mathscr{X}} = \mathbb{C}^{\tilde{l}}, \qquad \tilde{P} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_1 \\ \vdots \\ \tilde{P}_{\tilde{l}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Nach Konstruktion gilt

$$\tilde{P}(XA) = \tilde{\varrho}(A')\tilde{P}(X) \quad \text{für} \quad A = A^{(\tilde{n})}$$

mit einer gewissen Matrix $\tilde{\varrho}(A')$. Diese ist eindeutig bestimmt, da die Komponenten von $\tilde{P}$ linear unabhängig sind. Es folgt

a) $\tilde{\varrho}(A)$ ist polynomial (insbesondere rational),

b) $\tilde{\varrho}(AB) = \tilde{\varrho}(A)\tilde{\varrho}(B)$.

Als nächstes zeigen wir, daß $\tilde{P}(X)$ harmonisch ist. Aus dem Differentialgleichungssystem

$$\partial/\partial X_1' \, \partial/\partial X_1 \, P_\nu(X_1) = 0$$

folgt

$$\partial/\partial X' \, \partial/\partial X \, \tilde{P}_\nu(X) = 0, \qquad 1 \leqq \nu \leqq l. \tag{13}$$

Benutzt man 1.2, so folgt

$$\Delta \tilde{P} = 0.$$

Die Projektion (Streichen der letzten $\tilde{l}-l$ Komponenten)

$$L:\mathbb{C}^{\tilde{l}}\to\mathbb{C}^{l}$$

hat die in Hilfssatz 1.4 geforderte Eigenschaft.

Im Hinblick auf Hilfssatz 1.4 gewinnen harmonische Formen zu großem n an Bedeutung. Wir setzen daher $n\geqq m$ voraus. In diesem Falle läßt sich jede Matrix $X=X^{(m,n)}$ in der Form

$$X=(E^{(m)},0)\cdot A^{(n)} \tag{14}$$

schreiben, sogar mit invertierbarem A, wenn die Matrix X Maximalrang m hat.

1.5. Hilfssatz. *Im Falle $n\geqq m$ ist eine harmonische Form*

$$P\in\mathscr{H}(m,\varrho)\,;\qquad \varrho:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{Gl}(\mathscr{Z})$$

durch ihren Wert an der Stelle $(E^{(m)},0)$ eindeutig bestimmt.

Wir nehmen an, daß die Darstellung ϱ sogar polynomial ist. Dann kann man $\varrho(A)$ auch für ausgeartete A bilden. Man erhält aus (14) sogar

$$P(X)=\varrho(X',0)P(E,0)\,.$$

Der Vektor

$$a:=P(E,0)$$

erfüllt offenbar folgende beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned}&\text{a)}\quad \begin{pmatrix}E^{(m)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}a=a\,,\\ &\text{b)}\quad P(X)=\varrho(X',0)a\quad\text{ist harmonisch}\,.\end{aligned} \tag{15}$$

Bezeichnet man den Vektorraum aller Vektoren a mit diesen Eigenschaften mit $H(m,\varrho)$ so gilt:

1.6. Hilfssatz. *Die Darstellung*

$$\varrho:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{Gl}(\mathscr{Z}),\qquad n\geqq m\,,$$

sei polynomial. Die Zuordnung

$$a\to P_a\,;\qquad P_a(X)=\varrho(X',0)a$$

definiert einen Isomorphismus von der durch (15) *definierten Schar $H(m,\varrho)$ von Vektoren auf $\mathscr{H}(m,\varrho)$.*

Beispiele harmonischer Formen

1) $$\begin{array}{ccc}\varrho:\mathrm{Gl}(1,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Gl}(1,\mathbb{C})\\ \| & & \|\\ \mathbb{C}^{\cdot} & \to & \mathbb{C}^{\cdot}\\ a & \to & a^k\,;\quad k=0,1,2\,\ldots\,.\end{array}$$

Harmonische Formen bezüglich dieser Darstellung sind gewöhnliche homogene harmonische Polynome von Grade k

a) $k=0$, alle konstanten Polynome sind harmonisch.

b) $k=1$, alle linearen Polynome sind harmonisch.

c) Endliche Summen von Formen der Art

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu x_\nu\right)^k \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu^2=0. \tag{16}$$

Bekanntlich ist diese Liste vollständig [4].

2) $\varrho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\cdot}$

$\quad A \quad \to (\det A)^k; \quad k=0,1,2,\ldots.$

a) Im Falle $k=1$, $m=n$ erhält man eine harmonische Form in

$P(X)=\det X$.

b) Endliche Summen von Formen der Art

$$\det(A'X)^k, A'A=0 \quad (A=A^{(m,n)}).^2 \tag{17}$$

3) *Annahme.* Die Darstellung ϱ sei selbst ein harmonisches Polynom:

$\Delta\varrho(X)=0 \quad$ (z.B. 2a)).

Dann erhält man für jeden Vektor $a \in \mathscr{X}$ eine harmonische Form

$P(X)=\varrho(X')a$.

Hierbei ist $m=n$.

4) Sei

$\mathscr{X}_n=\{Z=Z^{(n)}=Z'\}$

der Vektorraum aller n-reihigen symmetrischen komplexen Matrizen. Die Darstellung

$$\begin{aligned} &\varrho_0: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{X}), \\ &\varrho_0(A)(Z)=(\det A)^2 A'^{-1} Z A^{-1} \end{aligned} \tag{18}$$

ist polynomial. Wir setzen

$A^*=(\det A)A'^{-1}$.

Jeder m-reihigen Matrix ordnen wir das Polynom

$$P(X)=(X'HX)^*+(X'H'X)^*, \quad H=H^{(m)}, \tag{19}$$

zu. Für gewisse H, beispielsweise für

$$H=\begin{pmatrix} 0 & E^{(r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad m=2r,$$

2 Im Falle $m \geqq 2 \cdot n$ sind dies die einzigen harmonischen Formen, wie Maaß in einer neuen Arbeit, welche ebenfalls in dieser Zeitschrift erscheinen wird, bewiesen hat [8]

ist dieses Polynom harmonisch und somit in $\mathscr{H}(m, \varrho)$ enthalten. Das Polynom P verschwindet mit dem angegebenen H nicht identisch, falls

$$r \geqq n-1.$$

5) Von ausgezeichneter Bedeutung für die Theorie der harmonischen Formen ist folgende Darstellung:

Sei $H(m, n, k)$ der Vektorraum aller Polynome $P(X^{(m,n)})$ mit der Eigenschaft

a) $P(tX) = t^k P(X)$ für $t \in \mathbb{C}$,

b) $\partial/\partial X' \partial/\partial X\, P(X) = 0$.

Auf diesem endlichdimensionalen Vektorraum operiert die Gruppe $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$

$$P(X) \to P(XA) \quad \text{für} \quad A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}).$$

Wir bezeichnen diese Darstellung mit

$$\varrho_{m,n,k} : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(H(m, n, k)).$$

Die ausgezeichnete Bedeutung dieser Darstellung ergibt sich aus der (trivialen)

1.7. Bemerkung. Sei

$$\varrho : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z})$$

eine irreduzible rationale Darstellung. Es sei

$$\mathscr{H}(m, \varrho) \neq (0).$$

Dann ist ϱ isomorph zu einer irreduziblen Komponente einer Darstellung

$$\varrho_{m,n,k} : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(H(m, n, k)).$$

Für ein systematisches Studium harmonischer Formen ist also eine genaue Kenntnis der Zerlegung der Darstellung $\varrho_{m,n,k}$ in irreduzible Komponenten erforderlich. Diese Zerlegung ist sehr kompliziert [5].

2. Vektorwertige Modulformen

Wie in Abschn. 1 sei $\mathscr{Z}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper der komplexen Zahlen. Wir betrachten vektorwertige Fourierreihen, welche in der Siegelschen Halbebene S_n konvergieren.

$$f(Z) = \sum_{H = H' \geqq 0,\, H \text{ gerade}} a(H) e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}, \qquad a(H) \in \mathscr{Z}. \tag{20}$$

Diese Fourierreihe heißt Modulform bezüglich der rationalen Darstellung

$$\varrho : \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}),$$

falls sie das Transformationsverhalten

$$f(M\langle Z\rangle) = \varrho(CZ+D) f(Z) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} A B \\ C D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \tag{21}$$

besitzt. Wir werden vektorwertige Modulformen dieser Art mit Hilfe von Thetareihen konstruieren. Für die Konstruktion benötigt man die Gaußtransformation.

2.1. Definition. Die Gaußtransformierte eines Polynoms $P(X)$, $X = X^{(m,n)}$, ist durch

$$\tilde{P}(X) = \int_{\mathscr{X}_{m,n}} P(U+X) e^{-\pi \operatorname{Sp}(U'U)} dU$$

definiert. Hierbei ist $\mathscr{X}_{m,n}$ der Vektorraum aller reellen $m \times n$-Matrizen und dU das Euklidische Volumenelement in diesem Raum,

$$dU = du_{11} du_{12}, \ldots, du_{mn}.$$

Offensichtlich ist $\tilde{P}(X)$ ebenfalls ein Polynom.

2.2. Hilfssatz [7]. *Sei $P(X^{(m,n)})$ ein Polynom. Es gilt*

$$\tilde{P}(X) = e^{\frac{\Delta}{4\pi}} P(X) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Delta^\nu P(X)}{(4\ \ )^\nu \nu!}.$$

Beweis. Der Operator $e^{\frac{\Delta}{4\pi}}$ ist das Produkt der mn Operatoren

$$e^{\overline{4\pi(\partial x_{\nu\mu})^2}^{\,\partial^2}}; \quad 1 \leqq \nu \leqq m, \quad 1 \leqq \mu \leqq n.$$

Entsprechend erhält man die Gaußtransformierte, indem man den Operator

$$f(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) e^{-\pi\ ^2} du,$$

also die Gaußtransformierte im Falle $m = n = 1$, auf jede Variable $x_{\nu\mu}$ getrennt anwendet.

Man kann sich beim Beweis daher auf den Fall $m = n = 1$ beschränken und die Formel nun durch direkte, wenn auch etwas mühselige Rechnung für die Polynome $P(x) = x^k$ beweisen.

2.3. Hilfssatz. *Sei $P(X^{(m,n)})$ ein Polynom. Wir setzen*

$$P_a(X) = P(aX) \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{C}.$$

Folgende beiden Aussagen sind gleichbedeutend:

1) $\Delta P = 0$,
2) $\tilde{P}_a = P_a$ *für alle* $a \in \mathbb{C}$.

Ist $P(X)$, $X = X^{(m,n)}$ ein Polynom und $S = S^{(m)}$ eine positive Matrix, so konvergiert die Thetareihe

$$\vartheta_{S,P}(Z) = \sum_{G = G^{(m,n)} \text{ganz}} P(S^{1/2} G) e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)} \tag{22}$$

in S_n absolut und stellt dort eine analytische Funktion dar. Wie transformiert sich diese Funktion unter $Z \to -Z^{-1}$?

Die Reihe

$$f(W)=\sum_{G=G^{(m,n)}\,\text{ganz}} P(S^{1/2}(G+W))e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[G+W]Z)} \tag{23}$$

konvergiert im Raum aller komplexen $m\times n$-Matrizen absolut und lokal gleichmäßig und definiert eine periodische holomorphe Funktion. Wir entwickeln diese Funktion in eine Fourierreihe:

$$f(W)=\sum_{G\,\text{ganz}} a(G;S,Z)e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(G'W)}. \tag{24}$$

Es gilt

$$a(G;S,Z)=\int_{\mathfrak{X}_{m,n}} P(S^{1/2}W)e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[W]Z-2W'G)}dU, \qquad W=U+iV. \tag{25}$$

Zur Berechnung des Integrals benötigt man die Formel

$$\mathrm{Sp}(S[W]Z-2W'G)=\mathrm{Sp}(S[W-S^{-1}GZ^{-1}]Z-S^{-1}[G]Z^{-1}).$$

Wir verfügen über den Imaginärteil V von W, so daß die Matrix $W-S^{-1}GZ^{-1}$ reell wird, also

$$V=S^{-1}G\,\mathrm{Im}(Z^{-1})$$

und erhalten

$$a(G;S,Z)=e^{-\pi i\mathrm{Sp}(S^{-1}[G]Z^{-1})} \cdot\int_{\mathfrak{X}_{m,n}} (P(S^{1/2}U+S^{-1/2}GZ^{-1}))e^{\pi i\mathrm{Sp}(S[U]Z)}dU. \tag{26}$$

Im Spezialfall

$$Z=iY,\ Y=A^{-1}A'^{-1},\ A\in\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$$

führen wir die Variablentransformation

$$U\to S^{-1/2}UA$$

durch:

$$a(G;S,iY)=(\det S)^{-n/2}(\det Y)^{-m/2}e^{-\pi\mathrm{Sp}(S^{-1}[G]Y^{-1})} \cdot\int_{\mathfrak{X}_{m,n}} P(UA-iS^{-1/2}GY^{-1})e^{-\pi\mathrm{Sp}(U'U)}dU. \tag{27}$$

Das Integral ist die Gaußtransformierte des Polynoms

$$P_A(U)=P(UA) \tag{28}$$

an der Stelle $-iS^{-1/2}GA'$.

$$a(G;S,iY)=(\det S)^{-n/2}(\det Y)^{-m/2}e^{-\pi\mathrm{Sp}(S^{-1}[G]Y^{-1})}\tilde{P}_A(-iS^{-1/2}GA'). \tag{29}$$

Eine Vereinfachung dieser Koeffizientenformel erhält man, wenn man voraussetzt, daß alle Polynome P_A, $A=A^{(n)}$, harmonisch sind. Dann gilt nämlich

$$\tilde{P}_A(-iS^{-1/2}GA')=P(-iS^{-1/2}GY^{-1})$$

und wir erhalten in diesem Falle

$$a(G;S,Z)=(\det S)^{-n/2}\left(\det\frac{Z}{i}\right)^{-m/2} e^{-\pi \operatorname{Sp}(S^{-1}[G]Y^{-1})} P(S^{-1/2}GZ^{-1}). \tag{30}$$

Betrachtet man die Fourierreihe von $f(W)$ im Punkt $W=0$, so erhält man

$$\vartheta_{S,P}(Z)=(\det S)^{-n/2}\det\left(\frac{Z}{i}\right)^{-m/2} \cdot \sum_{G \text{ ganz}} P(S^{-1/2}GZ^{-1})e^{-\pi i \operatorname{Sp}(S^{-1}[G]Z^{-1})}. \tag{31}$$

Ist $P\in\mathscr{H}(m,\varrho_0)$ eine harmonische Form, so erhält man aus (31) für die Thetareihe

$$\vartheta_{S,P}(Z)=\sum P(S^{1/2}G)e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)}$$

folgendes Transformationsverhalten:

$$\vartheta_{S^{-1},P}(-Z^{-1})=(\det S)^{n/2}\det\left(\frac{Z}{i}\right)^{m/2}\varrho_0(Z)\vartheta_{S,P}(Z).$$

Wir nehmen nun an, daß die Matrix S unimodular ist, $S\in\mathrm{Gl}(m,\mathbb{Z})$. Da mit G auch SG alle ganzen Matrizen $G=G^{(m,n)}$ durchläuft, erhalten wir

$$\vartheta_{S^{-1},P}(Z)=\vartheta_{S,P}(Z) \quad (S \text{ unimodular}).$$

Ist S überdies gerade (also insbesondere m ein Vielfaches von 8), so gilt

$$\vartheta_{S,P}(Z+H)=\vartheta_{S,P}(Z),\; H=H' \text{ ganz}.$$

Da die Substitutionen $Z\to -Z^{-1}$, $Z\to Z+H$ die volle Modulgruppe erzeugen, erhalten wir

2.4. Satz. *Sei $S=S^{(m)}$ eine positive, gerade, unimodulare Matrix und sei $P\in\mathscr{H}(m,\varrho_0)$ eine harmonische Form bezüglich der rationalen Darstellung $\varrho_0:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{Gl}(\mathscr{Z})$. Die Thetareihe*

$$\vartheta_{S,P}(Z)=\sum_{G=G^{(m,n)}\text{ganz}} P(S^{1/2}G)e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)}$$

ist eine Modulform bezüglich der Darstellung

$$\varrho(A)=\varrho_0(A)(\det A)^{m/2}.$$

Wir wollen auch eine Umkehrung von Satz 2.4 beweisen und benötigen hierzu den in [3] bewiesenen

2.5. Hilfssatz. *Jeder semipositiven geraden Matrix $T=T^{(n)}$ sei ein Polynom $Q(T,A)$ in einer n-reihigen Matrixvariablen $A=A^{(n)}$ zugeordnet. Die Reihe*

$$\sum_T Q(T,A)e^{-\pi \operatorname{Sp}(TA'A)}$$

möge für alle $A\in\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ konvergieren. Wenn diese Reihe identisch verschwindet, so gilt

$$Q(T,A)=0 \quad \textit{für alle } T.$$

Die Einheitengruppe einer quadratischen Form S werde mit

$$\mathscr{E}(S)=\{U\in \mathrm{Gl}(m,\mathbb{Z}), S[U]=S\} \tag{32}$$

bezeichnet. Wir folgern nun aus Hilfssatz 2.5

2.6. Hilfssatz. *Seien $n>m_\nu$, $\nu=1,\dots,h$, natürliche Zahlen $S_\nu=S_\nu^{(m_\nu)}$, $\nu=1,\dots,h$, durchlaufe ein h-Tupel paarweise inäquivalenter positiver rationaler Matrizen. Jedem $\nu\in\{1,\dots,h\}$ sei ein Polynom $P_\nu(G,A)$ in den Matrixvariablen $G=G^{(m_\nu,n)}$, $A=A^{(n)}$ zugeordnet. Es gelte*

$$P_\nu(UG,A)=P_\nu(G,A) \quad \text{für} \quad U\in\mathscr{E}(S_\nu). \tag{33}$$

Wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{h}\sum_{G}P_\nu(G,A)e^{-\pi \mathrm{Sp}(S_\nu[G]A'A)}=0$$

identisch verschwindet, so gilt

$$P_1=\dots=P_h=0.$$

Beweis. Wir denken uns die Matrizen $S_1,\dots,S_h$ nach der Größe ihrer Variablenzahl ($m_1\leqq m_2\leqq\dots\leqq m_h$) und bei gleicher Variablenzahl nach der Größe ihrer Determinante geordnet:

$$\det S_\nu\geqq\det S_{\nu+1}, \text{ falls } m_\nu=m_{\nu+1}.$$

Wir wollen durch Induktion nach h schließen. Es genügt daher $P_h=0$ zu zeigen. Aus Hilfssatz 2.5 folgt zunächst

$$\sum_{\nu=1}^{h}\sum_{S_\nu[G_\nu]=T}P_\nu(G_\nu,A)=0 \text{ für alle } T. \tag{34}$$

Wir nutzen diese Formel im Falle

$$T=\begin{pmatrix}S_h & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}[V];\, V\in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})$$

aus. Die Lösungen der Gleichung $S_\nu[G_\nu]=T$ sind in diesem Falle von der Form

$$G_\nu=(U,0)\cdot V;\, S_\nu[U]=S_h.$$

Eine Lösung U existiert nur für $m_\nu=m_h$ und $\det S_\nu=\det S_h$.

Da die Matrizen S_ν paarweise inäquivalent sein sollen, folgt

$$\nu=h \quad \text{und} \quad U\in\mathscr{E}(S_\nu).$$

Es gilt

$$(U,0)\cdot V=U\cdot H;\, V=\begin{pmatrix}H\\ *\end{pmatrix},\, H=H^{(m_\nu,n)}.$$

Wir erhalten nun aus (33) and (34)

$$P_h(H,A)=0$$

für alle primitiven Matrizen $H=H^{(m_\nu,n)}$, also für alle ganzen Matrizen, welche sich zu einer unimodularen n-reihigen Matrix ergänzen lassen. Man zeigt leicht, daß die Menge aller primitiven Matrizen im Raum aller $m\times n$-Matrizen $(n>m)$ Zariski-dicht liegt, daß also $P_h=0$ gilt.

2.7. Satz. *Sei $S=S^{(m)}$ eine positive rationale Matrix und sei*

$$P: M_{m,n}(\mathbb{C})\to\mathscr{Z}$$

ein Polynom, welches nicht identisch verschwindet.

Annahme. 1) $n>m$.

2) *Die Thetareihe $\vartheta_{S,P}(Z)$ ist eine Modulform bezüglich einer geeigneten polynomialen Darstellung*

$$\varrho:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{Gl}(\mathscr{Z}).$$

3) $P(S^{1/2}UX)=P(S^{1/2}X)$ *für* $U\in\mathscr{E}(S)$.

Dann gilt. a) *S ist gerade und unimodular.*

b) *Die Funktion $X\to P(XA)$ ist für jedes $A=A^{(n)}$ harmonisch, genauer*

$$P\in\mathscr{H}(m,\varrho_0),\ \varrho_0(A)=\varrho(A)(\det A)^{-m/2}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß S gerade ist:

Vorbemerkung. Wenn S keine gerade Matrix ist, so existiert eine unimodulare Matrix U, so daß

$$\mathrm{Sp}(S[U])\notin 2\mathbb{Z}.$$

Zunächst findet man einen Vektor $g\in\mathbb{Z}^m$ mit teilerfremden Komponenten, so daß

$$S[g]\notin 2\mathbb{Z}.$$

Da g die erste Spalte einer unimodularen Matrix ist, können wir von vornherein annehmen, daß das erste Diagonalelement s_1 von S keine gerade Zahl ist. Es ist nun leicht zu sehen, daß der Ansatz

$$U=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & E\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}x & x-1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x & 2x-1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

zum Ziel führt.

Um zu zeigen, daß S gerade ist, benutzen wir die Periodizität der Thetareihe

$$\vartheta_{S,P}(Z+H)=\vartheta_{S,P}(Z),\ H=H'\ \text{ganz}.$$

Mittels Hilfssatz 2.6 folgert man aus dieser Beziehung

$$P(S^{1/2}G)=P(S^{1/2}G)e^{\pi i\mathrm{Sp}(S[G]H)}.$$

Wir schließen indirekt, nehmen also an, daß S nicht gerade ist. Nach unserer Vorbemerkung können wir dann sogar

$$\mathrm{Sp}(S)\notin 2\mathbb{Z}$$

annehmen. Wir setzen nun speziell

$$G=(E,0)\,V,\ H=V^{-1}\in\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})$$

und erhalten

$$\operatorname{Sp}(S[G]H)=\operatorname{Sp}(S)\notin 2\mathbb{Z}.$$

Es folgt

$$P(S^{1/2}G)=0$$

für alle primitiven Matrizen $G=G^{(m,n)}$, d.h. für alle ganzen Matrizen, welche sich zu einer unimodularen Matrix

$$V=\begin{pmatrix} G \\ * \end{pmatrix}$$

ergänzen lassen. Es folgt $P\equiv 0$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

Nach Voraussetzung 2) von Satz 2.7 gilt

$$\vartheta_{S,P}(iY^{-1})=\varrho(-iY)\vartheta_{S,P}(iY). \tag{35}$$

Wir ersetzen in (23) W durch 0 und Z durch iY^{-1} und erhalten aus (24) und (29)

$$\vartheta_{S,P}(iY^{-1})=(\det S)^{-n/2}(\det Y)^{m/2} \cdot \sum_G \tilde{P}_A(-iS^{-1/2}GA')e^{-\pi \operatorname{Sp}(S^{-1}[G]Y)},\ Y=A'A. \tag{36}$$

Aus Hilfssatz 2.6 folgt nun, daß die Matrizen S und S^{-1} unimodular äquivalent sein müssen. Dies bedeutet, da S ganz ist, daß S selbst unimodular ist (also insbesondere $m\equiv 0 \bmod 8$).

Wir ersetzen in (36) die Summationsvariable G durch SG und erhalten

$$\sum Q(G,A)e^{-\pi \operatorname{Sp}(S[G]A'A)}=0 \tag{37}$$

mit

$$Q(G,A)=\varrho(-iY)P(S^{1/2}G)-(\det Y)^{m/2}\tilde{P}_A(-iS^{1/2}GA'). \tag{38}$$

Man zeigt leicht

$$Q(UG,A)=Q(G,A) \quad \text{für} \quad U\in\mathscr{E}(S)$$

und folgert aus Hilfssatz 2.6

$$\tilde{P}_A(-iS^{1/2}GA')=\varrho_0(-iY)P(S^{1/2}G) \tag{39}$$

mit

$$\varrho_0(A)=(\det A)^{-m/2}\varrho(A) \quad (8|m).$$

Die Beziehung (39) gilt für alle ganzen, also auch für alle komplexen Matrizen G. Wir spezialisieren sie auf den Fall

$$A=aE,\ a\neq 0$$

und erhalten

$$\tilde{P}_a\left(\frac{1}{a}X\right)=\varrho_0(-ia^2E)P\left(\frac{i}{a^2}X\right). \tag{40}$$

Auf der linken Seite steht nach Definition der Gaußtransformation

$$\tilde{P}_a\left(\frac{1}{a}X\right)=\int P(X+aU)e^{-\pi \mathrm{Sp}(U'U)}dU\,.$$

Vollzieht man den Grenzübergang $a \to 0$, so erhält man

$$P(X)=\lim_{t\to 0}\varrho_0(tE)P\left(\frac{1}{t}X\right). \tag{41}$$

Allein aus dieser Beziehung folgern wir:

Behauptung. $P(X)=\varrho_0(tE)P\left(\frac{1}{t}X\right), t \neq 0.$ (42)

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}^{\cdot}\to \mathrm{Gl}(\mathscr{X})\\&t\to \varrho_0(tE)\end{aligned}$$

ist ein rationaler Homomorphismus und somit diagonalisierbar. Zum Beweis dieser Behauptung können wir also annehmen, daß $\mathscr{X}$ eindimensional und

$$\varrho_0(t)=t^k \quad \text{für ein} \quad k\in\mathbb{Z}$$

ist. Aus (41) folgt, daß P homogen vom Grade k ist. Spezialisiert man (40) auf $a=1$, so folgt mittels (42)

$$\tilde{P}(X)=\varrho_0(-iE)P(iX)=P(X)\,.$$

Nochmalige Anwendung von (42) ergibt

$$\tilde{P}_a=P_a \quad \text{für alle} \quad a\in\mathbb{C}\,.$$

Das Polynom P ist also harmonisch.

Zum Beweis von Satz 2.7 müssen wir nur noch

$$P(XA)=\varrho_0(A')P(X)$$

nachweisen. Im Falle $A=aE$ haben wir diese Beziehung bereits bewiesen. Wir müssen sie daher nur unter der Nebendedingung $\det A=1$ beweisen. Die Gruppe $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{Z})$ liegt in der Gruppe $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{C})$. Zariski-dicht. Wir können daher sogar annehmen, daß $A=U$ unimodular ist. In diesem Falle benutze man

$$f(Z[U])=\varrho(U^{-1})f(Z), f=\vartheta_{S,P}\,,$$

in Verbindung mit 2.6.

Beispiele für Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten

1) Die Thetareihen zu den harmonischen Polynomen

$$P(X)=\det(A'X)^k\,; A'A=0$$

werden ausführlich in [1] untersucht.

2) Die Thetareihen

$$\sum(\det G)e^{\pi i \mathrm{Sp}(S[G]Z)}(m=n)$$

wurden in [6] eingeführt und zur Konstruktion von Spitzenformen kleinen Gewichts verwendet.

3) Spezielle vektorwertige Thetareihen wurden erstmals von Oda [9] betrachtet und zur Konstruktion alternierender holomorpher Differentialformen auf gewissen Modulmannigfaltigkeiten verwendet.

4) Das vierte Beispiel für harmonische Formen aus Abschn. 1 ergibt eine matrixwertige Modulform

$$f(Z)=(f_{\nu\mu}(Z))_{1\leqq\nu,\mu\leqq n}$$

mit dem Transformationsverhalten

$$f(M\langle Z\rangle)=\det(CZ+D)^{m/2+2}(CZ+D)^{-1}f(Z)(CZ+D)'^{-1}.$$

Im Falle $m=n-1$ haben diese matrixwertigen Modulformen eine ausgezeichnete Bedeutung:

Wir bezeichnen mit

$$\omega_{ik}=\pm\bigwedge_{\substack{1\leqq\nu\leqq\mu\leqq n\\(\nu,\mu)\neq(i,k)}}dz_{\nu\mu}$$

das alternierende Produkt aller Differentiale

$$dz_{\nu\mu},1\leqq\nu\leqq\mu\leqq n, dz_{\nu\mu}\neq dz_{ik},$$

wobei wir das Vorzeichen so einrichten, daß $\omega_{ik}\wedge dz_{ik}$ nicht von i und k abhängt. Die Differentialform

$$\sum_{1\leqq i,k\leqq n}f_{ik}\omega_{ik}$$

ist bekanntlich genau dann Γ_n invariant, falls

$$f(M\langle Z\rangle)=\det(CZ+D)^{n+1}(CZ+D)^{-1}f(Z)(CZ+D)'^{-1}.$$

3. Darstellung singulärer Modulformen als Linearkombination von Thetareihen

3.1. Definition. Eine Modulform

$$f(Z)=\sum_{H=H^{(n)}\geqq0}a(H)e^{\pi i\operatorname{Sp}(HZ)}$$

heißt singulär, falls die Bedingung

$$a(H)\neq0\Rightarrow\det H=0$$

erfüllt ist.

Beispiele singulärer Modulformen sind Thetareihen $\vartheta_{S,P}$ im Falle $n>m$.

3.2. Satz. *Sei f eine singuläre Modulform bezüglich der rationalen Darstellung*

$$\varrho:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{Gl}(\mathscr{X}).$$

Wir bezeichnen mit

$$S_1^{(2r_1)},\dots,S_h^{(2r_h)}$$

ein Vertretersystem der unimodularen Klassen von positiven geraden Matrizen $S=S^{(2r)}$, $2r<n$, der Determinante 1. Zu jedem $\nu\in\{1,\dots,h\}$ existiert eine eindeutig bestimmte harmonische Form

$$P_\nu\in\mathscr{H}(2r_\nu,\varrho_\nu),\ \nu=1,\dots,h,\ \varrho_\nu(A)=\varrho(A)(\det A)^{-r_\nu}$$

mit der Eigenschaft

$$P_\nu(S_\nu^{1/2}UX)=P_\nu(S_\nu^{1/2}X)\quad \text{für}\quad U\in\mathscr{E}(S_\nu),$$

so daß

$$f=\sum_{\nu=1}^{h}\vartheta_{S_\nu,P_\nu}$$

gilt.

Zusatz zu Satz 3.2.

Zusätzliche Voraussetzungen. 1) *f sei irreduzibel,*
2) $f\neq 0$.

Behauptung. *Dann existiert eine natürliche Zahl r, so daß die Darstellung*

$$\varrho_0(A):=(\det A)^{-r}\varrho(A),\ r>0,$$

polynomial ist[3]. *Wählt man r maximal mit dieser Eigenschaft, so gilt*

$$P_\nu\neq 0\Rightarrow r_\nu=r.$$

Der Spezialfall $\varrho(A)=(\det A)^r$ wurde bereits in [2] behandelt. In diesem Falle sind die harmonischen Formen P_ν notwendig konstant und nur dann von 0 verschieden, wenn $r_\nu=r$ gilt. Satz 3.2 liefert in diesem Falle also eine Darstellung von f als Linearkombination von Thetareihen

$$\vartheta_S(Z)=\sum e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[G]Z)},\ S=S^{(2r)}.$$

Beweis von Satz 3.2.

I. *Eindeutigkeit.* Diese folgt aus Hilfssatz 2.6.

II. *Existenz.* Sei

$$f(Z)=\sum a(H)e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(HZ)}$$

eine singuläre Modulform, welche nicht identisch verschwindet. Wir wählen einen von 0 verschiedenen Fourierkoeffizienten $a(H)$, so daß der Rang

$$m=\mathrm{Rang}(H)$$

maximal ist. Es gilt

$$a(H[U])=\varrho(U')a(H), \tag{43}$$

also

$$a\begin{pmatrix} S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\neq 0.$$

3 Diese Aussage gilt auch, wenn f nicht singulär ist, wie in [3] gezeigt wurde

Wir wählen $S=S^{(m)}$ unter allen diesen Matrizen so aus, daß die Determinante $\det S$ *minimal* ist.

Schlüssel zum Beweis von Satz 3.2 ist

3.2₁. Behauptung. a) $\det S=1$ (*insbesondere* $8|m$).

b) *Es existiert ein harmonisches Polynom*

$$P\in\mathscr{H}(m,\varrho_0),\ \varrho_0(A)=\varrho(A)(\det A)^{-m/2}$$

mit der Eigenschaft

$$P(S^{1/2}(E,0))=E(S)^{-1}a\begin{pmatrix}S&0\\0&0\end{pmatrix},\ (E(S)=\textit{Ordnung von }\mathscr{E}(S)).$$

Mit dieser Behauptung ist Satz 3.2 vollständig bewiesen, denn

$$f(Z)-\vartheta_{S,P}(Z)$$

ist nun eine Modulform bezüglich ϱ, auf welche man wieder dasselbe Verfahren anwenden kann. Nach endlich vielen Schritten bricht dieses Verfahren ab und liefert eine Darstellung von f als Linearkombination von Thetareihen der gewünschten Art. (Die Symmetriebedingung

$$P(S^{1/2}UX)=P(S^{1/2}X),\ U\in\mathscr{E}(S)$$

ist eine Folge von

$$\varrho\begin{pmatrix}U'&0\\0&U^{-1}\end{pmatrix}a\begin{pmatrix}S&0\\0&0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}S&0\\0&0\end{pmatrix},\ U\in\mathscr{E}(S).$$

Beweis der Behauptung. Wir zerlegen

$$Z=\begin{pmatrix}Z_0&Z_1\\Z_1'&Z_2\end{pmatrix},\qquad Z_0=Z_0^{(m)},\qquad Z_2=Z_2^{(n-m)}$$

und entwickeln $f(Z)$ in eine Fourierreihe als Funktion von Z_0:

$$f(Z)=\sum_{H_0=H_0^{(m)}\geqq 0}A_{H_0}(Z_1,Z_2)e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(H_0Z_0)}.$$

Die Koeffizienten sind holomorphe Funktionen auf dem Raum $M_{m,n-m}(\mathbb{C})\times S_{n-m}$.

Durch Umordnen der Fourierreihe von f erhält man

$$A_{H_0}(Z_1,Z_2)=\sum a\begin{pmatrix}H_0&H_1\\H_1'&H_2\end{pmatrix}e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(H_2Z_2+2H_1'Z_1)}.$$

Zu summieren ist über alle H_1,H_2, so daß die Matrix

$$H=\begin{pmatrix}H_0&H_1\\H_1'&H_2\end{pmatrix}$$

gerade und semipositiv ist. Wir wenden auf Z die Modulsubstitution

$$M=\left(\begin{array}{cc|cc}E^{(m)}&0&0&0\\0&0&0&E^{(n-m)}\\\hline 0&0&E^{(m)}&0\\0&-E^{(n-m)}&0&0\end{array}\right)$$

an:

$$M\langle Z\rangle=\begin{pmatrix}Z_0 & Z_1\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ -Z_1' & -Z_2\end{pmatrix}^{-1}=\left(\begin{array}{c|c}Z_0-Z_2^{-1}[Z_1'] & -Z_1Z_2^{-1}\\ -Z_2^{-1}Z_1' & -Z_2^{-1}\end{array}\right).$$

Aus

$$f(M\langle Z\rangle)=\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ -Z_1' & -Z_2\end{pmatrix}f(Z)$$

folgt die Funktionalgleichung

$$A_{H_0}(-Z_1Z_2^{-1},-Z_2^{-1})=\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ -Z_1' & -Z_2\end{pmatrix}e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(H_0Z_2^{-1}[Z_1'])}A_{H_0}(Z_1,Z_2). \tag{44}$$

Wir bestimmen die Funktion $A_{H_0}(Z_1,Z_2)$ im Spezialfall $H_0=S$. Wenn der Koeffizient $a(H)$ von 0 verschieden ist, so gilt nach Wahl von m

$$H=U'\begin{pmatrix}H^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U,\qquad U\in\mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z}),\qquad H^*=H^{*(m)}\geqq 0.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$S=G'H^*G,\qquad U=\begin{pmatrix}G & *\\ * & *\end{pmatrix},\qquad G=G^{(m)}.$$

Hieraus folgt

$$\det H^*\neq 0,\quad \text{also}\quad \det H^*\geqq \det S$$

nach Wahl von S. Die Matrizen S und H^* sind demnach unimodular äquivalent und wir erhalten

$$H=\begin{pmatrix}S & H_1\\ H_1' & H_2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die hier auftretenden Matrizen sind alle von der Form

$$H=\begin{pmatrix}S & SG\\ G'S & S[G]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}E & G\\ 0 & E\end{bmatrix}.$$

Damit sind die Fourierkoeffizienten $a(H)$ bestimmt:

$$a(H)=\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ G' & E\end{pmatrix}a\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{46}$$

also

$$A_S(Z_1,Z_2)=\sum_{G=G^{(m,n-m)}\text{ ganz}}\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ G' & E\end{pmatrix}a\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[G]Z_2+2G'SZ_1)}. \tag{47}$$

Definition.

$$B_S(Z_1,Z_2)=e^{-\pi i\,\mathrm{Sp}(SZ_2^{-1}[Z_1'])}\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ Z_1' & E\end{pmatrix}A_S(-Z_1Z_2^{-1},-Z_2^{-1}). \tag{48}$$

Wir erhalten

$$B_S(Z_1,Z_2)=\sum Q(S^{1/2}(G+Z_1))e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[G+Z_1](-Z_2^{-1}))} \tag{49}$$

mit

$$Q(S^{1/2}X)=\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ X' & E\end{pmatrix}a\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{50}$$

Die durch (49) definierte Funktion ist periodisch in Z_1 und kann daher in eine Fourierreihe entwickelt werden:

$$B_S(Z_1,Z_2)=\sum_G \alpha(G;S,Z_2)e^{2\pi i\,\mathrm{Sp}(G'Z_1)}. \tag{51}$$

Wir werden die Koeffizienten $\alpha(G;S,Z_2)$ auf zwei verschiedene Arten berechnen und dann unsere Behauptung durch Vergleich der beiden Formeln beweisen.

A) Berechnung von $\alpha(G;S,Z_2)$ mit Hilfe der Thetatransformationsformel: Wir benutzen die in Abschn. 2 bewiesenen Formeln (23), (24) u. (29) und erhalten im Spezialfall

$$Z_2=iY_2,\qquad Y_2=A'A,\qquad A\in \mathrm{Gl}(n-m,\mathbb{R})$$

die Darstellung

$$\begin{aligned}\alpha(G;S,iY_2)&=(\det S)^{-\frac{n-m}{2}}(\det Y_2)^{\frac{m}{2}}\\ &\quad\cdot e^{-\pi\,\mathrm{Sp}(S^{-1}[G]Y_2)}\tilde{Q}_A(-iS^{-1/2}GA').\end{aligned} \tag{52}$$

B) Berechnung von $\alpha(G;S,Z)$ mittels des Transformationsverhaltens von f. Aus der Funktionalgleichung (44) folgt

$$B_S(Z_1,Z_2)=\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & -Z_2\end{pmatrix}A_S(Z_1,Z_2), \tag{53}$$

also

$$\alpha(G;S,Z_2)=\begin{cases}e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S^{-1}[G]Z_2)}\varrho\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & -Z_2\end{pmatrix}Q(S^{-1/2}G), & \text{falls } G \text{ und } S^{-1}G \text{ ganz sind,}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases} \tag{54}$$

Wir beweisen nun Teil a) unserer Behauptung 3.2_1. Wenn S nicht unimodular ist, so existiert eine ganze Matrix G_0, so daß $S^{-1}G_0$ nicht ganz ist und wir erhalten aus der Darstellung B)

$$\alpha(G;S,Z_2)=0\quad\text{für}\quad G\equiv G_0 \bmod \det S.$$

Aus der Darstellung A) folgt nun

$$\tilde{Q}(-iS^{-1/2}G)=0\quad\text{für}\quad G\equiv G_0 \bmod \det S.$$

Das Polynom $\tilde{Q}$ muß daher identisch verschwinden. Da die Gaußtransformation ein invertierbarer Operator ist (wegen 2.2), erhalten wir $Q=0$, also $a\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

Die Matrix S ist also unimodular und wir erhalten durch Vergleich der beiden Darstellungen für $\alpha(G; S, iY_2)$:

$$\tilde{Q}_A(-iXA') = (\det Y_2)^{-m/2} \varrho \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -iY_2 \end{pmatrix} Q(X). \tag{55}$$

Wie beim Beweis von Satz 2.7 [vgl. (55) mit (39)] folgert man aus dieser Relation:

Das Polynom

$$X \to Q(XA)$$

ist harmonisch für jedes $A = A^{(n-m)}$.

Es ist sogar eine harmonische Form bezüglich der Darstellung

$$(\det A)^{-m/2} \varrho \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Aus der Definition von Q folgt außerdem

$$\varrho_0 \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad A \in \mathrm{Gl}(n-m, \mathbb{C}). \tag{56}$$

Wir beweisen nun Teil b) der Behauptung 3.2_1.

Konstruktion von P. Eine gewisse Schwierigkeit bei der Konstruktion von P besteht darin, daß wir nicht wissen, ob die Darstellung

$$\varrho_0(A) = (\det A)^{-m/2} \varrho(A)$$

polynomial ist, daß wir also nicht Hilfssatz 1.6 anwenden können.

Wir zerlegen die Variable X

$$X = X^{(m,n)} = (X_1^{(m)}, X_2^{(m,n-m)}).$$

Es gilt

$$X = (E, 0) \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Ansatz. Wenn X_1 nicht ausgeartet ist, so definieren wir

$$P(S^{1/2}X) = \varrho_0 \begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ X_2' & E \end{pmatrix} \cdot E(S)^{-1} \cdot a \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Dies ist eine rationale Funktion auf $M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Als nächstes zeigen wir

$$P(XA) = \varrho_0(A') P(X) \quad \text{für} \quad A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}), \tag{59}$$

sofern X und XA im Definitionsbereich dieser rationalen Funktion enthalten sind. Die Formel (59) ist offenbar äquivalent mit

$$\varrho_0 \begin{pmatrix} E & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Diese Formal haben wir für $A_2=0$ bereits bewiesen (56). Wir brauchen sie daher nur noch im Spezialfall $A_4=E$ zu beweisen. Da es sich um eine Polynomidentität handelt, dürfen wir sogar annehmen:

$$A_4=E, \quad A_2=G \text{ ganz}.$$

Die Behauptung folgt dann aus (43).

Wir zeigen nun, daß P ein Polynom ist:

Der Definitionsbereich der rationalen Funktion P enthält wegen (59) alle Matrizen $X=X^{(m,n)}$, deren Rang maximal $(=m)$ ist. Das Komplement dieser Menge besteht aus allen Matrizen X, deren m-reihige Unterdeterminanten alle verschwinden. Dies ist der Durchschnitt von mehr als einer irreduziblen Hyperfläche und damit eine algebraische Menge, deren Kodimension mindestens zwei ist. Die Polstellenmenge einer rationalen Funktion ist aber in jedem ihrer Punkte 1-kodimensional. Daher muß P ein Polynom sein.

Es bleibt zu beweisen, daß P harmonisch ist.

Nach Konstruktion von P ist

$$P(S^{1/2}(E,X_2))=E(S)^{-1}Q(S^{1/2}X_2), \tag{61}$$

also

$$P(X_1,X_2)=E(S)^{-1}\varrho_0\begin{pmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & E\end{pmatrix}Q(X_2). \tag{62}$$

Wir wissen, daß Q eine harmonische Form ist. Daher ist Q als Funktion einer beliebigen Spalte von X_2 harmonisch. Wir erhalten aus (62), daß auch $P(X_1,X_2)$ als Funktion einer beliebigen Spalte von X_2 harmonisch ist. Da man durch Multiplikation

$$X\to XA, \; A \text{ geeignet},$$

die Spalten von X vertauschen kann, ist $P(X)$ als Funktion jeder Spalte von X harmonisch. Der Laplaceoperator

$$\Delta=\mathrm{Sp}(\partial/\partial X'\,\partial/\partial X)$$

ist Summe der in bezug auf die einzelnen Spalten von X gebildeten Laplaceoperatoren, wir erhalten also

$$\Delta P=0.$$

Damit ist Satz 3.2 bewiesen.

Bezeichnung. Sei

$$\varrho:\mathrm{Gl}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{Gl}(\mathscr{Z})$$

eine rationale Darstellung.

1) $[\Gamma_n,\varrho]$: Vektorraum aller Modulformen bezüglich ϱ.

2) $B_{n,\varrho}(m)$: Vektorraum aller endlichen Summen von Thetareihen $\vartheta_{S,P}$ zu positiven geraden unimodularen Matrizen $S=S^{(m)}$ und harmonischen Formen

$$P\in\mathscr{H}(m,\varrho_0);\,\varrho_0(A)=(\det A)^{-m/2}\varrho(A).$$

3) $B_{n,\varrho} = \sum_m B_{n,\varrho}(m)$.

Es gilt

$$B_{n,\varrho}(m) \subset [\Gamma_n, \varrho].$$

Natürlich ist $B_{n,\varrho}(m)$ nur für endlich viele m von 0 verschieden; wenn ϱ irreduzibel ist, muß die Darstellung

$$\varrho_0(A) = (\det A)^{-m/2} \varrho(A)$$

polynomial sein.

Wenn ϱ irreduzibel ist, und wenn $B_{n,\varrho}(m)$ eine von 0 verschiedene singuläre Modulform enthält, so muß sogar m die größte natürliche Zahl sein, so daß $\varrho_0(A)$ polynomial ist.

Funktionentheoretische Charakterisierung von $B_{n,\varrho}(m)$.

Für die Zwecke dieser Charakterisierung definieren wir:

3.3. Definition. Der Rang einer nicht identisch verschwindenden Modulform n-ten Grades

$$f(Z) = \sum a(H) e^{\pi i \operatorname{Sp}(HZ)}$$

ist

$$m = m(f) = \max\{\operatorname{Rang} H, a(H) \neq 0\}.$$

Die Modulform f ist also genau dann singulär, wenn $m < n$ gilt.

3.4. Definition. Sei

$$\varrho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z})$$

eine rationale Darstellung. Eine Modulform $f \in [\Gamma_n, \varrho]$ heißt zu einer singulären Modulform vom Rang m hochhebbar, falls eine rationale Darstellung

$$\tilde{\varrho}: \mathrm{Gl}(\tilde{n}, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z}),$$

eine lineare Abbildung

$$L: \tilde{\mathscr{Z}} \to \mathscr{Z}$$

mit den Verträglichkeitseigenschaften aus 1.3 existieren, so daß

$$f = F | \Phi_L^{\tilde{n}-m}, f(Z) := L\left(\lim_{t \to 0} F\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & itE \end{pmatrix}\right), Z = Z^{(n)}, E = E^{(\tilde{n}-m)}, \tag{63}$$

mit einer geeigneten singulären Modulform $F \in [\Gamma_{\tilde{n}}, \tilde{\varrho}]$ vom Rang m gilt. Wir erhalten nun

3.5. Theorem. *Sei*

$$\varrho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Gl}(\mathscr{Z})$$

eine rationale Darstellung. Der Unterraum

$$B_{n,\varrho}(m) \subset [\Gamma_n, \varrho]$$

besteht aus den endlichen Summen von solchen Modulformen, welche sich zu einer singulären Modulform vom Rang m hochheben lassen.

Zum Beweis hat man neben 1.4 und 3.2 nur noch zu benutzen, daß der durch (63) definierte Φ-Operator Thetareihen in Thetareihen überführt:

$$\vartheta_{S,\tilde{P}}|\Phi_L^{\tilde{n}-n} = \vartheta_{S,P},\ P = \tilde{P}|\Phi_L^{\tilde{n}-n} \text{(s. 1.3)}.$$

Literatur

1. Andrianov, A.N., Maloletkin, G.N.: Behavior of theta series of degree *n* under modular substitutions. Math. USSR-Izv. **39**, 227–241 (1975); Russian p. nos. 243–258
2. Freitag, E.: Stabile Modulformen. Math. Ann. **230**, 197–211 (1977)
3. Freitag, E.: Ein Verschwindungssatz für automorphe Formen zur Siegelschen Modulgruppe. Math. Z. **196**, 11–18 (1979)
4. Hecke, E.: Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen (1940). Math. Werke Nr. 41, pp. 789–918. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht 1959
5. Kashiwara, M., Vergne, M.: On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic golynomials. Invent. Math. **44**, 1–47 (1978)
6. Maaß, H.: Konstruktion von Spitzenformen beliebigen Grades mit Hilfe von Thetareihen. Math. Ann. **226**, 275–284 (1977)
7. Maaß, H.: Zetafunktionen mit Größencharakteren und Kugelfunktionen. Math. Ann. **134**, 1–32 (1957)
8. Maaß, H.: Harmonische Formen in einer Matrixvariablen. Math. Ann. **252**, 133–140 (1980)
9. Oda, Takayuki: Theta series of quadratic forms and Siegel modular forms (preprint) (1979)

Eingegangen am 17. Juli 1980