Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper

EBERHARD FREITAG
Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

I. Einleitung

Die genaue Struktur des Körpers der Modulfunktionen oder allgemeiner, die genaue Struktur des graduierten Ringes der Modulformen ist in mehreren Veränderlichen nur in wenigen Spezialfällen bekannt. So bewies IGUSA [7], daß alle Siegelschen Modulformen zweiten Grades geraden Gewichts als isobare Polynome in den Eisensteinreihen vom Gewicht 4, 6, 10, 12 darstellbar sind. Hieraus ergibt sich, daß der Körper der Siegelschen Modulfunktionen zweiten Grades rational ist. In [4] wurde mit Hilfe von Thetareihen ein elementarer Beweis dieses Satzes gegeben. Mit der hierbei verwendeten Methode war es schon GUNDLACH [5] gelungen, das entsprechende Problem im Falle der Hilbertschen Modulgruppe zum Zahlkörper $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ zu lösen. Der Körper der symmetrischen Modulfunktionen zu dieser Gruppe erwies sich ebenfalls als rational.

Es gelang kürzlich HAMMOND zu zeigen, daß der Satz von GUNDLACH aus dem Satz von IGUSA hergeleitet werden kann, wenn man Satz 1 aus [4] zur Verfügung hat. Dieser besagt im wesentlichen, daß die einzige Spitzenform vom Gewicht 10 (zur Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades) als Produkt von Thetareihen darstellbar ist und außer gewissen Zwangsnullstellen keine weiteren Nullstellen besitzt. HAMMOND fand unabhängig von [4] einen Beweis dieses Satzes unter Zuhilfenahme der Theorie der Abelschen Funktionen. Auf diesem Wege erhielt HAMMOND die Struktursätze für die erweiterten Hilbertschen Modulgruppen zu $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$.

Es sei noch bemerkt, daß GUNDLACH [6] einen anderen Beweis des Struktursatzes zu $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ fand. Er verwendet dabei gewisse Rangformeln von SHIMIZU [11], die mittels der Selbergschen Spurformel gewonnen wurden. Mit derselben Methode löste GUNDLACH das Problem auch für $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$. Auch hier erwies sich der Körper der symmetrischen Modulfunktionen als rational.

In der vorliegenden Arbeit wird das analoge Problem im Falle der Hermiteschen Modulgruppe zweiten Grades $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ zum Gaußschen Zahlkörper $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}(i)$ und — in engem Zusammenhang hiermit — im Falle der Siegelschen Stufengruppe $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ untersucht. Beide Gruppen gestatten eine Erweiterung vom Index zwei; zu diesen werden Modulformen und -funktionen bestimmt. Die Körper der Modulfunktionen zu den erweiterten Gruppen erweisen sich auch hier als rational. Die verwendete Methode stellt eine Verallgemeinerung von [*4*] dar. Mittels gewisser Thetareihen wird eine symmetrische Modulform $\Theta(Z)$ vom Gewicht 10 zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ konstruiert, die außer Zwangsnullstellen keine weiteren Nullstellen besitzt. Der Beweis dieses Satzes kann im Gegensatz zu [*4*] nicht mehr allein durch Abschätzung der Thetareihen gegeben werden. Aus numerischen Gründen ist es nur möglich, die Nullstellen im Fundamentalbereich zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ außerhalb eines gewissen Kompaktums zu bestimmen. Mit Hilfe eines allgemeinen Satzes über Nullstellen von Modulformen, der mit einer Kompaktifizierungstheorie bewiesen wird, kann diese Schwierigkeit überwunden werden.

Die Form $\Theta(Z)$ spielt bei der Bestimmung der symmetrischen Modulformen zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ dieselbe Rolle, wie die Diskriminante $\Delta(z)$ im Falle der elliptischen Modulgruppe und die in [*4*] und [*5*] auftretenden Thetaprodukte. Sie gestattet die Reduktion des Problems auf die Bestimmung der Modulformen zu $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, genauer zu der erwähnten Erweiterung vom Index zwei. Auch hier wird mit Thetareihen eine Modulform konstruiert, deren Nullstellenmannigfaltigkeit vollständig bestimmt wird und welche die Reduktion des Problems auf den Fall der elliptischen Modulgruppe zuläßt.

Wir geben noch einen kurzen Überblick.

In II sind Bezeichnungen und Definitionen zusammengestellt.

In III werden die interessierenden zehn Thetareihen eingeführt und ihr Transformationsverhalten bei Modulsubstitutionen, soweit als nötig, entwickelt.

IV ist der Abschätzung der Thetareihen gewidmet, aufgrund derer die Nullstellen ihres Produkts $\Theta(Z)$ außerhalb eines gewissen Kompaktums im Fundamentalbereich der Modulgruppe bestimmt werden können.

In V wird die Siegelsche Stufengruppe $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ gemäß ihrer Bedeutung für die Hermitesche Modulgruppe $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ eingeführt und eine Modulform konstruiert, deren Nullstellenmannigfaltigkeit vollständig bestimmt wird.

In VI werden gewisse Modulformen konstruiert und die angekündigten Struktursätze bewiesen.

Im Anhang wird die benötigte Kompaktifizierungstheorie entwickelt. Man könnte sie aus einer allgemeinen Theorie von BAILY und BOREL [1] herauspräparieren. Da sie jedoch in dem benötigten Spezialfall besonders einfach wird, habe ich mich entschlossen, sie in einem Anhang möglichst elementar darzustellen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. HANS MAASS, danke ich für sein teilnehmendes Interesse an meiner Arbeit.

II. Bezeichnungen und Definitionen

Große lateinische Buchstaben bezeichnen, falls nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird, quadratische komplexe Matrizen. Der obere Index n bringt zum Ausdruck, daß $A^{(n)}$ eine n-reihige Matrix ist. E bzw. 0 wird für die n-reihige Einheits- bzw. Nullmatrix vorbehalten. A' ist die zu A transponierte Matrix. Eine beliebige (komplexe) Matrix $Z=Z^{(n)}$ zerlegen wir in ihren „Hermiteschen Real- und Imaginärteil"

$$Z=X+iY; \qquad X=\overline{X}'; \qquad Y=\overline{Y}'.$$

Wenn Z symmetrisch ist, so sind X und Y reelle symmetrische Matrizen.

Der Hermitesche Halbraum $\boldsymbol{H}_n$ besteht aus allen Matrizen $Z=Z^{(n)}$, deren Hermitescher Imaginärteil positiv definit ist.

$$\boldsymbol{H}_n=\{Z \,|\, Z=Z^{(n)}=X+iY;\ Y>0\}. \tag{1}$$

Der Siegelsche Halbraum $\boldsymbol{S}_n$ besteht aus den symmetrischen Matrizen des Hermiteschen Halbraums

$$\boldsymbol{S}_n=\{Z \,|\, Z=Z'\in\boldsymbol{H}_n\}. \tag{2}$$

Wir definieren nun die Hermitesche und die reelle symplektische Gruppe.

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n=\left\{M \,\middle|\, M=M^{(2n)};\ \overline{M}'IM=I;\ I=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}\right\} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_n=\{M\in\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n \,|\, M \text{ reell}\}. \tag{4}$$

$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n$ bzw. $\boldsymbol{\Omega}_n$ operiert auf $\boldsymbol{H}_n$ bzw. $\boldsymbol{S}_n$ als Gruppe analytischer Automorphismen mittels

$$Z\to M\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1};\ M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Sei $\boldsymbol{\Gamma}$ eine Untergruppe von $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n$ bzw. $\boldsymbol{\Omega}_n$; v ein Abelscher Charakter von $\boldsymbol{\Gamma}$. Eine auf $\boldsymbol{H}_n$ bzw. $\boldsymbol{S}_n$ definierte komplexwertige Funktion f heißt automorphe Form zu $\boldsymbol{\Gamma}$ vom Gewicht k (ganz rationale Zahl) zum Multiplikatorsystem v, wenn gilt:

1. f ist holomorph,
2. $f|_k M = v(M) \cdot f$ für $M \in \boldsymbol{\Gamma}$.

Dabei werde allgemein

$$f|_k M(Z) = |CZ+D|^{-k} f(M\langle Z\rangle); \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{6}$$

gesetzt. Wir definieren nun die Hermitesche Modulgruppe n-ten Grades zum imaginär-quadratischen Zahlkörper $\boldsymbol{K}$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_n(\boldsymbol{K}) = \{M \in \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n \mid M \text{ ganz in } \boldsymbol{K}\} \tag{7}$$

und die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades:

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = \{M \in \boldsymbol{\Omega}_n \mid M \text{ ganz rational}\}. \tag{8}$$

Im folgenden ist $\boldsymbol{\Gamma}$ stets eine mit $\boldsymbol{\Gamma}_n(\boldsymbol{K})$ bzw. $\boldsymbol{\Gamma}_n$ kommensurable Untergruppe von $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_n$ bzw. $\boldsymbol{\Omega}_n$.

Wichtige Beispiele von Gruppen, die mit $\boldsymbol{\Gamma}_n$ kommensurabel sind, hat man in den Siegelschen Stufengruppen

$$\boldsymbol{\Gamma}(T) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_0(T) \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}^{-1}, \tag{9}$$

wobei T eine Elementarteilermatrix vom Typus

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & t_2 & \\ 0 & & \ddots \; t_n \end{pmatrix}$$

mit ganz rationalen $t_i > 0$; $t_j | t_{j+1}$ für alle i, j und

$$\boldsymbol{\Gamma}_0(T) = \left\{ M = M^{(2n)} \,\middle|\, M' \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & T \\ -T & 0 \end{pmatrix};\ M \text{ ganz rat.} \right\} \tag{10}$$

sei. Eine automorphe Form zu $\boldsymbol{\Gamma}$ heißt Hermitesche bzw. Siegelsche Modulform n-ten Grades zu $\boldsymbol{\Gamma}$, wenn im Falle $n=1$ noch eine gewisse Beschränktheitsbedingung „im Unendlichen" erfüllt ist. Der Vektorraum dieser Formen wird mit $[\boldsymbol{\Gamma}, k, v]$ bezeichnet oder auch mit $[\boldsymbol{\Gamma}, k]$, wenn es sich um das triviale Multiplikatorsystem $v \equiv 1$ handelt. Bekanntlich gilt

$$\dim[\boldsymbol{\Gamma}, k, v] < \infty; \qquad \dim[\boldsymbol{\Gamma}, 0, v] = \begin{cases} 0, & \text{falls } v \not\equiv 1 \\ 1, & \text{falls } v \equiv 1 \end{cases}$$

$$\dim[\boldsymbol{\Gamma}, k, v] = 0, \quad \text{falls } k < 0.$$

Obwohl sich ein Teil der vorliegenden Untersuchungen verallgemeinern läßt, wird aus Gründen der Einfachheit $n=2$ und $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Q}(i)$ (Gaußscher Zahlkörper) vorausgesetzt. Die ganz algebraischen Zahlen in $\boldsymbol{K}$ sind die Zahlen $a=\dot{a}+i\ddot{a}$ mit ganz rationalen $\dot{a}, \ddot{a}$. Wir nennen sie ganz schlechthin.

III. Konstruktion gewisser Modulformen mittels Thetareihen

Zu zwei ganz rationalen Spalten $\mathfrak{a}=\binom{a_1}{a_2}$; $\mathfrak{b}=\binom{b_1}{b_2}$ definieren wir die Thetareihe

$$\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\sum_{\mathfrak{g}} e\left(Z\left\{\mathfrak{g}+\frac{1+i}{2}\mathfrak{a}\right\}+2\operatorname{Re}\frac{1+i}{2}\mathfrak{b}'\mathfrak{g}\right); \quad Z\in\boldsymbol{H}_2, \tag{11}$$

wobei allgemein

$$e(z)=e^{\pi i z} \quad \text{und} \quad Z\{\mathfrak{z}\}=\bar{\mathfrak{z}}'Z\mathfrak{z} \tag{12}$$

gesetzt werde. Die Summation laufe über alle ganzen Spalten $\mathfrak{g}=\binom{g_1}{g_2}$. Die Reihe $\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ steht in engem Zusammenhang mit der z.B. in [4] eingeführten Thetareihe

$$\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\sum_{\mathfrak{g}} e(Z\{\mathfrak{g}+\tfrac{1}{2}\mathfrak{a}\}+\mathfrak{b}'\mathfrak{g}) \qquad (Z\in\boldsymbol{S}_2). \tag{13}$$

Die Summation ist hier über alle ganz rationalen Spalten $\mathfrak{g}$ zu erstrecken. Wir leiten einige einfache Eigenschaften dieser Thetareihen her.

a) Ist $\mathfrak{a}\equiv\mathfrak{a}^*\bmod 2$, $\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{b}^*\bmod 2$, so gilt

$$\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\Theta(Z;\mathfrak{a}^*,\mathfrak{b}^*), \qquad \vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\pm\vartheta(Z;\mathfrak{a}^*,\mathfrak{b}^*),$$

wie die Substitution

$$\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}+\frac{1+i}{2}(\mathfrak{a}^*-\mathfrak{a}) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}+\frac{1}{2}(\mathfrak{a}^*-\mathfrak{a})$$

zeigt.

b) $\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ und $\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ verschwinden identisch, wenn $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\equiv 1 \bmod 2$ gilt.

Die Transformation $\mathfrak{g}\to -i\mathfrak{g}-i\mathfrak{a}$ zeigt nämlich

$$\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=(-1)^{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}\,\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b}).$$

Für $\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ kann man ähnlich schließen, die Behauptung folgt aber auch aus

c) $$\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\vartheta^2(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \quad \text{für} \quad Z\in\boldsymbol{S}_2.$$

Für symmetrische Z gilt nämlich

$$Z\left\{\mathfrak{g}+\frac{1+i}{2}\mathfrak{a}\right\}=Z\left\{\dot{\mathfrak{g}}+\frac{1}{2}\mathfrak{a}\right\}+Z\left\{\ddot{\mathfrak{g}}+\frac{1}{2}\mathfrak{a}\right\},$$

wenn $\dot{\mathfrak{g}}$ bzw. $\ddot{\mathfrak{g}}$ den Real- bzw. Imaginärteil von $\mathfrak{g}$ bezeichnet.

d) $$\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\Theta(Z';\mathfrak{a},\mathfrak{b}).$$

Zum Beweis hat man die Formel $Z\{\mathfrak{z}\}=Z'\{\bar{\mathfrak{z}}\}$ zu verwenden.

Es gibt mod 2 zehn verschiedene Möglichkeiten für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ unter der Nebenbedingung $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\equiv 0 \bmod 2$, nämlich

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0&0&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right).$$

Das Produkt der dadurch bestimmten zehn Thetareihen wird (abweichend von [*4*]) mit

$$\Theta(Z)=\prod\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \quad \text{für} \quad Z\in\boldsymbol{H}_2, \tag{14}$$

$$\vartheta(Z)=\prod\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \quad \text{für} \quad Z\in\boldsymbol{S}_2 \tag{15}$$

bezeichnet. Nach c) gilt

$$\Theta(Z)=\vartheta^2(Z) \quad \text{für} \quad Z\in\boldsymbol{S}_2. \tag{16}$$

Die folgenden Untersuchungen verallgemeinern Satz 1 in [*4*].

Satz 1. (1) *$\Theta(Z)$ ist eine symmetrische Modulform vom Gewicht 10 zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$, d.h. es ist*

$$\Theta(Z)\in[\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}),10] \quad \textit{und} \quad \Theta(Z)=\Theta(Z').$$

(2) *$\Theta(Z)$ verschwindet auf der Mannigfaltigkeit*

$$\boldsymbol{N}=\left\{Z=\begin{pmatrix}z_0 & z_1\\ z_3 & z_2\end{pmatrix}\in\boldsymbol{H}_2;\ z_1=i\,z_3\right\}$$

in erster Ordnung, und jede Nullstelle von $\Theta(Z)$ ist einem Punkt in $\boldsymbol{N}$ bezüglich $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ äquivalent.

Teil (1) dieses Satzes ist leicht zu beweisen. Man verwendet zweckmäßig, daß $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ von den speziellen Substitutionen

(a) $Z\to Z+S;\ S=\begin{pmatrix}s_0 & s_1\\ \bar{s}_1 & s_2\end{pmatrix};\ s_0, s_2$ ganz rational; s_1 ganz,

(b) $Z\to Z\{U\}=\overline{U}'ZU;\ U$ unimodular (d.h. U und U^{-1} ganz),

(c) $Z\to -Z^{-1}$

erzeugt wird. Der Wittsche Beweis [13] für das rationale Analogon dieses Satzes ist auf den Fall der Hermiteschen Modulgruppe zum Gaußschen Zahlkörper unmittelbar zu übertragen.

Die Gruppe der ganzen Hermiteschen Matrizen wird von den speziellen Matrizen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Für diese gilt

$$\begin{aligned} \Theta(Z+S_1;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) &= e^{\frac{\pi i a_1}{2}}\,\Theta\left(Z;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\begin{pmatrix} 1+a_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \\ \Theta(Z+S_2;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) &= e^{\frac{\pi i a_2}{2}}\,\Theta\left(Z;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1+a_2 \end{pmatrix}\right), \\ \Theta(Z+S_3;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) &= e^{\pi i a_1 a_2}\,\Theta(Z;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\tilde{\mathfrak{a}}), \\ \Theta(Z+S_4;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) &= \qquad\quad \Theta(Z;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\tilde{\mathfrak{a}}), \end{aligned}$$

falls $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$; $\tilde{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ gesetzt wird.

Da es unter den zehn Thetareihen jeweils genau vier mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ und genau zwei mit $a_1 a_2 = 1$ gibt und da entsprechend

$$\mathfrak{b} \to \mathfrak{b} + \begin{pmatrix} 1+a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1+a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} + \tilde{\mathfrak{a}}$$

Permutationen der zehn Restklassen $\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix}$ mod 2 bedeuten, folgt

$$\begin{gathered} \Theta(Z+S) = \Theta(Z) \quad \text{für} \quad S = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 \\ \bar{s}_1 & s_2 \end{pmatrix}; \\ s_0,\, s_2 \quad \text{ganz rational}; \quad s_1 \text{ ganz}. \end{gathered} \tag{17}$$

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten von $\Theta(Z)$ bei unimodularen Substitutionen. Die Gruppe der zweireihigen unimodularen Matrizen wird von den speziellen Matrizen

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad U_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt.

1. $U = U_1, U_2$.

Mit $\mathfrak{g}$ durchläuft $U\mathfrak{g}$ alle ganzen Spalten, also gilt

$$\Theta(Z\{U\};\,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \Theta(Z;\,U\mathfrak{a},\,U'^{-1}\mathfrak{b}).$$

Die zehn in Frage kommenden Werte von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ werden durch

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} U & \mathfrak{a} \\ U'^{-1} & \mathfrak{b} \end{pmatrix} \quad (\text{mod } 2)$$

permutiert. Mithin ist

$$\Theta(Z\{U\}) = \Theta(Z) \quad \text{für} \quad U = U_1, U_2.$$

2. Die Substitution $g_1 \to -ig_1 + a_1$ zeigt

$$\Theta(Z\{U_3\}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = (-1)^{a_1 b_1}\, \Theta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Da genau ein $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ mit $a_1 b_1 = 1$ vorkommt, gilt

$$\Theta(Z\{U_3\}) = -\Theta(Z).$$

Zusammenfassend können wir damit

$$\Theta(Z\{U\}) = |U^{-1}|^{10}\, \Theta(Z) \quad \text{für unimodulare} \quad U = U^{(2)} \tag{18}$$

feststellen.

Es bleibt das Transformationsverhalten bei $Z \to -Z^{-1}$ zu untersuchen, was nach bekanntem Verfahren mittels der Poissonschen Summenformel geschehen kann. Von selbständigem Interesse ist vielleicht die Reduktion der Betrachtung auf den Fall der „rationalen" Thetareihen. Es sei

$$\tilde{Z} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z+Z'; & i(Z-Z') \\ -i(Z-Z'); & Z+Z' \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Dann gilt

$$\tilde{Z}\left\{\begin{matrix}\mathfrak{x}\\ \mathfrak{y}\end{matrix}\right\} = Z\{\mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y}\} \quad \text{für reelle} \quad \mathfrak{x}, \mathfrak{y}.$$

Außerdem rechnet man leicht nach:

$$(\tilde{Z})^{-1} = (\widetilde{Z^{-1}}), \qquad |\tilde{Z}| = |Z|^2.$$

Definiert man daher zu reellen n-reihigen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ allgemein

$$\vartheta(Z; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum e(Z\{\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{x}\} + \mathfrak{b}'\mathfrak{y}) \quad \text{für} \quad Z \in \boldsymbol{S}_n,$$

wobei über alle ganz rationalen n-reihigen Spalten $\mathfrak{g}$ summiert werde, so gilt

$$\Theta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \vartheta\left(\tilde{Z}; \begin{pmatrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{a}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathfrak{b}\\ \mathfrak{b}\end{pmatrix}\right) \quad \text{für} \quad Z \in \boldsymbol{H}_2. \tag{20}$$

Das Transformationsverhalten von $\vartheta(Z; \mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ setzen wir als bekannt voraus. Aus

$$\vartheta(-Z^{-1}; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = |iZ|^{\frac{1}{2}}\, e^{-2\pi i \mathfrak{x}'\mathfrak{y}}\, \vartheta(Z; \mathfrak{y}, -\mathfrak{x}) \quad \text{mit} \quad Z \in \boldsymbol{S}_n \tag{21}$$

folgt in der Tat die Thetatransformationsformel

$$\Theta(-Z^{-1}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = -|Z|\, \Theta(Z; \mathfrak{b}, \mathfrak{a}). \tag{22}$$

Mit $\Theta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ist auch $\Theta(Z)$ bezüglich $Z \to Z'$ invariant. Damit ist jedenfalls Teil (1) von Satz 1 bewiesen.

IV. Abschätzungen der Thetareihen

Teil (2) von Satz 1 wird durch direkte Abschätzung der Thetareihen in einem geeigneten Fundamentalbereich von $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ bewiesen. Sei $\boldsymbol{X}$ der Bereich der zweireihigen Hermiteschen Matrizen, die den Bedingungen

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_0,\ \dot{x}_1,\ \ddot{x}_1,\ x_2 \leqq \tfrac{1}{2}$$

genügen. Hierbei und auch gelegentlich im folgenden verwenden wir die Bezeichnung

$$\dot{a} = \operatorname{Re} a; \qquad \ddot{a} = \operatorname{Im} a. \tag{24}$$

Sei weiterhin $\boldsymbol{R}$ ein Fundamentalbereich zweireihiger positiv definiter Hermitescher Matrizen Y bezüglich der unimodularen Substitutionen

$$Y \to Y\{U\} = \overline{U}' Y U \qquad (U = U^{(2)} \text{ unimodular}).$$

Nach [2] stellt der Bereich $\boldsymbol{F}$, der aus allen Matrizen $Z = X + iY$ besteht, die den Bedingungen

a) $X \in \boldsymbol{X}$,

b) $Y \in \boldsymbol{R}$,

c) $\|CZ + D\| \geqq 1$ für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$

genügen, einen Fundamentalbereich bezüglich $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ dar. Einen Bereich $\boldsymbol{R}$ könnte man der Humbertschen Reduktionstheorie entnehmen. Im Falle des Gaußschen Zahlkörpers ist es jedoch einfacher, analog der Minkowskischen Reduktionstheorie wie folgt vorzugehen.

Sei $Y = Y^{(2)}$ eine positiv definite Hermitesche Matrix. Aus der Menge der unimodularen Matrizen $U = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$, für die $Y\{\mathfrak{u}_1\}$ minimal ist, wählen wir eine aus, für die $Y\{\mathfrak{u}_2\}$ minimal ist. Wir können und wollen annehmen, daß der Real- und Imaginärteil von $\overline{\mathfrak{u}}_1' Y \mathfrak{u}_2$ nicht negativ sind, was eventuell durch Multiplikation von $\mathfrak{u}_2$ mit einer Potenz von i zu erreichen ist. Die Matrix $Y\{U\}$ heiße dann reduziert. Die Menge der reduzierten Matrizen ist der gesuchte Fundamentalbereich $\boldsymbol{R}$. Eine reduzierte Matrix $Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \bar{y}_1 & y_2 \end{pmatrix}$ genügt offensichtlich folgenden Bedingungen:

(a) $Y\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \geqq y_0$, falls g_1, g_2 teilerfremde ganze Zahlen sind;

(b) $Y\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix} \geqq y_2$, falls $\begin{pmatrix} 1 & g_1 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}$ unimodular ist;

(c) $\dot{y}_1, \ddot{y}_1 \geqq 0$.

Hieraus leitet man leicht die Ungleichungen

$$0 \leqq 2\ddot{y}_1, 2\dot{y}_1 \leqq y_0 \leqq y_2 \tag{25}$$

ab. Eine kleine Überlegung zeigt, daß z_0 und z_2 im bekannten Fundamentalbereich der elliptischen Modulgruppe enthalten sind, wenn $Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix}$ in $\boldsymbol{F}$ liegt. Hieraus folgt, daß $\boldsymbol{F}$ in dem Bereich $\boldsymbol{B}$ enthalten ist, der aus allen Matrizen von $\boldsymbol{H}_2$ besteht, deren Hermitescher Imaginärteil $Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \bar{y}_1 & y_2 \end{pmatrix}$ den Ungleichungen

$$0 \leqq 2\ddot{y}_1, 2\dot{y}_1, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leqq y_0 \leqq y_2 \tag{26}$$

genügt. Wir gehen jetzt an die Abschätzung der Thetareihen. Zunächst betrachten wir den Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$:

$$\Theta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) = \sum (-1)^{\operatorname{Re}(1+i)\mathfrak{b}'\mathfrak{g}} e(Z\{\mathfrak{g}\}).$$

Man ziehe das zu $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}$ gehörige Glied auf die linke Seite und schätze den Rest durch die Betragsreihe ab.

$$|\Theta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) - 1| \leqq -1 + \Theta(iY; \mathfrak{o}, \mathfrak{o}); \qquad Z = X + iY.$$

Es folgt

$$\Theta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) \neq 0, \quad \text{falls} \quad \Theta(iY; \mathfrak{o}, \mathfrak{o}) < 2.$$

Wir bestimmen das Maximum von $\Theta(iY; \mathfrak{o}, \mathfrak{o})$ im Bereiche

$$\boldsymbol{Y}_a = \left\{ Y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \bar{y}_1 & y_2 \end{pmatrix} \middle| \, 0 \leqq 2\ddot{y}_1, 2\dot{y}_1, a \leqq y_0 \leqq y_2 \right\}; \qquad a > 0. \tag{27}$$

Offensichtlich gilt

$$\boldsymbol{B} = \{Z \mid Z = X + iY \in \boldsymbol{H}_2;\ Y \in \boldsymbol{Y}_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\}.$$

Beachtet man, daß Y' aus Y entsteht, wenn man $\ddot{y}_1$ ins Negative überführt, so folgt aus den Eigenschaften des hyperbolischen Cosinus, daß

$$e(iY\{\mathfrak{g}\}) + e(iY\{\bar{\mathfrak{g}}\})$$

eine monoton wachsende Funktion von $|\ddot{y}_1|$ ist. Eine entsprechende Aussage gilt daher für $\Theta(iY; \mathfrak{o}, \mathfrak{o})$ in Abhängigkeit von $\ddot{y}_1$ und nach einem ähnlichen Schluß in Abhängigkeit von $\dot{y}_1$. Da $e(iY\{\mathfrak{g}\})$ als Funktion von y_0 und y_2 monoton fallend ist, folgt aus den Reduktionsungleichungen (25) die Abschätzung

$$\Theta\left(i\begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \bar{y}_1 & y_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{o}, \mathfrak{o}\right) \leqq \Theta\left(i\begin{pmatrix} y_0 & \frac{1+i}{2} y_0 \\ \frac{1-i}{2} y_0 & y_2 \end{pmatrix}; \mathfrak{o}, \mathfrak{o}\right)$$

$$\leqq \Theta\left(\tfrac{1}{2} i y_0 \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}; \mathfrak{o}, \mathfrak{o}\right).$$

Das Maximum von $\Theta(iY;\mathfrak{o},\mathfrak{o})$ im Bereiche $\boldsymbol{Y}_a$ wird daher im Punkt

$$Y_a = \tfrac{1}{2}a\begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2\end{pmatrix} \tag{28}$$

angenommen. Leider zeigt eine numerische Rechnung

$$\Theta(iY_{\frac{1}{2}\sqrt{3}};\mathfrak{o},\mathfrak{o}) > 2.$$

Wir begnügen uns daher vorerst zu beweisen, daß $\Theta(Z;\mathfrak{o},\mathfrak{b})$ in $\boldsymbol{F}$ außerhalb eines geeigneten Kompaktums keine Nullstellen hat. Zunächst beachten wir

$$\lim_{a\to\infty}\Theta(iY_a;\mathfrak{o},\mathfrak{o}) = 1.$$

Es gibt also ein $a_0>0$, so daß $\Theta(iY;\mathfrak{o},\mathfrak{o})<2$ für $Y\in\boldsymbol{Y}_{a_0}$ gilt.

Wir betrachten jetzt den Bereich

$$\boldsymbol{Y}^a = \left\{Y=\begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \bar{y}_1 & y_2\end{pmatrix}\in\boldsymbol{Y}_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\,\middle|\, a\leq y_2\right\}. \tag{29}$$

Offensichtlich ist die Menge der Punkte aus $\boldsymbol{F}$, deren Hermitescher Imaginärteil nicht in $\boldsymbol{Y}^a$ liegt, beschränkt. Sei $a>a_0$ und

$$Y=\begin{pmatrix} y_0 & \frac{1+i}{2}y_0 \\ \frac{1-i}{2}y_0 & y_2\end{pmatrix}\in\boldsymbol{Y}^a, \quad\text{aber}\quad Y\notin\boldsymbol{Y}_{a_0}.$$

Mit $\mathfrak{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2\end{pmatrix}$ gilt

$$Y\{\mathfrak{g}\} = Y_{y_0}\{\mathfrak{g}\} + (y_2-y_0)\,g_2\bar{g}_2 \geqq Y_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\{\mathfrak{g}\} + (a-a_0)\,g_2\bar{g}_2.$$

Daher gilt für beliebiges $Y\in\boldsymbol{Y}^a$; $Y\notin\boldsymbol{Y}_{a_0}$ $(a>a_0)$ die Ungleichung

$$\Theta(iY;\mathfrak{o},\mathfrak{o}) \leqq \sum e\left(iY_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\{\mathfrak{g}\} + (a-a_0)\,g_2\bar{g}_2\right).$$

Es ist aber

$$\lim_{a\to\infty}\sum e\left(iY_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\{\mathfrak{g}\} + (a-a_0)\,g_2\bar{g}_2\right) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}n^2}\right)^2 < 2.$$

Es gibt also ein Kompaktum $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{F}$, so daß $\Theta(Z;\mathfrak{o},\mathfrak{b})$ außerhalb $\boldsymbol{K}$ in $\boldsymbol{F}$ keine Nullstelle hat.

Es sei bemerkt, daß für die numerische Rechnung die Abschätzung

$$e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}} = 0{,}065\ldots < 0{,}07$$

genügt.

Wir betrachten nun

$$\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \sum(-1)^{\varepsilon(g_1+\bar{g}_1)}\,e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right) \quad\text{für}\quad \varepsilon=0,1.$$

Für die Nullstellenuntersuchung ist folgende Umformung von Bedeutung:

$$\boxed{\begin{aligned} f_\varepsilon(Z) &= (-1)^\varepsilon \frac{\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) e\left(-Z\left\{\begin{matrix}0\\ \frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)}{e\left(z_0-\frac{z_1}{1+i}-\frac{z_3}{1-i}\right)+(-1)^\varepsilon} \\ &= \sum_{a_{\mathfrak{g}}>0}(-1)^{\varepsilon(\dot{g}_1+\ddot{g}_1)} e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-Z\left\{\begin{matrix}0\\ \frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\times \\ &\quad\times\sum_{n=0}^{a_{\mathfrak{g}}-1}(-1)^{n(\varepsilon+1)} e\left(n\left(z_0-\frac{z_1}{1+i}-\frac{z_3}{1-i}\right)\right) \end{aligned}} \tag{30}$$

Dabei ist $a_{\mathfrak{g}}$ die nicht weiter interessierende Zahl

$$a_{\mathfrak{g}} = 2(\dot{g}_2^2+\ddot{g}_2^2+\dot{g}_1\dot{g}_2+\ddot{g}_1\dot{g}_2+\ddot{g}_1\ddot{g}_2-\dot{g}_1\ddot{g}_2+\ddot{g}_1+\ddot{g}_2+\dot{g}_2)+1\,.$$

Von der Bezeichnung $Z=\begin{pmatrix}z_0 & z_1\\ z_3 & z_2\end{pmatrix}$ werden wir auch im folgenden Gebrauch machen.

Der Beweis obiger Identität beruht auf der Transformationsformel

$$\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=(-1)^\varepsilon\,\Theta\left(Z'\left\{\begin{matrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{matrix}\right\};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right),$$

sie ergibt sich vermittels der Substitution

$$\begin{pmatrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}g_1\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{pmatrix},$$

wenn man noch die Invarianz der Thetareihe bezüglich $Z\to Z'$ beachtet.

Es folgt nun

$$2\,\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)+(-1)^\varepsilon\,\Theta\left(Z'\left\{\begin{matrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{matrix}\right\};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$=\sum(-1)^{\varepsilon(\dot{g}_1+\ddot{g}_1)}\left[e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^\varepsilon e\left(Z'\left\{\begin{matrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}g_1\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\right].$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$Z'\left\{\begin{matrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}g_1\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-Z\left\{\begin{matrix}g_1\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}=\left(z_0-\frac{z_1}{1+i}-\frac{z_3}{1-i}\right)a_{\mathfrak{g}}. \tag{31}$$

Beachtet man

$$
\begin{aligned}
&e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^{\varepsilon}\,e\left(Z'\begin{Bmatrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{Bmatrix}\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\\
&\qquad=(-1)^{\varepsilon}\,e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(Z'\begin{Bmatrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{Bmatrix}\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-\right.\right.\\
&\qquad\quad\left.\left.-Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right]=e\left(Z'\begin{Bmatrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{Bmatrix}\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\times\right.\\
&\qquad\quad\times\left[e\left(-Z'\begin{Bmatrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{Bmatrix}\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}+Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right],
\end{aligned}
$$

so folgt

$$
\begin{aligned}
&2\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=(-1)^{\varepsilon}\sum_{a_{\mathfrak{g}}>0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1)}\,e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\times\\
&\quad\times\left[e\left(z_0-\frac{z_1}{1+i}-\frac{z_3}{1-i}\right)a_{\mathfrak{g}}+(-1)^{\varepsilon}\right]+\sum_{a_{\mathfrak{g}}<0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1)}\times\\
&\quad\times e\left(Z'\begin{Bmatrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{Bmatrix}\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(-\left(z_0-\frac{z_1}{1+i}-\frac{z_3}{1-i}\right)a_{\mathfrak{g}}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right].
\end{aligned}
$$

In der zweiten Teilsumme, in der über $a_{\mathfrak{g}}<0$ summiert wird, führen wir die Involution

$$g_1\to\bar g_1+(1-i)\,\bar g_2-i;\qquad g_2\to i\,\bar g_2$$

aus; sie bewirkt

a) $$Z'\begin{Bmatrix}1 & 1+i\\ 0 & -i\end{Bmatrix}\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}=Z'\left\{\begin{matrix} g_1+(1+i)\,g_2+i \\ -i\,g_2+\frac{1-i}{2}\end{matrix}\right\}\to Z'\left\{\begin{matrix} \bar g_1 \\ \bar g_2+\frac{1-i}{2}\end{matrix}\right\}$$
$$=Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}.$$

b) $a_{\mathfrak{g}}\to -a_{\mathfrak{g}}$.

c) $(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1)}\to(-1)^{\varepsilon}\,(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1)}$.

Die beiden Teilsummen stimmen daher überein, und die behauptete Formel ist nun leicht zu bestätigen. Wir beweisen jetzt, daß $f_\varepsilon(Z)$ in $\boldsymbol{F}$ außerhalb eines gewissen Kompaktums keine Nullstellen hat. Wir ziehen aus der Reihe die Glieder, die durch

$$Z\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-Z\left\{\begin{matrix} 0 \\ \frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}=0$$

bestimmt sind, d.h. die zu

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ -i \end{matrix} \Big| \begin{matrix} 0 \\ -1-i \end{matrix} \Big)$$

gehörigen Glieder heraus und schätzen den Rest durch die Betragsreihe ab. Wegen (25) gilt

$$|f_\varepsilon(Z) - 4| \leqq h_1(Y) = \sum_{\mathfrak{g} \notin M_1;\, a_{\mathfrak{g}} > 0} e\left(i\,Y\left\{\begin{matrix} g_1 \\ g_2 + \frac{1+i}{2} \end{matrix}\right\} - i\,Y\left\{\begin{matrix} 0 \\ \frac{1+i}{2} \end{matrix}\right\}\right) a_{\mathfrak{g}}.$$

Wir zeigen, daß $f_\varepsilon(Z)$ in $\boldsymbol{Y}^a$ [s. (29)] bei genügend großem a keine Nullstellen hat und beachten hierzu $\lim\limits_{\lambda \to \infty} h_1(Y) = 0$, falls λ der kleinste Eigenwert von Y ist. Daher existiert jedenfalls ein $a_0 > 0$ mit $f_\varepsilon(Z) \neq 0$ für $Y \in \boldsymbol{Y}_{a_0}$ [s. (26)].

Die Behauptung, daß $f_\varepsilon(Z)$ in $\boldsymbol{Y}^a$ bei hinreichend großem (von Z unabhängigem) a keine Nullstellen in $\boldsymbol{Y}^a$ hat, folgt daher aus

$$\lim_{y_2 \to \infty} h_1(Y) < 4 \quad \text{für} \quad 0 \leqq 2\ddot{y}_1,\, 2\dot{y}_1,\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leqq y_0 \leqq a_0.$$

Führt man den Grenzübergang aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{y_2 \to \infty} h_1(Y) &= 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y_0 n^2 + n(\dot{y}_1 - \ddot{y}_1))} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi(y_0 n^2 + n(\dot{y}_1 + \ddot{y}_1))} (2n+1) - 4 \\ &\leqq 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{3}\, n(2n-1)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{3}\, n^2} (2n+1) - 4 < 4. \end{aligned}$$

Ähnlich kann $\Theta\left(Z; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ behandelt werden. Da diese Reihe aus $\Theta\left(Z; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ durch Vertauschung von z_0 mit z_2 entsteht, verschwindet

$$\tilde{f}_\varepsilon(Z) = \frac{\Theta\left(Z; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) e\left(-Z\left\{\begin{matrix}\frac{1+i}{2} \\ 0\end{matrix}\right\}\right)}{e\left(z_2 - \frac{z_1}{1+i} - \frac{z_3}{1-i}\right) + (-1)^\varepsilon} \tag{32}$$

in $\boldsymbol{F}$ außerhalb eines geeigneten Kompaktums sicher dann nicht, wenn

$$\lim_{y_0 \to \infty} h_1(Y) < 4 \quad \text{für} \quad 0 \leqq 2\ddot{y}_1,\, 2\dot{y}_1,\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leqq y_2$$

gilt. Man zeigt leicht

$$\tfrac{1}{4} \lim_{y_0 \to \infty} h_1(Y) + 1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi y_2 (n^2+n)} (2n^2 + 2n + 1)\right)^2 < 2.$$

Ähnlich kann

$$\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\,\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

behandelt werden. Hier ist folgende Formel von Bedeutung:

$$\boxed{\begin{aligned} g_\varepsilon(Z) &= \frac{\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\,\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) e\left(-Z\left\{\begin{matrix}\frac{1+i}{2}\\ -\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)}{\left(e\left(\frac{z_1-iz_3}{1-i}\right)+(-1)^\varepsilon\right)\left(e\left(\frac{z_1+iz_3}{1+i}\right)+(-1)^\varepsilon\right)}\\ &= \sum_{b_{\mathfrak{g}}>0;\ c_{\mathfrak{g}}>0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1+\dot g_2+\ddot g_2)}\, e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1+\frac{1+i}{2}\\ -g_2-\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-\right.\\ &\quad \left.-Z\left\{\begin{matrix}\frac{1+i}{2}\\ -\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\sum_{0\leq n<b_{\mathfrak{g}}}(-1)^{n(\varepsilon+1)}\, e\left(n\,\frac{z_1-iz_3}{1-i}\right)\times\\ &\quad \times\sum_{0\leq n<c_{\mathfrak{g}}}(-1)^{n(\varepsilon+1)}\, e\left(n\,\frac{z_1+iz_3}{1+i}\right)\end{aligned}} \tag{33}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} b_{\mathfrak{g}} &= (2\dot g_1+1)(\dot g_2+\ddot g_2+1)+(2\ddot g_1+1)(\ddot g_2-\dot g_2),\\ c_{\mathfrak{g}} &= (2\ddot g_1+1)(\dot g_2+\ddot g_2+1)+(2\dot g_1+1)(\dot g_2-\ddot g_2).\end{aligned}$$

Zum Beweis gehen wir von der Transformationsformel

$$\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\,\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=(-1)^\varepsilon\,\Theta\left(Z'\left\{\begin{matrix}1&0\\0&i\end{matrix}\right\};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\,\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

aus. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\,\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) &= \sum(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1+\dot g_2+\ddot g_2)}\left[e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1+\frac{1+i}{2}\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+\right.\\ &\quad \left.+(-1)^\varepsilon e\left(Z'\left\{\begin{matrix}g_1+\frac{1+i}{2}\\ ig_2+\frac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\right].\end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$Z\left\{\begin{matrix}g_1+\frac{1+i}{2}\\ g_2+\frac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-Z'\left\{\begin{matrix}g_1+\frac{1+i}{2}\\ ig_2+\frac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{z_1-iz_3}{1-i}\,b_{\mathfrak{g}}.$$

Aus

$$e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ g_2+\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^{\varepsilon}e\left(Z'\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)$$

$$=e\left(Z'\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ g_2+\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-Z'\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right]$$

$$=(-1)^{\varepsilon}e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ g_2+\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(Z'\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right]$$

folgt nun

$$2\,\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\sum_{b_{\mathfrak g}>0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1+\dot g_2+\ddot g_2)}\,e\left(Z'\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(\frac{z_1-i z_3}{1-i}\,b_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right]+$$

$$+(-1)^{\varepsilon}\sum_{b_{\mathfrak g}<0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1+\dot g_2+\ddot g_2)}\,e\left(Z\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ g_2+\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\times$$

$$\times\left[e\left(-\frac{z_1-i z_3}{1-i}\,b_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right].$$

Die Involution

$$g_1\to\bar g_1-i;\qquad g_2\to -i\bar g_2-1-i$$

führt offensichtlich die zweite Reihe in die erste über, so daß man folgendes Zwischenergebnis erhält:

$$\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\sum_{b_{\mathfrak g}>0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1+\dot g_2+\ddot g_2)}\,e\left(Z'\left\{\begin{matrix} g_1+\dfrac{1+i}{2} \\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(\frac{z_1-i z_3}{1-i}\,b_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right].$$

Wir verwenden jetzt die Formel

$$\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=(-1)^{\varepsilon}\,\Theta\left(Z'\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{matrix}\right\};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

oder

$$2\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\Theta\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)+(-1)^{\varepsilon}\,\Theta\left(Z'\left\{\begin{matrix}1&0\\0&-i\end{matrix}\right\};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}2\Theta&\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\\&=\sum_{b_{\mathfrak g}>0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1+\dot g_2+\ddot g_2)}\left[e\left(Z'\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+\right.\\&\quad\left.+(-1)^{\varepsilon}e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ -g_2-\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\right]\left[e\left(\frac{z_1-iz_3}{1-i}\,b_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right].\end{aligned}$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$\begin{aligned}e&\left(Z'\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)+(-1)^{\varepsilon}e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ -g_2-\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\\&=e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ -g_2-\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(\frac{z_1+iz_3}{1+i}\,c_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right]\\&=(-1)^{\varepsilon}e\left(Z'\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ i g_2+\dfrac{-1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\left[e\left(-\frac{z_1+iz_3}{1+i}\,c_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right].\end{aligned}$$

Wendet man in der Teilreihe, die durch $c_{g}<0$ definiert wird, die Involution

$$g_1\to-\bar g_1-1;\qquad g_2\to-i\bar g_2-1-i$$

an, so folgt

$$\begin{aligned}\Theta&\left(Z;\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\\&=\sum_{b_{\mathfrak g}>0;\;c_{\mathfrak g}>0}(-1)^{\varepsilon(\dot g_1+\ddot g_1+\dot g_2+\ddot g_2)}\,e\left(Z\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ -g_2-\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}\right)\times\\&\qquad\times\left[e\left(\frac{z_1-iz_3}{1-i}\,b_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right]\left[e\left(\frac{z_1+iz_3}{1+i}\,c_{\mathfrak g}\right)+(-1)^{\varepsilon}\right].\end{aligned}$$

Damit wird die behauptete Formel für $g_{\varepsilon}(Z)$ evident. Zieht man in der Reihendarstellung für $g_{\varepsilon}(Z)$ die Glieder zu

$$Z\left\{\begin{matrix}g_1+\dfrac{1+i}{2}\\ -g_2-\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}-Z\left\{\begin{matrix}\dfrac{1+i}{2}\\ -\dfrac{1+i}{2}\end{matrix}\right\}=0,$$

d.h. zu

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -i \\ -i \end{matrix} \middle| \begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \end{pmatrix} \right\}$$

auf die linke Seite und schätzt man den Rest durch die Betragsreihe ab, so folgt

$$|g_\varepsilon(Z)-4| \leqq h_2(Y) \quad \text{für} \quad 0 \leqq 2\ddot{y}_1 \leqq 2\dot{y}_1$$

mit

$$h_2(Y) = \sum_{b_{\mathfrak{g}}>0;\, c_{\mathfrak{g}}>0;\, \mathfrak{g} \notin M_2} e\left(iY \begin{Bmatrix} g_1 + \frac{1+i}{2} \\ -g_2 - \frac{1+i}{2} \end{Bmatrix} - iY \begin{Bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1+i}{2} \end{Bmatrix} \right) b_{\mathfrak{g}}\, c_{\mathfrak{g}}.$$

Nach einem bereits zweimal verwendeten Prinzip verschwindet $g_\varepsilon(Z)$ außerhalb eines geeigneten Kompaktums in $\boldsymbol{F}$ nicht, wenn

$$\lim_{y_2 \to \infty} h_2(Y) < 4 \quad \text{für} \quad 0 \leqq 2\ddot{y}_1,\, 2\dot{y}_1,\, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leqq y_0$$

gilt. Eine leichte Rechnung zeigt

$$\tfrac{1}{4} \lim_{y_2 \to \infty} h_2(Y) + 1 \leqq \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\, n^2} (2n+1) \right]^2 < 2.$$

Aus den bisherigen Abschätzungen folgt:

Es gibt ein Kompaktum $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{F}$, so daß die holomorphe Funktion $\Theta(Z)/\alpha(Z)$ mit

$$\begin{aligned} \alpha(Z) = {} & \left[e\left(\frac{z_1 - i z_3}{1-i}\right) - 1 \right] \left[e\left(\frac{z_1 + i z_3}{1+i}\right) - 1 \right] \left[e\left(\frac{z_1 - i z_3}{1-i}\right) + 1 \right] \times \\ & \times \left[e\left(\frac{z_1 + i z_3}{1+i}\right) + 1 \right] \left[e\left(z_0 - \frac{z_1}{1+i} - \frac{z_3}{1-i}\right) - 1 \right] \times \\ & \times \left[e\left(z_2 - \frac{z_1}{1+i} - \frac{z_3}{1-i}\right) - 1 \right] \left[e\left(z_0 - \frac{z_1}{1+i} - \frac{z_3}{1-i}\right) + 1 \right] \times \\ & \times \left[e\left(z_2 - \frac{z_1}{1+i} - \frac{z_3}{1-i}\right) + 1 \right] \end{aligned} \tag{34}$$

in $\boldsymbol{F}$-$\boldsymbol{K}$ nirgends verschwindet. Wir bemerken, daß $\alpha(Z)$ auf der Mannigfaltigkeit

$$\boldsymbol{N} = \{ Z \in \boldsymbol{H}_2 \,|\, z_1 = i z_3 \} = \boldsymbol{S}_2 \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{Bmatrix} \tag{35}$$

in erster Ordnung verschwindet und daß jede Nullstelle von $\alpha(Z)$ einem Punkt aus $\boldsymbol{N}$ bezüglich $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ äquivalent ist. Wir zeigen z.B., daß die Nullstellenmannigfaltigkeiten

$$z_0 = \frac{z_1}{1+i} + \frac{z_3}{1-i} \quad \text{und} \quad z_1 = i z_3$$

äquivalent sind. Aufgrund der Thetatransformationsformeln gilt

$$\Theta\left(Z; \binom{1}{1}, \binom{1}{1}\right)\bigg|_1 M = \varepsilon_0 \Theta\left(Z; \binom{0}{1}, \binom{1}{0}\right) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_0^4 = 1,$$

$$M = \begin{pmatrix} E & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Es ist plausibel, und eine Rechnung bestätigt dies auch, daß M die Äquivalenz zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten liefert. Wir haben noch zu zeigen, daß in dem Kompaktum $\boldsymbol{K}$ keine Nullstellen von $\Theta(Z)$ auftreten außer den bereits festgestellten. Hierfür benötigen wir den

Hilfssatz 1. *Sei f eine Modulform zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ bzw. zu einer mit $\boldsymbol{\Gamma}_n$ $(n>1)$ kommensurablen Gruppe. Dann besitzt die Nullstellenmannigfaltigkeit von f in $\boldsymbol{H}_2/\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ bzw. $\boldsymbol{S}_n/\boldsymbol{\Gamma}$ keine kompakte Zusammenhangskomponente.*

Der Beweis ist im Anhang zu dieser Arbeit gegeben. Um diesen Hilfssatz anzuwenden, betrachten wir ein System $\boldsymbol{M}$ von Substitutionen $M \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ mit den Eigenschaften:

a) $M \in \boldsymbol{M} \Rightarrow M\langle \boldsymbol{N}\rangle \cap \boldsymbol{B}^* \neq \emptyset$ mit

$$\boldsymbol{B}^* = \{Z \in \boldsymbol{H}_2 \,|\, X \in \boldsymbol{X};\; Y \in \boldsymbol{Y}_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\} \quad [\text{s. } (27)]. \tag{36}$$

b) Ist $M_1 \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ mit $M_1\langle \boldsymbol{N}\rangle \cap \boldsymbol{B}^* \neq \emptyset$, dann gibt es genau ein $M \in \boldsymbol{M}$ mit $M\langle \boldsymbol{N}\rangle = M_1\langle \boldsymbol{N}\rangle$.

Satz 1 besagt nun gerade:

$$\Theta(Z) \Big/ \prod_{M \in \boldsymbol{M}} a(M^{-1}\langle Z\rangle) \neq 0 \quad \text{für} \quad Z \in \boldsymbol{B}^* \quad \text{mit} \quad a(Z) = z_1 - i z_3.$$

Da diese Behauptung außerhalb eines gewissen Kompaktums richtig ist, genügt es nach dem Hilfssatz zu beweisen:

1. $g_1(Z) \neq 0$ für $Z \in \boldsymbol{B}$ und $z_1 = i z_3$ [s. (33)].

2. Mit

$$\Theta^*(Z) = \Theta(Z) \cdot \Theta^{-1}\left(Z; \binom{1}{1}, \binom{1}{1}\right) \tag{37}$$

und

$$\widetilde{\boldsymbol{M}} = \left\{M \in \boldsymbol{M} \,\middle|\, M\langle \boldsymbol{N}\rangle \neq \boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{Bmatrix}\right\} \tag{38}$$

gilt

$$\Theta^*(Z) \Big/ \prod_{M \in \widetilde{\boldsymbol{M}}} a(M^{-1}\langle Z\rangle) \neq 0 \quad \text{für} \quad Z \in \boldsymbol{B}^* \quad \text{und} \quad z_1 = i z_3 \ [\text{s. } (36)].$$

Wir beweisen zunächst die erste Behauptung.

Für $z_1 = i z_2$ gilt

$$|g_s(Z)-4| \leqq \sum_{b_{\mathfrak{g}}>0;\; c_{\mathfrak{g}}>0;\; \mathfrak{g}\notin M_s} e\left(i\,Y\begin{Bmatrix} g_1+\frac{1+i}{2} \\ -g_2-\frac{1+i}{2}\end{Bmatrix} - i\,Y\begin{Bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ -\frac{1+i}{2}\end{Bmatrix}\right)\times$$
$$\times\, b_{\mathfrak{g}} \sum_{0\leqq n<c_{\mathfrak{g}}} e(2n\dot{y}_1).$$

Mit $Y=\tilde{Y}\begin{Bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1+i\end{Bmatrix}$; $\tilde{Y}=\begin{pmatrix}\tilde{y}_0 & \tilde{y}_1\\ \tilde{y}_1 & y_2\end{pmatrix}$ erhält man

$$|g_s(Z)-4| \leqq \sum e\left(i\,\tilde{Y}\begin{Bmatrix}a\\b\end{Bmatrix}+i\,\tilde{Y}\begin{Bmatrix}c\\d\end{Bmatrix}-i\,\tilde{Y}\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}-i\,\tilde{Y}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}+4n\tilde{y}_1\right)\times$$
$$\times(bc-ad).$$

Die Summationsbedingungen lauten

$$a,\,b,\,c,\,d \text{ ganz rational};\qquad a\equiv c\equiv b+d\equiv 1 \bmod 2;$$
$$0\leqq n-ab-cd;\qquad ad<bc.$$

Der Faktor von $2\tilde{y}_1$ im Exponenten berechnet sich zu $ab+cd+1+2n$. Hieraus ist ersichtlich, daß obige Reihe als Funktion von $\tilde{y}_1$ monoton wachsend ist. Ihr Maximum liegt daher bei

$$\tilde{Y}=\frac{1}{8}\sqrt{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Verwendet man $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{Bmatrix}$, so folgt mit Hilfe von

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-4\pi n\tilde{y}_1} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}n} \leqq 1{,}1$$

die Abschätzung

$$|g_s(Z)-4| \leqq 1{,}1 \sum_{\mathfrak{n}} e\left(\frac{i}{8}\sqrt{3}\,E\{\mathfrak{n}\}-2\right)\ (bc-ad).$$

Die Summation über $\mathfrak{n}'=(a,b,c,d)$ unterliegt den Bedingungen $\mathfrak{n}'$ ganz rational $\neq (1,0,0,-1)$, $(0,1,1,0)$, $(0,-1,-1,0)$, $(-1,0,0,1)$; $a+b\equiv c+d\equiv b+d\equiv 1 \pmod 2$;

$$ad<bc,\qquad 0<b^2+d^2-ab-cd.$$

Es zeigt sich nun, daß

$$|g_s(Z)-4| \leqq 1{,}1\sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}n} < 4$$

mit

$$x_n=\sum_{a,b,c,d}(bc-ad)$$

ist, wobei über die ganzen a, b, c, d summiert wird, die den Bedingungen

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4n+2, \quad ad<bc, \quad 0<b^2+d^2-ab-cd,$$
$$a+b\equiv c+d\equiv b+d\equiv 1 \pmod 2$$

genügen. Dabei beachte man

$$x_n \leqq \tfrac{1}{2}(2n+1) \sum_{a^2+b^2+c^2+d^2=4n+2} 1 \leqq 16(n+1)(n+2)(n+3).$$

Es bleibt noch die zweite Behauptung zu beweisen. Wir stützen uns dabei auf das folgende Lemma, dessen Beweis vorerst zurückgestellt wird.

Lemma 1. *$\Theta^*(Z)$ (betrachtet als Funktion auf $\boldsymbol{N}$) verschwindet auf*

$$\boldsymbol{N}^* = \left\{Z\in\boldsymbol{H}_2 \,\middle|\, z_1 = iz_3 = \frac{1+i}{2}\right\} = N\langle\boldsymbol{N}\rangle\cap\boldsymbol{N}; \tag{39}$$
$$N = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{array}\right)$$

in erster Ordnung und jede Nullstelle von $\Theta^*(Z)$ ist einem Punkt in $\boldsymbol{N}^*$ bezüglich

$$\boldsymbol{\Gamma}^* = \{M\in\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}) \,|\, M\langle\boldsymbol{N}\rangle = \boldsymbol{N}\} \tag{40}$$

äquivalent.

Sei $\boldsymbol{M}^*$ ein System von Substitutionen aus $\boldsymbol{\Gamma}^*$ mit den Eigenschaften

a) $M\in\boldsymbol{M}^* \Rightarrow M\langle\boldsymbol{N}^*\rangle\cap\boldsymbol{B}^*\cap\boldsymbol{N}\neq\emptyset$.

b) Ist $M_1\in\boldsymbol{\Gamma}^*$ mit $M_1\langle\boldsymbol{N}^*\rangle\cap\boldsymbol{B}^*\cap\boldsymbol{N}\neq\emptyset$, dann gibt es genau ein $M\in\boldsymbol{M}^*$ mit $M\langle\boldsymbol{N}^*\rangle = M_1\langle\boldsymbol{N}^*\rangle$.

Mit $b(Z) = a(N^{-1}\langle Z\rangle) = -i(z_1+iz_3-1-i)$ folgt aus Lemma 1, daß die holomorphe Funktion

$$\Theta^*(Z)\Big/\prod_{M\in\boldsymbol{M}^*} b(M^{-1}\langle Z\rangle)$$

in $\boldsymbol{B}^*\cap\boldsymbol{N}$ keine Nullstellen hat. Sei nun $M_1, M_2\in\boldsymbol{M}^*$, dann ist $M_1N\langle\boldsymbol{N}\rangle\neq M_2N\langle\boldsymbol{N}\rangle$, es kann also angenommen werden, daß

$$M\in\boldsymbol{M}^* \Rightarrow MN\in\boldsymbol{M}, \quad \text{also} \quad \in\tilde{\boldsymbol{M}} \quad \text{[s. (38)]},$$

daher gilt sicher

$$\Theta^*(Z)\Big/\prod_{M\in\tilde{\boldsymbol{M}}} a(M^{-1}\langle Z\rangle)\neq 0 \quad \text{für} \quad Z\in\boldsymbol{B}^*\cap\boldsymbol{N}.$$

Nun zum Beweis von Lemma 1. Eine Verschärfung hat man in

Lemma 1′. *$\Theta_0^*(Z)$ verschwindet auf $N_0^* = \{Z \in S_2 | z_1 = \frac{1}{2}\}$ in erster Ordnung und jede Nullstelle von $\Theta_0(Z)$ ist einem Punkt aus N_0^* bezüglich Γ äquivalent.*

Dabei sei

$$\Gamma = \left\{M \in \Omega_2 \,\middle|\, M_0 M M_0^{-1} \in \Gamma^*;\ M_0 = \begin{pmatrix} \bar{U}_0 & 0 \\ 0 & U_0^{-1} \end{pmatrix};\ U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}\right\}, \tag{41}$$

$$\Theta_0^*(Z) = \Theta^*(Z)|_1 M_0 \quad \text{für} \quad Z \in S_2. \tag{42}$$

Wie zu Beginn des nächsten Paragraphen gezeigt wird, ist $\Gamma = \Gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, also eine mit Γ_2 kommensurable Gruppe. Es wird sich herausstellen, daß

$$B_0^* = \{Z \in S_2 | -\tfrac{1}{2} \leqq x_0, x_1, 2x_2 \leqq \tfrac{1}{2};\ 0 \leqq 2y_1, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leqq y_0, 2y_2\} \tag{43}$$

einen Fundamentalbereich von Γ enthält. Offenbar ist $\Theta_0^*(Z)$ eine Modulform zu Γ (vom Gewicht 9, zu einem nichttrivialen Multiplikatorsystem), die außerhalb eines gewissen Kompaktums in B_0^* keine außer den in Lemma 1′ aufgeführten Nullstellen hat. Nochmalige Anwendung des im Anhang bewiesenen Hilfssatzes reduziert die Behauptung auf

1. $\Theta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) \neq 0$ für $Z \in B$; $\quad z_1 = i z_3 = \dfrac{1+i}{2}$

2. $\Theta\left(Z; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 0$ und $\Theta\left(Z; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq 0$ in demselben Bereich.

Die erste dieser beiden Behauptungen folgt aus

$$|\Theta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) - 1| \leqq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi y_0 n^2}\right)^2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi y_2 n^2}\right)^2 - 1$$
$$\leqq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\, n^2}\right)^4 - 1 < 1,$$

die zweite aus

$$\left|\Theta\left(Z; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) e\left(-Z\left\{\begin{matrix} 0 \\ \frac{1+i}{2} \end{matrix}\right\}\right) - 4\right|$$
$$\leqq -4 + \sum e^{-\pi\left[y_0|g_1|^2 + y_2\left(\left|g_2 + \frac{1+i}{2}\right|^2 - \frac{1}{2}\right)\right]}$$
$$\leqq -4 + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\, n^2}\right)^2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}\,(n^2+n)}\right)^2 < 4.$$

Damit fehlt zum Beweis von Satz 1 nur noch der Nachweis der Tatsachen, daß $\boldsymbol{\Gamma}$ [s. (41)] mit $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ übereinstimmt und daß $\boldsymbol{B}_0^*$ [s. (43)] einen Fundamentalbereich von $\boldsymbol{\Gamma}$ enthält, was sich im nächsten Paragraphen ergeben wird.

V. Die Siegelsche Stufengruppe $\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Im folgenden sei stets $T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Wir wollen diejenigen Funktionen auf $\boldsymbol{S}_2$ bestimmen, welche sich in der Form

$$f_0(Z)=f\left(Z\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+i\end{Bmatrix}\right) \tag{44}$$

schreiben lassen, wobei f eine symmetrische Hermitesche Modulform (zweiten Grades zum Gaußschen Zahlkörper) sei. Hierzu ist folgende Gruppe von Interesse: [s. (41)]

$$\boldsymbol{\Gamma}=\left\{M\in\boldsymbol{\Omega}_2 \,\middle|\, M_0MM_0^{-1}\in\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K});\, M_0=\begin{pmatrix}\overline{U}_0 & 0\\ 0 & U_0^{-1}\end{pmatrix};\, U_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+i\end{pmatrix}\right\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}'=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & T\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & T\end{pmatrix}=\Big\{M\,\Big|\,M=M^{(4)}\text{ reell};\, M'\begin{pmatrix}0 & T\\ -T & 0\end{pmatrix}M\\ =\begin{pmatrix}0 & T\\ -T & 0\end{pmatrix};\,\begin{pmatrix}\overline{U}_0 & 0\\ 0 & \overline{U}_0\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}\overline{U}_0 & 0\\ 0 & \overline{U}_0\end{pmatrix}^{-1}\text{ganz}\Big\}.\end{aligned}$$

Setzt man

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}d_1 & d_2\\ d_3 & d_4\end{pmatrix},$$

so gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}'=\Big\{M\,\Big|\,M=M^{(4)}\text{ ganz rat.};\, M'\begin{pmatrix}0 & T\\ -T & 0\end{pmatrix}M\\ =\begin{pmatrix}0 & T\\ -T & 0\end{pmatrix};\; a_2\equiv b_2\equiv c_2\equiv d_2\equiv 0 \mod 2\Big\}.\end{aligned}$$

Die Kongruenzbedingung ist automatisch erfüllt, denn

$$M'^{-1}=\begin{pmatrix}0 & T\\ -T & 0\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}0 & T\\ -T & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

ist eine ganze Matrix. Also haben wir bewiesen:

$$\boldsymbol{\Gamma}'=\boldsymbol{\Gamma}_0(T);\qquad \boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Gamma}(T). \tag{45}$$

Die Gruppe $\Gamma(T)$ besitzt in Ω_2 eine Erweiterung vom Index zwei, nämlich

$$\hat{\Gamma}(T) = \Gamma(T) \cup \Gamma(T)\hat{M}; \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{U}' & 0 \\ 0 & \hat{U}^{-1} \end{pmatrix}; \quad \hat{U} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Man sieht leicht, daß $\hat{\Gamma}(T)$ eine Gruppe ist. Es gilt

$$\hat{M}\left\langle\begin{matrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{matrix}\right\rangle = \begin{pmatrix} 2z_2 & z_1 \\ z_1 & \frac{1}{2}z_0 \end{pmatrix}.$$

Beachtet man, daß $Z \to Z\begin{Bmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$ zu $\Gamma_2(K)$ gehört, so resultiert

Lemma 2.

$$f \in [\Gamma_2(K), 4k] \Rightarrow f_0 \in [\hat{\Gamma}(T), 4k] \qquad [\text{s. } (44)].$$

Wir werden die Modulformen zu $\hat{\Gamma}(T)$ bestimmen. Hierbei ist die Gruppe

$$\Gamma_0 = \Gamma(T) \cap \Gamma_2 \tag{47}$$

von Interesse.

Lemma 3.

$$\Gamma(T) = \Gamma_0 \cup \Gamma_0 M_1 \cup \Gamma_0 M_2 = \Gamma_0 \cup M_1 \Gamma_0 \cup M_2 \Gamma_0,$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & T^{-1} \\ -T & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} E & T^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Diese Zerlegung $\Gamma(T)$ in Restklassen nach Γ_0 ist disjunkt.

Beweis. Eine symplektische Matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ liegt genau dann in $\Gamma(T)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 2a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & \frac{1}{2}b_4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 \\ 2c_3 & 2c_4 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 2d_3 & d_4 \end{pmatrix};$$

$$a_i, b_i, c_i, d_i \quad \text{ganz rational für} \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Man beachte

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BT \\ T^{-1}C & T^{-1}DT \end{pmatrix} \in \Gamma_0(T) = \Gamma'.$$

Wir machen drei Fallunterscheidungen.

1. $a_4 \equiv 0 \bmod 2$.

Dann gilt

$$M\begin{pmatrix} 0 & -T^{-1} \\ T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BT & -AT^{-1} \\ DT & -CT^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \quad \text{also} \quad M \in \Gamma_0 M_1;$$

denn AT^{-1} ist ganz rational.

2. $a_4 \equiv b_4 \equiv 1 \bmod 2$

$$M\begin{pmatrix} E & -T^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \quad \text{also} \quad M \in \Gamma_0 M_2; \quad \text{denn} -A\,T^{-1} + B$$

$$= -\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & \frac{1}{2}a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & \frac{1}{2}b_4 \end{pmatrix} \quad \text{ist ganz rational.}$$

3. $b_4 \equiv 0 \bmod 2$.

Dann gilt schon $M \in \Gamma_0$.

Man kann zu jeder Modulform zu Γ_0 mittels Symmetrisierung Modulformen zu $\Gamma(T)$ konstruieren; dies besagt

Lemma 4.

a) $f \in [\Gamma_0, k] \Rightarrow f + f|_k M_1 + f|_k M_2 \in [\Gamma(T), k]$.

b) $f \in [\Gamma_0, k, v] \Rightarrow f \cdot f|_k M_1 \cdot f|_k M_2 \in [\Gamma(T), 3k, \tilde{v}]$.

Jeden Wert, den das Multiplikatorsystem $\tilde{v}$ annimmt, nimmt auch v an.

Beweis. Ist $M \in \Gamma(T)$, so bildet $\{M, M_1 M, M_2 M\}$ wieder ein Vertretersystem der Linksrestklassen von $\Gamma(T)$ nach Γ_0. Es gibt daher $A_i \in \Gamma_0$; $i = 1, 2, 3$, so daß $\{M, M_1 M, M_2 M\} = \{A_1^{-1}, A_2^{-1} M_1, A_3^{-1} M_2\}$ gilt. Die Behauptung des Lemmas ist damit evident, und man sieht, daß

$$\tilde{v}(M) = v(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

Wir konstruieren nun mittels Thetareihen eine Modulform zu Γ_0 vom Gewicht 2. Dazu ist es notwendig, ein wenig genauer das Transformationsverhalten von $\vartheta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ zu studieren. Für die Erzeugenden der Modulgruppe Γ_2 und daher für beliebige $M \in \Gamma_2$ gilt aufgrund unserer Untersuchungen

$$\vartheta^2(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\,|_1 M = \varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(M)\, \vartheta^2(Z; \tilde{\mathfrak{a}}, \tilde{\mathfrak{b}}). \tag{48}$$

Dabei ist $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(M)$ eine vierte Einheitswurzel, deren explizite Berechnung [8] uns nicht weiter interessiert. Die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{\mathfrak{a}} \\ \tilde{\mathfrak{b}} \end{pmatrix}$$

stellt eine Permutation der zehn Werte dar. Wir wollen sie genauer untersuchen und führen hierzu die Bezeichnung

$$(A)_0 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{für} \quad A = A^{(n)} = (a_{ij})$$

ein.

Lemma 5 ([8]).

$$\begin{pmatrix}\tilde{\mathfrak{a}}\\ \tilde{\mathfrak{b}}\end{pmatrix} = M\left\langle\begin{matrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\end{matrix}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} D & -C\\ -B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(C'\,D)_0\\ (A'\,B)_0\end{pmatrix} \bmod 2; \qquad M = \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} \in \boldsymbol{\Gamma}_2.$$

Beweis. Die Behauptung des Lemmas gilt für die Erzeugenden der Modulgruppe $\boldsymbol{\Gamma}_2$, außerdem beweist man leicht

$$(M_1\cdot M_2)\left\langle\begin{matrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\end{matrix}\right\rangle \equiv M_1\left\langle M_2\left\langle\begin{matrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\end{matrix}\right\rangle\right\rangle \bmod 2.$$

Es sei jetzt

$$M = \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix} \in \boldsymbol{\Gamma}_0; \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2\\ d_3 & d_4\end{pmatrix}.$$

Aus dem Beweis zu Lemma 3 ergibt sich mittels einer einfachen Rechnung

$$M\left\langle\begin{matrix}\mathfrak{a}\\ \mathfrak{b}\end{matrix}\right\rangle \equiv \begin{pmatrix} * \\ d_4 a_2\\ * \\ * \end{pmatrix} \bmod 2 \quad \text{für} \quad M \in \boldsymbol{\Gamma}(T). \tag{49}$$

Da die letzte Zeile von M für $M \in \boldsymbol{\Gamma}_0$ nicht lauter gerade Elemente enthalten kann, ist d_4 ungerade, also folgt

$$d_4 a_2 \equiv a_2 \bmod 2 \quad \text{für} \quad M \in \boldsymbol{\Gamma}_0. \tag{50}$$

Das Produkt der vier Thetareihen $\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$; $a_2 = 1$ ist somit eine Modulform zu $\boldsymbol{\Gamma}_0$ vom Gewicht 2. Nach Lemma 4 gibt es ein Multiplikatorsystem v_1, so daß

$$\begin{aligned}\chi(Z) = \prod_{a_2=1} \vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \times \\ \times\Big(\prod_{a_2=1}\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})\Big)\Big|_2 M_1 \cdot \Big(\prod_{a_2=1}\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})\Big)\Big|_2 M_2 \in [\boldsymbol{\Gamma}(T), 6, v_1]\end{aligned} \tag{51}$$

gilt.

Satz 2. $\chi(Z) \in [\boldsymbol{\Gamma}(T), 6, v_1]$ *verschwindet auf der Mannigfaltigkeit*

$$\boldsymbol{N}_0 = \left\{Z \,\middle|\, Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1\\ z_1 & z_2\end{pmatrix} \in \boldsymbol{S}_2;\ z_1 = 0\right\} \tag{52}$$

in dritter Ordnung und jede Nullstelle von $\chi(Z)$ ist einem Punkt aus $\boldsymbol{N}_0$ bezüglich $\boldsymbol{\Gamma}(T)$ äquivalent.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß der Bereich

$$\boldsymbol{B}_0^* = \left\{Z \in \boldsymbol{S}_2 \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \leqq x_0, x_1, 2x_2 \leqq \tfrac{1}{2};\ 0 \leqq 2y_1, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \leqq y_0, 2y_2\right\} \text{ [s. (43)]}$$

einen Fundamentalbereich von $\boldsymbol{\Gamma}(T)$ enthält.

In der Gruppe $\boldsymbol{\Gamma}(T)$ liegen die unimodularen Substitutionen $Z \to Z\{U\} = U'ZU$, $U = \begin{pmatrix} u_0 & u_1\\ 2u_2 & u_3\end{pmatrix}$ unimodular, u_i ganz rational ($i = 1, 2, \ldots, 4$), mit der Wirkung $Y \to Y\{U\}$.

Ein Fundamentalbereich bezüglich dieser Substitutionen wird, wie man leicht der Minkowskischen Reduktionstheorie entnimmt, durch folgende Ungleichungen definiert:

$$0 \leqq 2y_1 \leqq y_0, 2y_2. \tag{53}$$

Wir betrachten jetzt noch die Ungleichungen

$$\|CZ+D\| \geqq 1; \quad M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\Gamma}(T) \quad \text{für} \quad Z=\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{S}_2.$$

Aus ihnen folgt $|cz_0+d| \geqq 1$, $|2cz_2+d| \geqq 1$ für ganz rationale teilerfremde c, d. $\boldsymbol{B}_0^*$ enthält also, wie behauptet, einen Fundamentalbereich von $\boldsymbol{\Gamma}(T)$. Man könnte ohne Zuhilfenahme der Kompaktifizierungstheorie Satz 2 elementar beweisen. Es ist jedoch bequem, Hilfssatz 1 zu benutzen. Wir zeigen daher zunächst, daß $\chi(Z)$ außerhalb eines gewissen Kompaktums in $\boldsymbol{B}_0^*$ keine außer den angegebenen Nullstellen besitzt. Dazu beachten wir zunächst

a) $\lim \left| \vartheta\left(Z; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) e(-z_2) - 2 \right| < 2$ für $Z \in \boldsymbol{B}_0^*$ oder $\in \boldsymbol{B}_0^* + T^{-1}$.

b) $\lim \left| \dfrac{\vartheta\left(Z; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) e\left(-Z\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}\right)}{e(z_1)+(-1)^{\varepsilon}} - 2 \right| < 2$

für $Z \in \boldsymbol{B}_0^*$, $\boldsymbol{B}_0^* + T^{-1}$, $\boldsymbol{B}_0^*\{T\}$.

c) $\lim |\vartheta(Z; \mathfrak{o}, \mathfrak{b}) - 1| < 1$ für $Z \in \boldsymbol{B}_0^*\{T\}$,

wobei jeweils die Grenzübergänge

$$y_0 \text{ und } y_2 \to \infty; \quad y_0 \to \infty \,(y_1, y_2 \text{ fest}); \quad y_2 \to \infty \,(y_1, y_2 \text{ fest})$$

zu vollziehen sind. Jetzt beachten wir noch, daß $\vartheta(-Z^{-1}\{T^{-1}\}; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bis auf einen trivialen Faktor mit $\vartheta(Z\{T\}; \mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ übereinstimmt; daher verschwindet $\vartheta\left(Z; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)(e(z_2-z_1)-1)^{-1}$ außerhalb eines Kompaktums in $\boldsymbol{B}_0^*\{T\}$ nicht, wie man etwa der Formel

$$\Theta\left(Z\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{matrix}\right\}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \vartheta\left(Z; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \vartheta\left(Z; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{o}\right) \quad (Z \in \boldsymbol{S}_2)$$

und den Nullstellenuntersuchungen von $\Theta(Z)$ entnimmt. Jetzt ist klar, daß $\chi(Z)$ außerhalb eines Kompaktums in $\boldsymbol{B}_0^*$ nur die angegebenen Nullstellen hat, und man hat im Hinblick auf Hilfssatz 1 nun noch $\chi(Z)$ nach Ausdividieren der Nullstellen $z_1=0$ auf dieser

Mannigfaltigkeit zu untersuchen. Zunächst ist

$$\vartheta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \neq 0 \quad \text{für} \quad Z \in \boldsymbol{N}_0 \;\; [\text{s.}\,(52)] \quad \text{und} \quad \binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} \in \left\{ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\},$$

da die elliptischen Thetareihen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}; \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+\frac{1}{2})^2 z}; \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z + \pi i n}$$

bekanntlich keine Nullstellen haben. (Die achte Potenz ihres Produkts ist eine Spitzenform vom Gewicht 12!) Zum Beweis von Satz 2 braucht man daher nur noch

$$\left| \frac{\vartheta\left(Z; \binom{1}{1}, \varepsilon \binom{1}{1}\right) e\left(-Z\left\{\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right\}\right)}{2\left(e(z_1) + (-1)^{\varepsilon}\right)} - 1 \right| \leqq$$

$$-1 + \sum_{g_1 \geqq 0,\, g_2 \geqq 0} e^{-\pi g_1(g_1+1)\, y_0 - \pi g_2 (g_2+1) y_2} (2g_1+1)(2g_2+1) < 1$$

für $Z \in \boldsymbol{B}_0^*$; $Z \in \boldsymbol{B}_0^* + T^{-1}$; $Z \in \boldsymbol{B}_0^*\{T\}$ zu beachten.

VI. Modulformen und -funktionen zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ und $\boldsymbol{\Gamma}(T)$

Wir bringen $\chi(Z)$ mit einer gewissen Hermiteschen Modulform vom Gewicht 8 in Verbindung. Allgemein sei

$$\varphi_{4k}(Z) = \sum \Theta^{4k}(Z;\mathfrak{b},\mathfrak{a}); \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{54}$$

Dabei werde über alle zehn Thetareihen summiert. Offensichtlich gilt

$$\varphi_{4k}(Z) \in [\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}), 4k]; \qquad \varphi_{4k}(Z) = \varphi_{4k}(Z') \not\equiv 0.$$

Da zwei Siegelsche Modulformen aus $[\boldsymbol{\Gamma}_2, 8]$ stets linear abhängig sind, verschwindet $4\varphi_8 - \varphi_4^2$ für symmetrische Z. Durch Berechnung eines Fourier-Koeffizienten kann gezeigt werden, daß diese Funktion nicht identisch verschwindet. Bekanntlich gilt eine Entwicklung der Art

$$(4\varphi_8 - \varphi_4^2)(Z) = \sum c(T)\, e^{2\pi i \sigma(TZ)},$$

wobei über alle Hermiteschen halbganzen T summiert wird. Eine elementare Rechnung ergibt

$$c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2^{16} \cdot 3.$$

Die Funktion

$$f_8(Z) = 4\varphi_8\left(Z\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{matrix}\right\}\right) - \varphi_4^2\left(Z\left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+i \end{matrix}\right\}\right); \; Z \in \boldsymbol{S}_2 \tag{55}$$

ist eine nicht identisch verschwindende Modulform zu $\hat{\Gamma}(T)$ vom Gewicht 8. Würde sie nämlich identisch verschwinden, so wäre $4\varphi_8 - \varphi_4^2$ nach Satz 1 durch Θ teilbar. Die Form f_8 verschwindet auf N_0 [s. (52)] in mindestens vierter Ordnung, denn $4\varphi_8 - \varphi_4^2$ ist bei den Transformationen $Z \to Z'$ und $Z \to Z\left\{\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right\}$ invariant. Nach Satz 2 ist daher $\chi^{-4} f_8^3$ eine holomorphe Modulfunktion, also

$$f_8^3 = c\chi^4; \qquad c \neq 0.$$

Daher ist χ sogar eine Modulform zur erweiterten Gruppe $\hat{\Gamma}(T)$ und dritte Potenz einer Modulform vom Gewicht 2, nämlich $c^{\frac{1}{3}}\chi^{-1} f_8$.

Wir interessieren uns für das Quadrat dieser Form. Nach Satz 2 gilt

Satz 2'. *Die Form*

$$h_4 = \chi^{\frac{2}{3}} \in \left[\hat{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, 4, v_0\right]$$

verschwindet auf N_0 in zweiter Ordnung, und jede Nullstelle von h_4 ist einem Punkt in N_0 äquivalent.

Das Multiplikatorsystem v_0 kann leicht bestimmt werden. Wir bemerken zunächst, daß die Form

$$\begin{aligned}\psi(Z) = &\Big(\prod_{a_2=0} \vartheta^2(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\Big) \times \\ &\times \Big(\prod_{a_2=0} \vartheta^2(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\Big)\Big|_3 M_1 \cdot \Big(\prod_{a_1=0} \vartheta^2(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\Big)\Big|_3 M_2\end{aligned} \tag{56}$$

nach Lemma 4 eine Modulform vom Gewicht 18 zu $\Gamma(T)$ darstellt. Da $\vartheta^2(Z) \cdot \vartheta^2(Z)\,|_{10} M_1 \cdot \vartheta^2(Z)\,|_{10} M_2$ eine Modulform zu $\Gamma(T)$ zum trivialen Multiplikatorsystem darstellt, stimmt das Multiplikatorsystem von $\psi(Z)$ mit der Beschränkung von v_0 auf $\Gamma(T)$ überein. Andererseits stellt auch $(\Theta_0^*)^2$ [s. (42)] eine Modulform zu $\Gamma(T)$ vom Gewicht 18 dar. Man kann leicht nachrechnen, daß $(\Theta_0^*)^2$ und ψ übereinstimmen. Dies folgt aber auch aus der Tatsache, daß $\psi(Z)$ auf $N^* = \{Z \in S_2 \,|\, z_1 = \frac{1}{2}\}$ verschwindet und daher (Lemma 1') durch $(\Theta_0^*)^2$ teilbar ist. Wir erhalten somit aufgrund der für $\Theta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bewiesenen Transformationsformeln

$$v_0(M) = \begin{cases} 1 \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix}U' & 0\\ 0 & U^{-1}\end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix}0 & T^{-1}\\ -T & 0\end{pmatrix}, \\ (-1)^{s_0 + 2s_1} \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix}E & S\\ 0 & E\end{pmatrix} \in \hat{\Gamma}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix}s_0 & s_1\\ s_1 & s_2\end{pmatrix}. \end{cases} \tag{57}$$

Es sei f eine auf S_2 definierte Funktion. Wir setzen

$$\check{f}(z_0, z_2) = f\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}z_2 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad (z_0, z_2) \in S_1 \times S_1. \tag{58}$$

Die Bedeutung dieser Bezeichnung zeigt sich in

Lemma 6. *Es sei* $f \in [\hat{\Gamma}(T), 2k]$ *bzw.* $\in [\hat{\Gamma}(T), 2k, v_0]$. *Dann gilt*

a) $\check{f}(z_0, z_2) = \check{f}(z_2, z_0)$.

b) $g(z) = f(z, z_2) \in [\Gamma_1, 2k]$ *bzw.* $\in [\Gamma_1, 2k, \tilde{v}]$ $(z_2$ *fest*$)$.

Dabei ist $\tilde{v}$ *das einzige nichttriviale Multiplikatorsystem von* Γ_1 *mit* $\tilde{v}^2 = 1$.

Da die elliptischen Modulformen zum trivialen Multiplikatorsystem von den Eisensteinreihen g_2 und g_3 erzeugt werden und da sich jede Modulform zu $\tilde{v}$ in der Form $\Delta^{\frac{1}{2}}(z)\, g(z)$ mit einer elliptischen Modulform g zum trivialen Multiplikatorsystem darstellen läßt, folgt (s. [4], § 3)

Lemma 7. *Es sei* $f \in [\hat{\Gamma}(T), 2k]$ *bzw.* $\in [\hat{\Gamma}(T), 2k, v_0]$. *Dann ist*

$$\check{f}(z_0, z_2) \quad \textit{bzw.} \quad \Delta^{-\frac{1}{2}}(z_0)\, \Delta^{-\frac{1}{2}}(z_2)\, \check{f}(z_0, z_2)$$

als isobares Polynom in

$$g_2(z_0)\, g_2(z_2); \quad g_3(z_0)\, g_3(z_2); \quad \Delta(z_0)\, \Delta(z_2)$$

darstellbar.

(Abweichend von [4] wurde $g_3^2(z_0)\, g_2^3(z_2) + g_3^2(z_2)\, g_2^3(z_0)$ durch die etwas handlichere Funktion $\Delta(z_0)\Delta(z_2)$ ersetzt.)

Wir sind nun in der Lage, alle Modulformen geraden Gewichts zu $\hat{\Gamma}(T)$ zum trivialen Multiplikatorsystem und zu v_0 zu bestimmen. Wir setzen zunächst die noch zu beweisende Existenz dreier Modulformen mit folgenden Eigenschaften voraus:

$$f_\nu \in [\hat{\Gamma}(T), \nu]; \qquad \nu = 4, 6, 10.$$

1. $f_4, f_6 \not\equiv 0$.

2. $f_{10} \not\equiv c f_4 f_6$; $\quad c = \text{const}$.

Nach Lemma 7 gilt dann

$$\begin{aligned} &\check{f}_4(z_0, z_2) = c_1 g_2(z_0)\, g_2(z_2); \qquad \check{f}_6(z_0, z_2) = c_2 g_3(z_0)\, g_3(z_2); \\ &\check{f}_{10}(z_0, z_2) = c_3 g_2(z_0)\, g_2(z_2)\, g_3(z_0)\, g_3(z_2). \end{aligned} \tag{59}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 müssen beide von Null verschieden sein. Das folgt unmittelbar aus folgender Bemerkung, die wir noch mehrmals benutzen werden. Es sei

$$f \in [\hat{\Gamma}(T), 2k] \quad \text{bzw.} \quad \in [\hat{\Gamma}(T), 2k, v_0] \quad \text{und} \quad \check{f} = 0.$$

Da $Z \to Z \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Bmatrix}$ in $\hat{\Gamma}(T)$ liegt, verschwindet f auf der Mannigfaltigkeit N_0 in mindestens *zweiter* Ordnung. Nach Satz 2′ gilt somit

$$f \cdot h_4^{-1} \in [\hat{\Gamma}(T), 2k-4, v_0] \quad \text{bzw.} \quad \in [\hat{\Gamma}(T), 2k-4].$$

Da c_1 und c_2 von Null verschieden sind, gibt es eine Konstante c mit

$$\check{f}_{10} - c \check{f}_4 \check{f}_6 = 0.$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß schon $\check{f}_{10}$ identisch verschwindet. Es gilt dann

$$h_6 = f_{10} \cdot h_4^{-1} \in [\hat{\Gamma}(T), 6, v_0]; \quad \check{h}_6(z_0, z_2) = c_4\, \Delta^{\frac14}(z_0)\, \Delta^{\frac14}(z_2) \tag{60}$$

(Lemma 7).

Die Konstante c_4 muß aufgrund obiger Bemerkung von Null verschieden sein. Wir gelangen damit zu

Satz 3. (1) *Jede Modulform geraden Gewichts zu* $\hat{\Gamma}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *zum trivialen Multiplikatorsystem ist als isobares Polynom in den speziellen Modulformen vom Gewicht* 4, 6, 8, 10, 12

$$f_4;\ f_6;\ h_4^2;\ h_4 h_6;\ h_6^2$$

darstellbar.

(2) *Ist* $f \in [\hat{\Gamma}(T), 2k, v_0]$, *so gilt eine Relation der Art*

$$f = p_1 h_4 + p_2 h_6; \quad p_i \in [\hat{\Gamma}(T), 2k - \nu_i]; \quad \nu_1 = 4, \quad \nu_2 = 6.$$

Beweis. Eine gegebene Modulform kann nach Lemma 7 mit den speziellen Modulformen so reduziert werden, daß sie auf N_0 verschwindet. Man teile sie dann durch h_4 und schließe mit Induktion.

Jede Modulfunktion zu $\hat{\Gamma}(T)$ ist bekanntlich als Quotient zweier Modulformen gleichen Gewichts, also als isobare rationale Funktion in den Modulformen

$$f_4;\ f_6;\ h_4 h_6;\ h_6^2 \quad \text{(man beachte } h_4^2 = (h_4 h_6)^2 h_6^{-2}\text{)}$$

darstellbar. Hieraus folgt (vgl. [4])

Satz 4. *Die Modulfunktionen zu* $\hat{\Gamma}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *bilden einen rationalen Funktionenkörper mit den Erzeugenden*

$$\frac{f_4 f_6}{h_4 h_6};\quad \frac{f_6^2}{h_6^2};\quad \frac{f_4^5}{h_4^2 h_6^2}.$$

Wir konstruieren nun die Formen f_4, f_6, f_{10}. Es sei $f \in [\Gamma_0, k]$. Dann ist nach Lemma 4

$$\tilde{f} = f + f|M_1 + f|M_2 \in [\Gamma(T), k] \tag{61}$$

und offensichtlich

$$f^* = \tilde{f} + \tilde{f}\,|\,\hat{M} \in [\hat{\Gamma}(T), k]. \tag{62}$$

Ist sogar $f \in [\Gamma_2, 2k]$, so gilt

$$\tilde{f}(Z) = f(Z) + 2^{2k} f(Z\{T\}) + f(Z + T^{-1}).$$

Bekanntlich besitzt f eine Fourier-Entwicklung der Art [12]

$$f(Z) = \sum_H a(H)\, e^{2\pi i \sigma(HZ)} \quad (\sigma = \text{Spur}).$$

Dabei wird über alle halbganzen $H = \begin{pmatrix} h_0 & \frac{1}{2}h_1 \\ \frac{1}{2}h_1 & h_2 \end{pmatrix} \geqq 0$ (h_i ganz rational) summiert. Definiert man

$$a(H) = 0,$$

falls H nicht halbganz, so folgt

$$\tilde{f}(Z) = \sum_H \tilde{a}(H)\, e^{2\pi i \sigma(HZ)};$$

$$\tilde{a}(H) = 2a(H) + 2^{2k} a(H\{T^{-1}\}).$$

Dabei wird nur noch über alle H summiert mit $h_2 \equiv 0 \bmod 2$. Ebenso gilt

$$f^*(Z) = \sum_H a^*(H)\, e^{2\pi i \sigma(HZ)};$$

$$a^*\begin{pmatrix} h_0 & \frac{1}{2}h_1 \\ \frac{1}{2}h_1 & h_2 \end{pmatrix} = \tilde{a}\begin{pmatrix} h_0 & \frac{1}{2}h_1 \\ \frac{1}{2}h_1 & h_2 \end{pmatrix} + \tilde{a}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}h_2 & \frac{1}{2}h_1 \\ \frac{1}{2}h_1 & 2h_0 \end{pmatrix} \quad (h_2 \equiv 0 \bmod 2),$$

also z.B.

$$a^*(0) = (4 + 2^{2k+1})\, a(0),$$

$$a^*\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{beachte } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left\{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Man setze jetzt

$$f_4 = G_4^*; \quad f_6 = G_6^*; \quad f_{10} = (\vartheta^2)^* \quad (\text{Definition von } G_k, \text{ s. [12]}). \tag{63}$$

Offensichtlich verschwindet f_{10} auf N_0, ist aber nicht identisch 0; denn der Fourier-Koeffizient zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von ϑ^2 ist von Null verschieden, wie eine direkte Rechnung zeigt. Dies zeigt auch ein Blick auf eine von IGUSA angegebene Tabelle [7] über einige Werte der Fourier-Koeffizienten einiger Eisensteinreihen, denn es gilt [4]

$$\vartheta^2 = c(G_{10} - G_4 G_6) \qquad (c \neq 0).$$

Damit sind Satz 3 und Satz 4 vollständig bewiesen. Wir bestimmen nun die symmetrischen Modulformen zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$. Eine solche Form f, deren Gewicht nicht durch vier teilbar ist, verschwindet auf $\boldsymbol{N}$ [s. (35)], denn es gilt

$$f\left(Z'\begin{Bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{Bmatrix}\right) = i^k f(Z).$$

Dann ist aber $f(Z)$ durch $\Theta(Z)$ nach Satz 1 teilbar. Es genügt daher, diejenigen Modulformen zu bestimmen, deren Gewicht durch vier teilbar ist. Wir konstruieren sie durch Thetareihen. Wir setzen zunächst die Siegelschen Modulformen zweiten Grades (zu $\boldsymbol{\Gamma}_2$) zu Hermiteschen Modulformen fort. Nach dem Satze von IGUSA werden sie von Formen vom Gewicht 4, 6, 10, 12 erzeugt, die IGUSA in [9] mit Thetareihen wie folgt konstruierte.

1. $\sum \vartheta^8(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.
2. $\sum \pm \prod\limits_{i=1}^{3} \vartheta^4(Z; \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i)$.

Dabei wird über die sechzig sog. syzygischen Tripel mit abwechselnden Vorzeichen summiert. Ein Tripel heißt syzygisch, wenn

$$e(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1; \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2)\, e(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2; \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3)\, e(\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3; \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1) = 1$$

mit $\qquad e(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i; \mathfrak{a}_j, \mathfrak{b}_j) = (-1)^{\mathfrak{a}_i' \mathfrak{b}_j - \mathfrak{a}_j' \mathfrak{b}_i}$ gilt.

3. $\vartheta^2(Z)$.
4. $\sum \vartheta^{24}(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Diese vier Formen erzeugen sämtliche Siegelsche Modulformen zweiten Grades (geraden Gewichts zum trivialen Multiplikatorsystem). Sie lassen sich leicht zu Hermiteschen Modulformen fortsetzen:

1. $\varphi_4(Z) = \sum \Theta^4(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.
2. $\eta_6(Z) = \sum \pm \prod\limits_{i=1}^{3} \Theta^2(Z; \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i)$.
3. $\Theta(Z) = \prod \Theta(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.
4. $\varphi_{12}(Z) = \sum \Theta^{12}(Z; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Alle vier Formen stellen symmetrische Modulformen zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ dar. η_6 ist allerdings eine Form zu einem nicht trivialen Multiplikatorsystem v, denn es gilt

$$\eta_6\left(Z\left\{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & i\end{matrix}\right\}\right)=\eta_6(Z) \Rightarrow v\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & i\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{matrix}\end{array}\right)=-1.$$

Bemerkung. Da sich auch die Modulform „azy“ (s. [*9*]) *zu einer Hermiteschen Modulform fortsetzen läßt, kann man die Charaktere von $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ vollständig bestimmen. Die Charaktergruppe von $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ ist isomorph $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.*

Wir gehen hierauf nicht näher ein.

Die Modulformen

$$\varphi_4;\ \eta_6;\ \varphi_8;\ \Theta;\ \varphi_{12}$$

sind algebraisch unabhängig, denn φ_4; η_6; Θ; φ_{12} sind schon auf $\boldsymbol{S}_2$ algebraisch unabhängig und $4\varphi_8-\varphi_4^2$ verschwindet auf $\boldsymbol{S}_2$. Es gilt daher

a) $f_4=c_1(\varphi_4)_0$.

b) $f_6=c_2(\eta_6)_0$.

c) $h_4^2=c_3(4\varphi_8-\varphi_4^2)_0$.

d) $h_6^2=\big(c_4\varphi_{12}+P(\varphi_4;\eta_6;\varphi_8)\big)_0$; P isobares Polynom $(c_4\neq 0)$.

Nach Satz 3 erzeugen f_4; f_6; h_4^2; h_6^2; $h_4h_6f_6$ alle Modulformen zu $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(T)$ zum trivialen Multiplikatorsystem, deren Gewicht durch vier teilbar ist. Wir setzen sie zu Hermiteschen Modulformen fort. Hierzu fehlt noch eine symmetrische Modulform $\varphi\in[\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}),16]$ mit der Eigenschaft

$$\varphi_0=h_4\,h_6\,f_6. \tag{65}$$

Es genügt eine Form φ zu konstruieren, so daß

$$\varphi;\ \varphi_4^4;\ \eta_6^2\,\varphi_4;\ \varphi_{12}\varphi_4;\ \varphi_8^2;\ \varphi_8\,\varphi_4^2$$

linear unabhängig sind. Dann sind nämlich auch

$$\varphi_0;\ (\varphi_4^4)_0;\ (\eta_6^2\varphi_4)_0;\ (\varphi_{12}\varphi_4)_0;\ (\varphi_8^2)_0;\ (\varphi_8\varphi_4^2)_0 \tag{66}$$

linear unabhängig, da eine symmetrische Modulform $f\in[\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}),4k]$; $k<5$ genau dann identisch verschwindet, wenn f_0 identisch verschwindet. Die lineare Unabhängigkeit der Formen (66) ist natürlich gesichert, wenn die Beschränkungen von

$$\varphi;\ \varphi_4^4;\ \eta_6^2;\ \varphi_{12}\varphi_4 \tag{67}$$

auf $\boldsymbol{S}_2$ linear unabhängig sind. Wir setzen φ_4; η_6; φ_{12} mit Eisensteinreihen in Verbindung. Es gilt $\varphi_4(Z)=c_1G_4(Z)$; $\eta_6(Z)=c_2G_6(Z)$; $\varphi_{12}(Z)=c_3G_{12}(Z)+c_4G_6^2(Z)+c_5G_4^3(Z)$; $(Z\in\boldsymbol{S}_2)$ mit von Null verschiedenen Konstanten $c_1,\ldots,c_5$ (s. [9]). Wir haben also $\varphi\in[\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}),16]$ so zu konstruieren, daß

$$\varphi(Z);\; G_4^4(Z);\; G_4\,G_6^2(Z);\; G_{12}(Z);\quad (Z\in\boldsymbol{S}_2)$$

linear unabhängige Funktionen sind. Es bietet sich etwa

$$\varphi(Z)=\varphi_{16}(Z)=\sum\Theta^{16}(Z;\,\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

an. Die lineare Unabhängigkeit kann durch Berechnung der Fourier-Koeffizienten zu

$$T=0;\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix} \tag{68}$$

bewiesen werden. Für die numerische Rechnung kann man auf die schon erwähnte Tabelle von Igusa [7] zurückgreifen. Das ist der einzige Grund, weshalb wir zu Eisensteinreihen übergegangen sind. Wir gelangen zu

Satz 5. *Jede symmetrische Modulform zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ zum trivialen Multiplikatorsystem ist als isobares Polynom in den Formen vom Gewicht* 4, 8, 10, 12, 12, 16

$$\varphi_4;\; \varphi_8;\; \Theta;\; \eta_6^2;\; \varphi_{12};\; \varphi_{16}$$

darstellbar. Sie sind alle in der von den Thetareihen $\Theta(Z;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ erzeugten $\boldsymbol{C}$-Algebra enthalten.

Diese Modulformen sind nicht algebraisch unabhängig, denn es gilt mit gewissen isobaren Polynomen P_1, P_2

$$\begin{aligned}
\big(\varphi_{16}+P_1(\varphi_4,\varphi_8,\eta_6^2,\varphi_{12})\big)_0 &= c_1h_4h_6f_6; && c_1\neq 0,\\
(4\varphi_8-\varphi_4^2)_0 &= c_2h_4^2; && c_2\neq 0,\\
\big(\varphi_{12}+P_2(\varphi_4,\varphi_8,\eta_6^2)\big)_0 &= c_3h_6^2; && c_3\neq 0.
\end{aligned}$$

Also verschwindet

$$\chi=\varphi_{16}+P_1(\varphi_4,\varphi_8,\eta_6^2,\varphi_{12})-c(4\varphi_8-\varphi_4^2)\big(\varphi_{12}+P_2(\varphi_4,\varphi_8,\eta_6^2)\big);$$
$$c=\frac{c_2\cdot c_3}{c_1}$$

auf $\boldsymbol{N}$ [s. (35)]. Die Form χ verschwindet aber nicht identisch, wie man durch Einschränkung auf $\boldsymbol{S}_2$ sieht. ($\varphi_{16}(Z)$; $\varphi_4^4(Z)$; $\varphi_4\eta_6^2(Z)$; $\varphi_4\,\varphi_{12}(Z)$ sind linear unabhängig!)

Es gibt also isobare Polynome P_3, P_4, so daß

$$\chi = \Theta^2 \cdot P_3(\varphi_4, \varphi_8, \eta_6^2, \varphi_{12}); \qquad \Theta^2 = \frac{P_4(\varphi_4, \varphi_8, \eta_6^2, \varphi_{12}, \varphi_{16})}{P_3(\varphi_4, \varphi_8, \eta_6^2, \varphi_{12})} \tag{69}$$

gilt. Hieraus folgt

Satz 6. *Die symmetrischen Modulfunktionen zu $\Gamma_2(K)$ bilden einen rationalen Funktionenkörper, der von*

$$\frac{\varphi_8}{\varphi_4^2}; \quad \frac{\eta_6^2}{\varphi_4^3}; \quad \frac{\varphi_{12}}{\varphi_4^3}; \quad \frac{\varphi_{16}}{\varphi_4^4}$$

erzeugt wird.

VII. Anhang

1. Geringte Räume

Sei X ein topologischer Raum.

Definition A1. *Eine Garbe $\mathcal{O}_X$ von komplexwertigen Funktionen auf X ist eine Abbildung, die jeder offenen Menge U in X einen Unterring $\mathcal{O}_X(U)$ des Ringes der stetigen komplexwertigen Funktionen — die sog. holomorphen Funktionen — zuordnet mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Seien $U \supset V$ offen; $f \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow f | V \in \mathcal{O}_X(V)$.*
2. *Sei $U = \bigcup_i U_i$; U_i offen, f eine Funktion auf U, so daß*

$$f | U_i \in \mathcal{O}_X(U) \Rightarrow f \in \mathcal{O}_X(U).$$

Beispiel: $X = \mathbf{C}^n$; $\mathcal{O}_X(U) = \{$*f im üblichen Sinne holomorphe Funktionen auf U*$\}$.

Man nennt $\mathcal{O}_X$ die analytische Struktur des $\mathbf{C}^n$.

Das Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt geringter Raum. Wenn kein Zweifel über die geringte Struktur besteht, schreibt man statt $(X, \mathcal{O}_X)$ einfach X. Sei Y ein Teilraum von X (mit der induzierten Topologie versehen). Dann kann man die „induzierte" geringte Struktur $\mathcal{O}_X | Y$ definieren. Eine auf der offenen Menge $U \subset Y$ definierte komplexwertige Funktion f heiße holomorph, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung U_x in X und eine (bezüglich $\mathcal{O}_X$) holomorphe Funktion f_x auf U_x gibt, so daß

$$f | U \cap U_x = f_x | U \cap U_x$$

gilt. Wenn Y offen in X ist, dann ist U auch in X offen, und es gilt

$$\mathcal{O}_X | Y(U) = \mathcal{O}_X(U).$$

Definition A2. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$; $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zwei geringte Räume. Eine stetige Abbildung $f: X \to Y$ heißt holomorph, wenn für alle offenen $U \subset Y$ und alle $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt:*

$$g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$

Wie üblich heißen die beiden geringten Räume $(X, \mathcal{O}_X)$; $(Y, \mathcal{O}_Y)$ isomorph, wenn es holomorphe Abbildungen $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ gibt, mit

$$g \circ f = id_X; \qquad f \circ g = id_Y.$$

2. Komplexe Räume

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Ein in U abgeschlossener Teil $X \subset U$ heißt analytische Menge, wenn es zu jedem $x \in X$ eine (in U) offene Umgebung $V_x \subset U$ gibt, sowie in V_x holomorphe Funktionen

$$f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(V_x) \quad \text{mit} \quad X \cap V_x = \{y \in V_x \mid f_1(y) = \cdots = f_m(y) = 0\}.$$

Definition A3. *Ein komplexer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein geringter Raum, der eine Überdeckung durch offene Mengen U_i besitzt, so daß $(U_i, \mathcal{O}_X | U_i)$ einer analytischen Menge, versehen mit der von der analytischen Struktur des $\mathbb{C}^n$ induzierten Struktur, isomorph ist.*

Sei $Y \subset X$. Im allgemeinen ist Y (mit der induzierten Struktur versehen) kein komplexer Raum, aber in folgenden beiden Spezialfällen.

1. Y ist offen in X.

2. Y ist ein abgeschlossener analytischer Teilraum von X, d.h.: Y ist abgeschlossen in X, und zu jedem $y \in Y$ gibt es eine offene Umgebung U_y in X und holomorphe Funktionen

$$f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_X(U_y),$$

so daß gilt:

$$Y \cap U_y = \{x \in U_y \mid f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}.$$

(Eine analytische Menge in $U \subset \mathbb{C}^n$ ist also nichts anderes als ein abgeschlossener analytischer Teilraum von U.)

Tiefergehende Ergebnisse erhält man nur unter Zusatzvoraussetzungen an die Topologie von X, die im folgenden stets erfüllt seien.

1. X separiert.
2. X abzählbar im Unendlichen, d.h.: $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, $K_1, K_2, \ldots$ kompakt in X.

Definition A 4. *Sei X ein komplexer Raum. Eine Karte auf X ist*

a) eine offene Menge $U \subset X$;

b) ein analytischer Isomorphismus $\varphi: U \to U_0$, wobei U_0 eine offene Menge in $\mathbb{C}^n$ ist.

Ein Punkt $x \in X$ heißt uniformisierbar, wenn er in einer Karte enthalten ist. Ein komplexer Raum heißt analytische Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt uniformisierbar ist.

Satz A 1. *Sei X ein komplexer Raum. Der singuläre Ort S von X, d.h. die Menge der nicht uniformisierbaren Punkte bildet einen in X dünnen abgeschlossenen analytischen Teilraum.*

Unter der Dimension von X versteht man die Dimension der analytischen Mannigfaltigkeit $X - S$, genauer die maximale Dimension ihrer Zusammenhangskomponenten.

Sei x ein Punkt des komplexen Raumes X. Gewisse lokale Eigenschaften von X in x spiegeln sich in algebraischen Eigenschaften des folgenden Ringes wider.

$$\mathcal{O}_x = \{\text{in } x \text{ holomorphe Funktionen}\}.$$

(Eine Funktion heißt in x holomorph, wenn sie in einer offenen Menge $U \ni x$ definiert und holomorph ist. Zwei in x holomorphe Funktionen werden dabei identifiziert, wenn sie in einer Umgebung von x übereinstimmen.)

Satz A 2. *Sei X ein kompakter komplexer Raum. Jede absteigende Folge $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ von analytischen Teilräumen (abgeschlossenen) bricht ab.*

Definition A 5. *Ein komplexer Raum X heißt normal, wenn der Ring $\mathcal{O}_x$ für alle $x \in X$ normal ist.*

Bemerkung. Ein Ring R heißt normal, wenn gilt:

a) R ist Integritätsbereich.

b) Ist $x \in$ Quotientenkörper (R) ein ganzes Element über R, also Nullstelle eines Polynoms aus $R[X]$ mit höchstem Koeffizienten 1, so ist $x \in R$.

Satz A 3. *Die Kodimension des singulären Ortes S eines normalen komplexen Raumes X ist größer als eins.*

$$\operatorname{codim} S = \dim X - \dim S \geqq 2.$$

Folgerung. Ein normaler zusammenhängender komplexer Raum der Dimension 1 ist eine Riemannsche Fläche.

Sei X ein komplexer Raum, Γ eine diskontinuierliche Gruppe von analytischen Automorphismen von X. Sei X/Γ der Faktorraum, $p: X \to X/\Gamma$ die natürliche Projektion. Eine Menge $U \subset X/\Gamma$ ist definitionsgemäß genau dann offen, wenn $p^{-1}(U)$ offen ist. Auf X/Γ führt man eine geringte Struktur ein. Eine stetige Funktion f auf der offenen Menge $U \subset X/\Gamma$ heiße holomorph, wenn $f \circ p$ auf $p^{-1}(U)$ holomorph ist.

Satz A 4. *Unter den vorstehenden Voraussetzungen ist X/Γ wieder ein komplexer Raum und sogar normal, wenn X es ist.*

Für die Kompaktifizierungstheorie ist ein Fortsetzungssatz für komplexe Strukturen von Baily-Cartan von Bedeutung. Sei X ein lokal kompakter, im Unendlichen abzählbarer topologischer Raum. V sei ein zusammenhängender offener dichter Teil von X. Auf V sei die Struktur eines normalen komplexen Raumes definiert. Auf X ist folgende geringte Struktur $\mathcal{O}_X$ von Interesse. Sei $U \subset X$ offen. Eine auf U definierte komplexwertige Funktion gehöre genau dann zu $\mathcal{O}_X(U)$, wenn gilt:

a) f stetig.

b) $f \mid V \cap U$ holomorph.

Satz A 5. *Unter obigen Voraussetzungen ist $(X, \mathcal{O}_X)$ genau dann ein normaler komplexer Raum und $W = X - V$ ein abgeschlossener analytischer Teilraum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.*

(1) Jeder Punkt $x \in W$ besitzt ein Fundamentalsystem von offenen Umgebungen U in X, so daß $U \cap V$ zusammenhängend ist.

(2) Die durch X auf W induzierte geringte Struktur macht W zu einem komplexen Raum echt kleinerer Dimension als V.

(3) Jeder Punkt $x \in W$ besitzt eine offene Umgebung U in X, so daß die in U holomorphen Funktionen die Punkte von $V \cap U$ trennen, d.h.: Seien a, b zwei verschiedene Punkte $\in V \cap U$, dann gibt es $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $f(a) = 0$; $f(b) \neq 0$.

Spezielle komplexe Räume hat man in über $\boldsymbol{C}$ definierten algebraischen Mannigfaltigkeiten. Es gibt ein wichtiges Kriterium dafür, wann ein komplexer Raum algebraisch ist.

Satz A 6 (Chow). *Jeder abgeschlossene analytische Teilraum X des projektiven Raumes $P^n \boldsymbol{C}$ ist algebraisch, d.h., es gibt homogene Polynome $P_1, \ldots, P_m \in \boldsymbol{C}[X_0, \ldots, X_n]$, so daß*

$$X = \{x \in P^n \boldsymbol{C} \mid P_1(x) = \cdots = P_m(x) = 0\} \quad \textit{gilt.}$$

Bemerkung. Der projektive Raum $P^n C$ besteht aus allen $n+1$-Tupeln $x=(x_0, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, wobei zwei solche identifiziert werden, wenn sie sich um einen (von Null verschiedenen) Faktor unterscheiden. Sei

$$P_i^n C = \{x \in P^n C \mid x_i \neq 0\}.$$

Durch $(x_0, \ldots, x_n) \to \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$ erhält man eine Bijektion von $P_i^n C$ auf C^n.

$$P^n C = P_0^n C \cup \ldots \cup P_n^n C$$

ist eine sog. affine Überdeckung von $P^n C$. Sie definiert auf $P^n C$ eine Struktur als analytische Mannigfaltigkeit.

Um den Satz von CHOW anwenden zu können, benötigt man gelegentlich

Satz A 7 (REMMERT). *Seien X, Y zwei komplexe Räume, $f: X \to Y$ eine eigentliche analytische Abbildung ($K \subset Y$ kompakt $\Rightarrow f^{-1}(K)$ kompakt), dann ist $f(X)$ ein abgeschlossener analytischer Teilraum von Y.*

Es gibt Methoden, um Aussagen über analytische Abbildungen (Funktionen) auf Aussagen über komplexe Räume zurückzuführen. Man benötigt dabei den Begriff des kartesischen Produkts zweier komplexer Räume.

Lemma A 1. *Seien X, Y zwei komplexe Räume. Dann ist $X \times Y$, mit der Produkttopologie und einer naheliegenden geringten Struktur versehen, ein komplexer Raum.*

(Sei $U \subset X \times Y$ offen, f eine stetige Funktion auf U. Sie heiße holomorph, wenn $f(x, y)$ bei festem y bzw. x holomorph als Funktion von x bzw. y ist.)

Lemma A 2. *Sei $f: X \to Y$ eine analytische Abbildung. Dann ist*

$$\Delta_f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

ein abgeschlossener analytischer Teilraum von $X \times X$.

3. Kompaktifizierung von $H_2/\Gamma_2(K)$.

Sei $T_1(u)$; $u > 0$ folgendes Gebiet in $S_1 = H_1$:

$$T_1(u) = \left\{z \in S_1 \mid z = x + iy;\ |x| < u;\ y > \frac{1}{u}\right\}.$$

Es gibt nur endlich viele $M \in \Gamma_1$; $M\langle T_1(u)\rangle \cap T_1(u) \neq \emptyset$.

Wählt man u genügend groß, so enthält $T_1 = T_1(u)$ den bekannten Fundamentalbereich der elliptischen Modulgruppe.

Wir konstruieren ein analoges Gebiet $\boldsymbol{T}_2$ in $\boldsymbol{H}_2$ zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$. $\boldsymbol{T}_2(u)$ bestehe aus allen $Z = X + iY \in \boldsymbol{H}_2$

mit
$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ \bar{x}_1 & x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_0 & y_1 \\ \bar{y}_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$|x_i| < u; \quad i = 0, 1, 2; \quad \frac{1}{u} < y_0 < u y_2; \quad |y_1| < u y_2.$$

Bei genügend großem u enthält $\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T}_2(u)$ den Fundamentalbereich $\boldsymbol{F}$ (II). Man kann aufgrund [*10*], HS.1 leicht zeigen, daß es nur endlich viele $M \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ gibt mit $M\langle \boldsymbol{T}_2 \rangle \cap \boldsymbol{T}_2 \neq 0$. Sei $\boldsymbol{T}_0$ der Raum, der nur aus dem Punkt ∞ besteht. Wir bilden die disjunkte Vereinigung
$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_2 \cup \boldsymbol{T}_1 \cup \boldsymbol{T}_0.$$

Auf $\boldsymbol{T}$ wird eine Topologie definiert, die auf $\boldsymbol{T}_i$ die übliche Topologie induziert. Sei hierzu
$$V(U, C) = \left\{ Z \in \boldsymbol{T}_2 \middle| Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix};\ z_0 \in U;\ \operatorname{Im} z_2 > C \right\}$$
$$\text{für} \quad U \subset \boldsymbol{T}_1, \quad C > 0,$$
$$V(C) = \left\{ Z \in \boldsymbol{T}_2 \middle| Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix};\ \operatorname{Im} z_0, \operatorname{Im} z_2 > C \right\}.$$

Eine Menge in $\boldsymbol{T}$ heiße offen, wenn sie Vereinigung von Mengen folgenden Typs ist:

1. $U \subset \boldsymbol{T}_2$ offen.
2. $V(U, C) \cup U$; $\qquad U \subset \boldsymbol{T}_1$ offen.
3. $V(C) \cup \{z \in \boldsymbol{T}_1;\ \operatorname{Im} z > C\} \cup \{\infty\}$.

Offensichtlich konvergiert die Folge
$$\begin{pmatrix} z_0^{(n)} & z_1^{(n)} \\ z_3^{(n)} & z_2^{(n)} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{T}_2$$
gegen $z \in \boldsymbol{T}_1$ genau dann, wenn
$$z_0^{(n)} \to z; \qquad \operatorname{Im} z_2^{(n)} \to \infty.$$

Wir betrachten die natürliche Projektion
$$\Pi: \boldsymbol{T} \to X = \boldsymbol{H}_2 / \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}) \cup \boldsymbol{H}_1 / \boldsymbol{\Gamma}_1 \cup \{\infty\}.$$

Sie induziert auf X eine Topologie ($U \subset X$ offen $\Leftrightarrow \overset{-1}{\Pi} U \subset \boldsymbol{T}$ offen) mit folgenden Eigenschaften:

1. X separiert.
2. X kompakt.

3. $\boldsymbol{H}_2/\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ ist in X ein offener dichter Teilraum, mit der natürlichen Topologie versehen.

Sei $V = \boldsymbol{H}_2/\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ (nach Satz A4 ein komplexer Raum), $\mathcal{O}_X$ die wie im Zusammenhang von Satz A5 definierte geringte Struktur.

Satz A7. *$(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein normaler komplexer Raum, $W = X - V$ ein abgeschlossener analytischer Teilraum.*

Beweis. Wir prüfen die Bedingungen des Baily-Cartanschen Satzes nach.

(1) Sei $x \in W = \boldsymbol{H}_1/\boldsymbol{\Gamma}_1 \cup \{\infty\}$.

a) $x = \infty$. Die Mengen $\Pi[V(C) \cup \{z \in \boldsymbol{T}_1 | \operatorname{Im} z > C\} \cup \{\infty\}] = U_C$ bilden ein Fundamentalsystem von offenen Umgebungen von x, wobei $U_C \cap V = \Pi(V(C))$ zusammenhängend ist.

b) $x \in \boldsymbol{H}_1/\boldsymbol{\Gamma}_1$; $x = \Pi z$; $z \in \boldsymbol{T}_1$.

Hier hat man die Mengen

$$\Pi(V(U, C) \cup U); \qquad z \in U \text{ offen zusammenhängend}$$

in $\boldsymbol{T}_1$ heranzuziehen.

(2) Auf $W = \boldsymbol{H}_1/\boldsymbol{\Gamma}_1 \cap \{\infty\}$ hat man nach der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine komplexe Struktur $\mathcal{O}_W$, so daß $(W, \mathcal{O}_W)$ der Riemannschen Zahlkugel analytisch äquivalent ist. Eine stetige Funktion auf der offenen Menge $U \subset W$ ist hierbei holomorph, wenn f auf $U - \{\infty\}$ holomorph ist. Um (2) von Satz A5 zu verifizieren, zeigen wir

$$\mathcal{O}_X | W = \mathcal{O}_W.$$

a) Sei $U \subset X$ offen, $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Wir beweisen

$$f | U \cap W \in \mathcal{O}_W(U \cap W).$$

Sei $f' = f \circ \Pi$; $f'\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ ist in einer offenen Menge U_0 in $\boldsymbol{T}_1$ als Funktion von z_0 und für $\operatorname{Im} z_2 > C$ bei hinreichend großem C als Funktion von z_2 definiert. Da f' bei Modulsubstitutionen invariant ist, gilt eine Entwicklung

$$f'\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = \Sigma\, a_n e^{2\pi i n z_2}; \qquad \operatorname{Im} z_2 > C$$

mit holomorphen Funktionen $a_n = a_n(z_0)$. Dabei ist

$$\lim_{\operatorname{Im} z_2 \to \infty} f'\begin{pmatrix} z_0 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} = f'(z_0) = a_0(z_0)$$

holomorph und somit

$$f | U \cap W \in \mathcal{O}_W(U \cap W).$$

b) Wir zeigen die Umkehrung. Sei $x \in W$.

Behauptung. Es gibt eine offene Umgebung U von x in X, so daß jede Funktion aus $\mathcal{O}_W(U \cap W)$ zu einer Funktion aus $\mathcal{O}_X(U)$ fortsetzbar ist.

Diese Behauptung folgt aus

Lemma A3. *Sei $z \in \boldsymbol{T}_1$ bzw. $z = \infty$. Es gibt $\varepsilon > 0$, $C > 0$, so daß die in*

$$V(U_\varepsilon(z), C) \quad \textit{bzw.} \quad V(C) \quad - U_\varepsilon(z) =_{\mathrm{Df}} \{w \in \boldsymbol{T}_1;\, |w - z| < \varepsilon\} -$$

definierte Funktion $f\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} = f(z_0)$ in bezüglich $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ äquivalenten Punkten denselben Wert annimmt, falls f eine in $U_\varepsilon(z)$ bzw. $\{z \in \boldsymbol{T}_1 |$ $\operatorname{Im} z > C\} \cup \{\infty\}$ definierte Funktion ist und in bezüglich $\boldsymbol{\Gamma}_1$ äquivalenten Punkten denselben Wert annimmt.

Der Beweis von Lemma A3 ergibt sich unmittelbar aus

Lemma A4. *Sei $z \in \boldsymbol{T}_1$ bzw. $z = \infty$. Es gibt $\varepsilon > 0$, $C > 0$, so daß*

a) $U_\varepsilon(z) \cap M\langle U_\varepsilon(z)\rangle \neq \emptyset;$

$$M \in \boldsymbol{\Gamma}_1 \Rightarrow M \in \operatorname{Stab}(z) = \{M \in \boldsymbol{\Gamma}_1 |\, M\langle z\rangle = z\}$$

bzw.

$$\{z \in \boldsymbol{T}_1 |\, \operatorname{Im} z > C\} \cap M\langle\{z \in \boldsymbol{T}_1 |\, \operatorname{Im} z > C\}\rangle = \emptyset \quad \textit{für} \quad M \in \boldsymbol{\Gamma}_1;$$
$$M \neq \pm E,$$

b) $V(U_\varepsilon(z), C) \cap M\langle V(U_\varepsilon(z), C\rangle \neq \emptyset; \quad M \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$

bzw.

$$V(C) \cap M\langle V(C)\rangle \neq \emptyset;$$

$$M \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Stab}(z) \ \textit{bzw.} \in \operatorname{Stab}(\infty) \quad (c_1 = 0).$$

Bemerkung. Hat M die im Lemma angegebene Gestalt, so gilt

$$M\left\langle\begin{matrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{matrix}\right\rangle = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\langle z_0\rangle & * \\ * & * \end{pmatrix}; \quad |c_1 z_0 + d_1|^2 = |CZ + D|^2;$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} z_0 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Der Beweis des Lemmas folgt aus

Lemma A5. *Sei*

$$Z^{(n)} = \begin{pmatrix} z_0^{(n)} & z_1^{(n)} \\ z_3^{(n)} & z_2^{(n)} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{T}_2; \quad Z^{(n)} \to z \in \boldsymbol{T}_1 \cup \{\infty\}.$$

Sei

$$M \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}); \quad \tilde{Z}^{(n)} = \begin{pmatrix} \tilde{z}_0^{(n)} & \tilde{z}_1^{(n)} \\ \tilde{z}_3^{(n)} & \tilde{z}_2^{(n)} \end{pmatrix} = M\langle Z^{(n)}\rangle \to \tilde{z} \in \boldsymbol{T}_1 \cup \{\infty\}.$$

Dann gilt

1. $z = \infty \Leftrightarrow \tilde{z} = \infty$.

2. $M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \langle z\rangle = \tilde{z}$.

Beweis. Zunächst stellen wir

$$Z^{(n)} \to z \in \boldsymbol{T}_1 \Leftrightarrow (Z^{(n)})^{-1} \to \begin{pmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

fest.

Man hat die $\boldsymbol{T}_2$ definierenden Ungleichungen zu verwenden und

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{z_0 z_2 - z_1 z_3} \begin{pmatrix} z_2 & -z_1 \\ -z_3 & z_0 \end{pmatrix}$$

zu beachten.

Sei jetzt

$$\tilde{Z}^{(n)} = (A Z^{(n)} + B)(C Z^{(n)} + D)^{-1},$$
$$(\tilde{Z}^{(n)})^{-1} = \big(D(Z^{(n)})^{-1} + C\big)\big(B(Z^{(n)})^{-1} + A\big)^{-1}.$$

Wir vollziehen den Grenzübergang und erhalten

$$\begin{pmatrix} \tilde{z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(D\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + C\right)\left(B\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A\right)^{-1}$$

mit gewissen komplexen Zahlen $z, \tilde{z}$, also

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

(3) Wir haben noch die lokale Punktetrennungseigenschaft nachzuweisen. Sei $x \in W = \boldsymbol{H}_1/\boldsymbol{\Gamma}_1 \cup \{\infty\}$.

Bekanntlich existiert eine elliptische Modulform f eines geeigneten Gewichts k, die in x nicht verschwindet. Nach Lemma 4 gibt es eine offene Umgebung eines Punktes $z \in \boldsymbol{T}$ mit $\Pi z = x$, so daß $f\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} = f(z_0)$ in $U \cap \boldsymbol{T}_2$ eine lokale Modulform ist, d.h. $f(M\langle Z\rangle) = |CZ + D|^k f(Z)$ mit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ und $Z, M\langle Z\rangle \in U \cap \boldsymbol{T}_2$. Wir können annehmen, daß f in U nirgends verschwindet. Daher sind die Funktionen

$$g \cdot f^{-\nu}; \quad g \in [\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}), \nu k]; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

holomorph in $U \cap \boldsymbol{T}_2$ und bezüglich $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ invariant. Sie liefern daher holomorphe Funktionen in $(\Pi U) \cap V$, die sich sogar in ganz ΠU holomorph fortsetzen lassen. Dies folgt aus

Bemerkung. Der Operator

$$\Phi : [\boldsymbol{\Gamma}_n(\boldsymbol{K}), k] \to [\boldsymbol{\Gamma}_{n-1}(\boldsymbol{K}), k]; \qquad f|\Phi(Z) = \lim_{\lambda \to \infty} f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}$$

hat die Eigenschaft $f(Z_n) \to f|\Phi(z)$, *falls* $Z_n \in \boldsymbol{T}_2 \to z \in \boldsymbol{T}_1$.

Die Funktionen $f^r g^{-1}$ trennen die Punkte von $\Pi U \cap V$ aufgrund des folgenden Trennungssatzes.

Lemma A6. *a) Seien* $Z_1, Z_2 \in \boldsymbol{H}_2$ *nicht bezüglich* $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ *äquivalent. Dann gibt es eine Modulform* f *zu* $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ *mit* $f(Z_1) = 0$, $f(Z_2) = 1$ [3].

b) Sei $Z \in \boldsymbol{H}_2$. *Es gibt eine Spitzenform* f *zu* $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ (*d.h.* $f|\Phi = 0$) *mit* $f(Z) \neq 0$.

(Nach [3] existiert eine Spitzenform φ zu $\boldsymbol{\Gamma}_4$, die auf $\tilde{Z}$ [III (19)] nicht verschwindet. Offensichtlich ist $f(Z) = \varphi(\tilde{Z})$ eine Spitzenform f zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$.)

Damit ist Satz A7 bewiesen.

Lemma A7. *Es gibt Modulformen* $f_0, \ldots, f_m$ *zu* $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ *(gleichen Gewichts), die in* X *keine simultane Nullstelle haben.*

$$\big(f \in [\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K}), k];\ x \in X;\ f(x) = 0 \Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} f(Z) = 0 \ \textit{bzw.}\ f|\Phi(Z) = 0$$
$$\textit{bzw.}\ f|\Phi^2 = 0 \ \textit{für}\ Z \in \boldsymbol{T};\ \Pi Z = x\big).$$

Wegen der Kompaktheit von X folgt dies aus den zwei Bemerkungen:

1. Sei $Z \in \boldsymbol{T}_2$. Es gibt eine Modulform f zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$, die in Z nicht verschwindet.

2. Sei f eine elliptische Modulform, deren Gewicht durch vier teilbar ist, dann gibt es eine Hermitesche Modulform g zu $\boldsymbol{\Gamma}_2(\boldsymbol{K})$ von demselben Gewicht mit $g|\Phi = f$.

Es ist klar, daß durch

$$x \to j\,x = j_{f_0, \ldots, f_m}(x) =_{\mathrm{Df}} \big(f_0(Z), \ldots, f_m(Z)\big)$$
$$\text{bzw.}\quad \big(f_0|\Phi(Z), \ldots, f_m|\Phi(Z)\big) \quad \text{bzw.} \quad \big(f_0|\Phi^2, \ldots, f_m|\Phi^2\big)$$

eine analytische Abbildung von X in $P^m\boldsymbol{C}$ gegeben ist, wobei Z ein Urbild von x in $\boldsymbol{T}_2$ bzw. $\boldsymbol{T}_1$ ist.

Satz A 8. *Die Modulformen* $(f_0, \ldots, f_m)$ *können so gewählt werden, daß*

$$j = j_{f_0, \ldots, f_m}: X \to P^m C$$

eine eineindeutige Abbildung ist.

Beweis. Wir können durch geeignete Wahl von $f_0, \ldots, f_m$ erreichen, daß $j|W$ eine Injektion von W in $P^m C$ ist. Man hat dafür Sorge zu tragen, daß das Gewicht k von f_i Vielfaches von zwölf ist (eventueller Übergang zu f_i^{12}) und daß die Monome $\Delta^{\nu_1}(z)\, g_4^{\nu_2}(z)$; $12\nu_1 + 4\nu_2 = k$ unter $f_0|\Phi, \ldots, f_m|\Phi$ vorkommen. Wenn j nicht injektiv ist. existieren Punkte $x, y \in X$; $x \neq y$ mit $j(x) = j(y)$. Da es, wie schon bemerkt, eine Modulform f zu $\Gamma_2(K)$ gibt, die die beiden Punkte trennt — ihr Gewicht sei k' — hat man mittels der Formen

$$\Pi f_i^{\nu_i}, \qquad \Sigma \nu_i = k k'; \; f^k$$

eine Abbildung j' von X in $P^{m'} C$ mit $\Delta_{j'} \subsetneqq \Delta_j$.

Da jede absteigende Folge von abgeschlossenen analytischen Teilräumen eines kompakten komplexen Raumes abbricht, ist der Satz bewiesen. Nach Satz A6, A7 ist jX algebraisch, jW eine algebraische Teilmannigfaltigkeit. Sei f eine beliebige Modulform zu $\Gamma_2(K)$. Aufgrund unserer Konstruktion können die einbettenden Modulformen so gewählt werden, daß eine Potenz von f unter ihnen vorkommt. Sei etwa $f^r = f_0$.

Das Bild der Nullstellenmannigfaltigkeit von f in jX besteht genau aus dem Schnitt von jX mit der Hyperebene

$$H = \{x = (x_0, \ldots, x_m) \in P^m C; \; x_0 = 0\}.$$

Aus der algebraischen Geometrie ist bekannt:

Lemma A 8. *Sei H eine Hyperebene, X eine (abgeschlossene) algebraische Mannigfaltigkeit in $P^n C$, dann gilt*

a) Sei $\dim X \geqq 1 \Rightarrow H \cap X \neq \emptyset$.

b) Sei $\dim X \geqq 2$; *X irreduzibel* $\Rightarrow H \cap X$ *zusammenhängend.*

Als Anwendung aus dieser Theorie folgt, daß die Nullstellenmannigfaltigkeit von f in $H_2/\Gamma_2(K)$ keine kompakte Zusammenhangskomponente besitzt. Derselbe Satz gilt auch für Γ_n; $n > 1$ und für die mit Γ_n kommensurablen Gruppen. Hier wurde eine Kompaktifizierungstheorie in [3] ausführlich dargestellt. Im Falle $\Gamma\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, der in der vorliegenden Arbeit benötigt wurde, kann sie vollkommen analog zur Kompaktifizierung von $H_2/\Gamma_2(K)$ entwickelt, ja sogar aus dieser abgeleitet werden.

Literatur

[1] Baily-Borel: On the compactification of arithmetically defined quotients of bounded symmetric domains. Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 588—593 (1964).
[2] Braun, H.: Hermitian Modular Functions III. Ann. Math. **53**, 143—160 (1951).
[3] Cartan, H.: Functions automorphes. Paris: Seminaire 1957/58.
[4] Freitag, E.: Zur Theorie der Modulformen zweiten Grades. Göttinger Nachrichten Nr. 11 (1965).
[5] Gundlach, K. B.: Funktionen zur Modulgruppe von $Q(\sqrt{5})$. Math. Ann. **152**, 226—256 (1963).
[6] — Die Bestimmung der Funktionen zu einigen Hilbertschen Modulgruppen. Crelle-Journal **222**, 109—153 (1965).
[7] Igusa, J.: On Siegel Modular Forms of Genus Two. Amer. Journal of Math. **84**, 306—316 (1962).
[8] — On the graded ring of theta-constants. Amer. Journal of Math. **86**, 392—412 (1964).
[9] — On Siegel modular forms of genus two (II). Amer. Journal of Math. **84**, 175—200 (1964).
[10] Klingen, H.: Über einen Zusammenhang zwischen Siegelschen und Hermiteschen Modulfunktionen. Hamburger Abh. **27**, 1—12 (1963).
[11] Shimizu, H.: On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes. Ann. Math. **77**, 33—71 (1961).
[12] Siegel, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939).
[13] Witt, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. Math. Sem. Hansische Univ. **14**, 323—337 (1941).