

Ein Verschwindungssatz für automorphe Formen zur Siegelschen Modulgruppe

Eberhard Freitag

Dantestraße 19, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

Es sei S_n die Siegelsche Halbebene n -ten Grades, also die Menge aller n -reihigen symmetrischen komplexen Matrizen $Z = X + iY$ mit positiv definitem Imaginärteil Y . Auf S_n operiert die reelle symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ als Gruppe analytischer Automorphismen vermöge

$$Z \rightarrow MZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}). \quad (1)$$

Die Siegelsche Modulgruppe Γ_n besteht aus den ganzzahligen symplektischen Matrizen

$$\Gamma_n = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}).$$

Im folgenden sei $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ eine mit Γ_n kommensurable Gruppe. Die Gruppe $\Gamma \cap \Gamma_n$ hat also sowohl in Γ als auch in Γ_n endlichen Index.

Gegeben sei ein Homomorphismus

$$\rho: \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Gl}(m, \mathbb{C}), \quad n > 1.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß ρ eine rationale Darstellung ist, daß also die Komponenten

$$\rho_{\nu\mu}(A); \quad 1 \leq \nu, \mu \leq m$$

durch rationale Funktionen in den Komponenten von A gegeben werden. Sind überdies alle $\rho_{\nu\mu}(A)$ Polynome, so wollen wir die Darstellung *polynomial* nennen.

Unter einer automorphen Form zur Darstellung ρ bezüglich der Gruppe Γ verstehen wir eine holomorphe Abbildung

$$f: S_n \rightarrow \mathbb{C}^m$$

mit der Eigenschaft

$$f(MZ) = \rho(CZ + D)f(Z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma. \quad (2)$$

Ziel dieser Arbeit ist der Beweis von

Satz 1. Wenn zu der irreduziblen rationalen Darstellung ρ eine von Null verschiedene automorphe Form existiert, so ist entweder ρ trivial oder von der Form

$$\rho(A) = \det A \cdot \rho_0(A)$$

mit einer polynomialen Darstellung ρ_0 .

Folgerung. Jede Γ -invariante holomorphe alternierende Differentialform vom Grad p verschwindet in den Fällen

$$1 \leq p \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Hilfssatz 1. Sei $f: S_n \rightarrow \mathbb{C}^m$ eine automorphe Form bezüglich der rationalen irreduziblen nicht trivialen Darstellung ρ . Dann sind die Differentiale der Komponenten von f linear unabhängig, d.h.

$$\sum_{v=1}^m c_v f_v = \text{const.} \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0, \quad (c_v \in \mathbb{C}).$$

Beweis. Die natürliche Zahl m_0 sei maximal mit folgender Eigenschaft:

Es existiert eine Matrix $B \in \text{Gl}(m, \mathbb{C})$, so daß die ersten m_0 Komponenten von

$$g := Bf$$

konstant sind.

Wir wollen Hilfssatz 1 indirekt beweisen, nehmen also $m_0 > 0$ an. Die Funktion g ist eine automorphe Form bezüglich der konjugierten Darstellung

$$\rho^B(A) := B \cdot \rho(A) \cdot B^{-1}.$$

Insbesondere gilt

$$g_i(U' Z U) = \sum \rho_{ij}^B(U^{-1}) g_j(Z) \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma. \quad (3)$$

Wegen der Maximalität von m_0 ist keine nichttriviale Linearkombination der Funktionen g_v , $m_0 < v \leq m$, konstant. Daher gilt

$$\rho_{ij}^B(U^{-1}) = 0 \quad \text{für} \quad i \leq m_0, j > m_0.$$

Die Menge der hierbei auftretenden Matrizen U enthält eine Untergruppe $G \subset \text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ von endlichem Index. Nun ist $\text{Gl}(n, \mathbb{Z})$ und damit auch G Zariskidicht in $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$. Da die Komponenten von ρ rationale Funktionen sind, folgt

$$\rho_{ij}^B = 0 \quad \text{für} \quad i \leq m_0, j > m_0.$$

Aus der Irreduzibilität von ρ folgt nun $m_0 = m$, d.h. die Funktion $f(Z)$ ist überhaupt konstant. Dieser konstante Vektor wird von allen Matrizen $\rho(CZ + D)$ festgelassen. Dies ist ein Widerspruch zur Irreduzibilität und Nichttrivialität von ρ .

Der Beweis von Satz 1 beruht auf einem Rückgriff auf die Hilbertsche Modulgruppe. Für gewisse Matrizen $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ erhält man durch den Spezialisierungsprozeß

$$f^A(z) := \rho(A) \cdot f(A' z^* A) \tag{4}$$

Hilbertsche Modulformen. Dabei sei $z \in S_1^n$ im Produkt von n oberen Halbenen enthalten. Wir verwenden generell die Bezeichnung

$$z^* := \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & z_n \end{pmatrix} \quad \text{für } z = (z_1, \dots, z_n).$$

Hilfssatz 2. Gegeben sei ein m -Tupel

$$(P_1, \dots, P_m) \neq (0, \dots, 0)$$

von Polynomen in den Komponenten einer variablen n -reihigen Matrix. Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 existiert eine Matrix $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$, so daß die auf S_1^n definierte Funktion

$$\sum_{v=1}^m P_v(A) \cdot f_v(A' z^* A)$$

nicht konstant ist.

Beweis. Wir entwickeln die Funktionen (f_1, \dots, f_m) in Fourierreihen:

$$f_v(Z) = \sum_{T \geq 0} a_v(T) e^{\pi i \text{Sp}(TZ)}.$$

Es gilt

$$a(0) = \rho(U) a(0) \tag{5}$$

für alle Matrizen U aus einer Zariski-dichten Untergruppe von $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$. Da die Darstellung ρ irreduzibel und nichttrivial ist, folgt

$$a_v(0) = 0 \quad \text{für } v = 1, \dots, m,$$

und daher

$$\lim_{y_1, \dots, y_n \rightarrow \infty} f_v(A' z^* A) = 0.$$

Wenn die in Hilfssatz 2 definierte Funktion konstant ist, verschwindet sie demnach identisch.

Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also

$$\sum_{v=1}^m P_v(A) f_v(A' z^* A) = 0 \quad \text{für alle } A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}) \tag{6}$$

an. Für $z=(i, \dots, i)$ bedeutet dies

$$\sum_T P(T, A) e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A)} = 0 \quad (7)$$

mit

$$P(T, A) := \sum_{v=1}^m a_v(T) P_v(A).$$

Wir behaupten nun allgemein:

Gegeben sei eine für alle $A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{R})$ absolut konvergente Reihe

$$\sum P(T, A) e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A)},$$

wobei über semipositive ganze symmetrische Matrizen T summiert werde. Für festes T sei $P(T, A)$ ein Polynom in den Komponenten von A . Wenn die Reihe identisch verschwindet, so gilt

$$P(T, A) = 0 \quad \text{für alle } T \text{ und } A.$$

Im Falle $n=1$ kann man dies leicht durch Induktion nach T beweisen. Sei

$$P(T, A) = 0 \quad \text{für } T < T_0.$$

Multipliziert man die Reihe (7) mit

$$e^{\pi \operatorname{Sp}(T_0 A' A)}$$

und führt anschließend den Grenzübergang $A \rightarrow \infty$ durch, so erhält man

$$P(T_0, A) \rightarrow 0 \quad \text{für } A \rightarrow \infty$$

und somit

$$P(T_0, A) = 0.$$

Im Falle $n \geq 1$ betrachten wir die Relation

$$\sum P(T, a A) e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A) a^2} = 0 \quad (8)$$

für festes $A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{R})$ und variables $a \in \mathbb{R}$. Da der Fall $n=1$ bereits erledigt ist, erhalten wir

$$\sum_{\operatorname{Sp}(T A' A) = t} P(T, a A) = 0, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Spezialisiert man diese Relation auf $a=0$, so folgt

$$\sum P(T, 0) e^{-\pi \operatorname{Sp}(T A' A) a^2} = 0. \quad (10)$$

Da sich jede positiv definite Matrix in der Form $A' A$ schreiben läßt, schließt man aus der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung

$$P(T, 0) = 0 \quad \text{für alle } T. \quad (11)$$

Wir differenzieren nun die Relation

$$\sum P(T, A) e^{-\pi \operatorname{Sp}(T' A' A)} = 0 \quad (12)$$

nach den Komponenten von A und erhalten eine analoge Relation, deren Koeffizienten \tilde{P} die Form

$$\tilde{P}(T, A) = \frac{\partial}{\partial a_{ik}} P(T, A) + Q(T, A) \quad (13)$$

mit $Q(T, 0) = 0$ haben.

Aus $\tilde{P}(T, 0) = 0$ folgt daher

$$\frac{\partial}{\partial a_{ik}} P(T, 0) = 0. \quad (14)$$

Durch Iteration dieses Verfahrens zeigt man, daß auch die höheren Ableitungen von $P(T, A)$ in $A = 0$ verschwinden. Dies bedeutet

$$P(T, A) = 0. \quad (15)$$

In dem uns interessierenden Fall (7) bedeutet dies

$$\sum_{v=1}^m P_v(A) f_v(Z) = 0 \quad \text{für alle } A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{R}).$$

Die Funktionen f_1, \dots, f_m sind demnach linear abhängig im Widerspruch zu Hilfssatz 1.

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten der Funktion (4). Sei

$$M = (M_1, \dots, M_n); \quad M_v = \begin{pmatrix} a_v & b_v \\ c_v & d_v \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$M^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = (a_1, \dots, a_n), \dots$$

Hierdurch erhält man eine Einbettung

$$\operatorname{Sl}(2, \mathbb{R})^n \hookrightarrow \operatorname{Sp}(n, \mathbb{R}),$$

$$M \mapsto M^*$$

welche mit den üblichen Operationen dieser Gruppen verträglich ist:

$$(M z)^* = M^* z^*.$$

Wir „projizieren“ nun die Gruppe Γ bezüglich der durch eine Matrix $A \in \operatorname{Gl}(n, \mathbb{R})$ definierten Einbettung

$$S_1^n \rightarrow S^n$$

$$z \mapsto A' z^* A,$$

(16)

d.h. wir betrachten

$$\Gamma_A := \left\{ M \in \text{Sl}(2, \mathbb{R})^n; \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M^* \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma \right\}. \quad (17)$$

Offenbar hat die Funktion

$$h(z) := \rho(A) f(A' z^* A) \quad (18)$$

das Transformationsverhalten

$$h(Mz) = \rho(c^* z^* + d^*) h(z) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_A. \quad (19)$$

Wir sind nur an solchen Einbettungen interessiert, für die Γ_A genügend groß ist.

Hilfssatz 3. Die Menge aller Matrizen A , für die Γ_A mit einer Hilbertschen Modulgruppe kommensurabel ist, liegt dicht in $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Beweis. Sei K/\mathbb{Q} ein total reeller Zahlkörper vom Grad n . Wir fassen die n verschiedenen Isomorphismen $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ zu einer Einbettung

$$\begin{aligned} K &\hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\mapsto (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(n)}) \end{aligned}$$

zusammen. Das Bild von K liegt dicht in \mathbb{R}^n . Einer beliebigen Körperbasis $\omega_1, \dots, \omega_n$ ordnen wir die invertierbare Matrix

$$A = (\omega_i^{(j)})_{1 \leq i, j \leq n}$$

zu. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß Γ_A mit der Hilbertschen Modulgruppe von K kommensurabel ist [1].

Die Menge all dieser Matrizen A liegt offenbar dicht in $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 1. Die Einschränkung von ρ auf die Untergruppe der Diagonalmatrizen zerfällt bekanntlich in eine direkte Summe von eindimensionalen Darstellungen. Da wir ρ durch eine konjugierte Darstellung ersetzen dürfen, bedeutet die Annahme

$$\rho(a^*) = \begin{pmatrix} \rho_1(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_m(a) \end{pmatrix}, \quad a = (a_1, \dots, a_n),$$

keine Einschränkung der Allgemeinheit. Es gilt

$$\rho_i(a) = a_1^{r_{i1}} \dots a_n^{r_{in}}; \quad 1 \leq i \leq m,$$

mit gewissen ganzen Zahlen r_{ij} .

Wir wählen nun eine Matrix $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ mit folgenden beiden Eigenschaften

- Γ_A ist mit einer Hilbertschen Modulgruppe kommensurable Gruppe.
- Keine Komponente von $h(z) = \rho(A) f(A' z^* A)$ ist konstant.

Die Existenz einer solchen Matrix A ist dank der Hilfssätze 2, 3 gesichert.

Die Komponenten von h sind wegen (19) Hilbertsche Modulformen:

$$h_i(Mz) = \prod_{j=1}^n (c_j z_j + d_j)^{r_{ij}} h_i(z). \quad (20)$$

Nach einem fundamentalen Lemma aus der Theorie der Hilbertschen Modulformen müssen alle r_{ij} positiv sein! (s. [2], Hs.2.2.).

$$r_{ij} > 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Hieraus folgt aber

$$\rho_i(a) = 0 \quad \text{falls} \quad a_1, \dots, a_n = 0,$$

d.h. ρ verschwindet auf der Menge aller Diagonalmatrizen der Determinante 0.

Da jede Matrix durch Links- und Rechtsmultiplikation in Diagonalgestalt überführbar ist, folgt

$$\rho(A) = 0 \quad \text{für} \quad \det A = 0.$$

Satz 1 ist damit bewiesen.

Beispiel. Sei \mathfrak{Z}_n der Vektorraum der symmetrischen komplexen Matrizen. Die Darstellung

$$\rho: \text{Gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{Z}_n) = \text{Gl}(N, \mathbb{C}), \quad N = \frac{n(n+1)}{2},$$

ordnet jeder Matrix $A \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})$ den Endomorphismus

$$\rho(A): \mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{Z}_n, \quad Z \mapsto A'ZA$$

zu. Neben ρ sind auch die äußeren Potenzen

$$\rho^{[p]}(A): \bigwedge^p \mathfrak{Z}_n \rightarrow \bigwedge^p \mathfrak{Z}_n, \quad 0 \leq p \leq N,$$

von Interesse.

Hilfssatz 4. Die Darstellungen $\rho^{[p]}$, $0 \leq p \leq N$, sind irreduzibel. Sie verschwinden auf der Fläche $\{A: \det A = 0\}$ genau in den Fällen

$$N - n < p \leq N.$$

Beweis. Sei $V = \mathbb{C}^n$ der kanonische $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ -Modul. Über die Interpretation symmetrischer Matrizen als Bilinearformen erhält man eine äquivariante Einbettung

$$\mathfrak{Z}_n \rightarrow V \otimes V$$

und daher

$$\bigwedge^p \mathfrak{Z}_n \hookrightarrow V^{\otimes 2p}.$$

Irreduzible Teildarstellungen von $V^{\otimes m}$ erhält man allgemein mit Hilfe der „Young-Diagramme“, (s. [3]). Die Darstellung $\rho^{[p]}$ entspricht dabei dem Diagramm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ 2p-1 & 2p \end{pmatrix}$$

und ist daher irreduzibel.

Die „Funktionalmatrix“ einer symplektischen Substitution $M \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ in einem Punkt $Z_0 \in S_n$ wird bekanntlich durch die lineare Abbildung

$$\mathfrak{Z}_n \rightarrow \mathfrak{Z}_n$$

$$Z \mapsto (CZ_0 + D)^{-1} Z (CZ_0 + D)^{-1}$$

gegeben.

Damit erhalten wir

Bemerkung. Die Γ -invarianten holomorphen alternierenden Differentialformen vom Grad p auf S_n entsprechen umkehrbar eindeutig den automorphen Formen bezüglich der Darstellung $\rho^{[p]}$.

Damit ist auch die Folgerung zu Satz 1 bewiesen.

Literatur

- ✓ 1. Freitag, E., Schneider, V.: Bemerkung zu einem Satz von J. Igusa und W. Hammond. Math. Z. **102**, 9–16 (1967)
- ✓ 2. Freitag, E.: Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe. Invent. Math. **17**, 106–134 (1972)
3. Weyl, H.: The Classical Groups. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 1946

Eingegangen am 8. Mai 1978

Korrektur zur Arbeit

"Ein Verschwindungssatz für automorphe
Formen zur Siegelschen Modulgruppe"

Math. Z 165, 11-18 (1979)

In der Folgerung zu Satz 1 ist eine falsche Schranke für das Verschwinden von alternierenden Differentialformen zur Siegelschen Modulform angegeben. Richtig ist

Folgerung: Jede F -invariante holomorphe Differentialform vom Grad p verschwindet in den Fällen

$$1 \leq p < n .$$

Der Fehler liegt in Hilfssatz [4]. Die dort behauptete Irreduzibilität der Darstellungen $\rho^{[p]}$ ist falsch. Statt dessen gilt

Hilfssatz 4: In den Fällen $1 < p < n$ verschwindet keine irreduzible Komponente der Darstellung $\rho^{[p]}$ auf der Fläche $\{A : \det A = 0\}$.