Die Kodairadimension von Körpern automorpher Funktionen

Von *Eberhard Freitag* in Mainz

Einleitung

Es gibt eine Reihe von systematischen Untersuchungen über die Struktur von Körpern automorpher Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Die eher dürftigen Resultate dieser Bemühungen können damit entschuldigt werden, daß sie nur im Zusammenhang mit Fortschritten in anderen Gebieten, wie zum Beispiel der algebraischen Geometrie und Zahlentheorie erzielt werden konnten. Ein Beispiel hierfür ist die arithmetisch interessante Tatsache, daß Thetareihen zu positiv definiten quadratischen Formen durch die Heckeschen T_n-Operatoren in Linearkombinationen von Thetareihen überführt werden.

Es ist mir seit langem bekannt, daß die Existenz von Spitzenformen kleinen Gewichts Konsequenzen für die Struktur der Funktionenkörper hat. Durch einen neuen Typus von Thetareihen ist es H. Maaß gelungen, solche Spitzenformen zu konstruieren [6]. In § 1 wird mit Hilfe dieser Konstruktionen gezeigt, daß der Körper der Siegelschen Modulfunktionen $K(\Gamma_n)$, $n \equiv 0 \bmod 24$, nicht rational ist, seine Kodairadimension strebt mit n gegen ∞.

Im Gegensatz zu früheren Untersuchungen, in denen ähnliche Sätze bewiesen werden (z.B. die Nichtrationalität von $K(\Gamma_n)$ für $n \equiv 1 \bmod 8$, $n > 9$ in [3]) wird in dieser Arbeit weder eine allgemeine Desingularisierungstheorie, noch eine konkrete Desingularisierung benötigt.

Mit Hilfe Mumfords Auflösung der Spitzen beweist Tai [8], daß der Körper der Modulfunktionen für arithmetisch definierte Gruppen genügend hoher Stufe von allgemeinem Typ ist. In § 2 wird am Beispiel der Siegelschen Modulgruppe gezeigt, daß man dies auch einfacher, ohne Desingularisierung beweisen kann.

§ 1. Quadratintegrierbare holomorphe Differentialformen

Sei $K \supset \mathbb{C}$ ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad N. Wir interessieren uns für rationale Differentialformen vom höchsten Grad N:

$$\omega = f\, dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_N;\ f \in K.$$

Dabei sei $g_1, \ldots, g_N$ eine Transzendenzbasis von K.

Unter einem Modell von K versteht man eine irreduzible algebraische Varietät X zusammen mit einem Isomorphismus

$$K \xrightarrow{\sim} K(X) = \text{Körper der rationalen Funktionen auf } X.$$

Für den vorliegenden Zweck ist es ausreichend, affine Modelle zu betrachten. Sei X_0 die Menge aller regulären Punkte von X, in denen die rationalen Funktionen $f, g_1, \ldots, g_N$ definiert sind.

Die Differentialform ω heiße quadratintegrierbar, falls das Integral

$$\int_{X_0} \omega \wedge \bar{\omega}$$

konvergiert.

Diese Bedingung hängt nicht von der Wahl des Modells X ab, da zwei verschiedene Modelle birational äquivalent, von Mengen vom Maß Null abgesehen, sogar biholomorph äquivalent sind.

Die Maximalzahl linear unabhängiger quadratintegrierbarer Differentialformen vom Grade N ist also eine Invariante $g_N(K)$ des Funktionenkörpers. Ist K rein transzendent, so ist bekanntlich $g_N(K) = 0$.

Der Quotient von zwei rationalen Differentialformen ω, $\omega' \neq 0$ vom Grade N ist ein Element des Funktionenkörpers K. Die Quotienten von quadratintegrierbaren Differentialformen erzeugen einen Unterkörper von K, welchen wir mit K_1 bezeichnen:

$$K_1 \subset K.$$

Der Transzendenzgrad von K_1 ist eine weitere Invariante $k_1(K)$ von K:

$$0 \leqq k_1(K) \leqq \min(N, g_N(K) - 1).$$

Es sei nun $K = K(\Gamma_n)$ der Körper der Siegelschen Modulfunktionen n-ten Grades zur vollen Modulgruppe $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$. Im Falle $n > 1$ sind die Elemente von $K(\Gamma_n)$ genau die meromorphen Funktionen auf der Siegelschen Halbebene

$$S_n = \{Z = Z^{(n)} = Z' = X + iY,\ Y > 0 \text{ (positiv definit)}\},$$

welche unter der Modulgruppe invariant sind.

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = f(Z) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}).$$

Bekanntlich ist $K(\Gamma_n)$ ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $N = \frac{1}{2} n(n+1)$.

1. 1 Satz. *Es gilt*

$$k_1(K(\Gamma_n)) \to \infty \quad \textit{für} \quad n \to \infty,\ n \equiv 0 \bmod 24.$$

Für große $n \equiv 0 \bmod 24$ ist der Körper der Modulfunktionen insbesondere nicht rein transzendent. Es wird sich sogar zeigen:

1.2 Satz. *Der Körper der Modulfunktionen n-ten Grades ist im Falle*

$$n \equiv 0 \bmod 24, \quad n > 0$$

nicht rein transzendent.

Jede rationale Differentialform von $K(\Gamma_n)$ läßt sich natürlich als Γ_n-invariante meromorphe Differentialform auf S_n auffassen.

Es gilt sogar:

1.3 Hilfssatz. *Jede Γ_n-invariante meromorphe Differentialform ω auf S_n ist im Falle $n > 1$ rational, d.h. von der Form*

$$\omega = f\, dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_N; \quad f, g_1, \ldots, g_N \in K(\Gamma_n).$$

Beweis. Sei $\omega_0 \neq 0$ eine beliebige rationale Differentialform. Dann ist ω/ω_0 eine Γ_n-invariante meromorphe Funktion, also eine Modulfunktion aus $K(\Gamma_n)$.

Sei nun

$$\omega_0 = \bigwedge_{\nu \leq \mu} dz_{\nu\mu}$$

das alternierende Produkt der Differentiale $dz_{\nu\mu}$, welche irgendwie, etwa lexikographisch geordnet seien. Jede meromorphe Differentialform ω auf S_n kann man in der Form

$$\omega = f\, \omega_0, \quad f \text{ meromorph in } S_n,$$

schreiben. Die Funktionaldeterminante einer symplektischen Substitution

$$Z \to MZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}; \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R})$$

ist bekanntlich

$$I(Z, M) = \det(CZ + D)^{-(n+1)}.$$

Die Differentialform ω ist daher unter irgendeiner Untergruppe $\Gamma \subset Sp(n, \mathbb{R})$ genau dann invariant, falls

$$f(MZ) = \det(CZ + D)^{n+1} f(Z) \qquad \text{für} \quad M \in \Gamma$$

gilt.

Aufgrund der Kompaktifizierungstheorie von Satake-Baily ist S_n/Γ eine quasiprojektive algebraische Varietät, wenn Γ mit der Siegelschen Modulgruppe kommensurabel ist. Die Modulfunktionen entsprechen dabei gerade den rationalen Funktionen. Die Differentialform ω ist also genau dann quadratintegrierbar, falls

$$(*) \qquad \int_{S_n/\Gamma} \omega \wedge \bar{\omega} = \int_F |f(Z)|^2\, \omega_0 \wedge \bar{\omega}_0$$

konvergiert. Dabei sei F ein Fundamentalbereich von Γ.

Aus der Diskontinuität von Γ folgt, daß das Integral von $|f(Z)|^2$ über eine genügend kleine Umgebung eines vorgegebenen Punktes aus S_n konvergiert. Daher ist f in ganz S_n holomorph. Die Funktion f ist also eine Modulform vom Gewicht $n+1$.

Den Vektorraum aller Modulformen vom Gewicht $r \in \mathbb{Z}$, im Falle $n>1$ also aller holomorphen Lösungen von

$$f/M = f \quad \text{für} \quad M \in \Gamma; \quad (f/M)(Z) = \det(CZ+D)^{-r} f(MZ)$$

bezeichnen wir mit $[\Gamma, r]$. Der Unterraum der Spitzenformen $[\Gamma, r]_0$ ist durch die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} (f/M)\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{für} \quad M \in Sp(n, \mathbb{Z})$$

definiert.

Mit Hilfe der Fourierentwicklung einer Modulform und der genauen Gestalt des Siegelschen Fundamentalbereichs zeigt man, daß das Integral $(*)$ genau dann konvergiert, wenn f eine Spitzenform ist.

Wir erhalten (vgl. [2])

1. 4 Bemerkung. Es gilt

$$g_N(K(\Gamma)) = \dim[\Gamma, n+1]_0 .$$

H. Maaß konstruierte kürzlich mit Hilfe verallgemeinerter Thetareihen Spitzenformen kleinen Gewichts zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe [6]. Im einfachsten Fall haben diese Reihen die Form

$$\vartheta_1(S^{(n)}, Z^{(n)}) = \sum_{G^{(n)}} (\det G)\, e^{\pi i Sp(S[G]Z)} .$$

Dabei ist S eine reelle symmetrische positiv definite n-reihige Matrix, Z variiert in der Siegelschen Halbebene S_n. Wenn S gerade ist

$$g' S g = \sum_{i,j} s_{ij} g_i g_j \equiv 0 \bmod 2 \qquad \text{für} \quad g \in \mathbb{Z}^n$$

und wenn n gerade ist, so ist $\vartheta_1(S, Z)$ eine Spitzenform vom Gewicht $\frac{n}{2}+1$ zur Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma_n[q] = \{M \in \Gamma_n;\ M \equiv E \bmod q\} .$$

Dabei ist $q = q(S)$ die Stufe von S, also die kleinste natürliche Zahl so daß qS^{-1} gerade ist.

$$\vartheta_1(S^{(n)}, Z^{(n)}) \in \left[\Gamma_n[q], \frac{n}{2} + 1\right]_0 \quad (n \equiv 0 \bmod 2,\ q = q(S),\ S \text{ gerade}).$$

Die Reihen $\vartheta_1(S, Z)$ können identisch verschwinden. Dies tritt genau dann ein, wenn eine Einheit von S mit negativer Determinante existiert:

$$U' S U = S, \quad U \in Gl(n, \mathbb{Z}), \quad \det U = -1 .$$

Im Minkowskischen Sinne reduzierte Matrizen S mit dieser Eigenschaft müssen auf dem Rand der Minkowskipyramide liegen. In der Regel sind also außer $\pm E$ gar keine Einheiten zu erwarten. Dennoch ist es schwierig, Beispiele von Matrizen kleiner Stufe anzugeben, welche nur Einheiten positiver Determinante besitzen.

Bekanntlich existieren für $0 < n \leqq 24$ genau 27 unimodulare Klassen von Matrizen S der Stufe 1. Nur die Klasse, welche dem Leech-Gitter ($n = 24$) entspricht, besteht aus Matrizen, deren Einheiten positive Determinante haben. In diesem Falle ist ja die Einheitengruppe modulo $\pm E$ einfach, wie Conway gezeigt hat [1]. Da die Einheitengruppe von

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

von den Einheiten von S und Permutationen der Kästchen erzeugt wird (s. [7], II 6. 4), erhalten wir

1. 5 Hilfssatz. *Es gilt*

$$\left[\Gamma_n, \frac{n}{2}+1\right]_0 \neq 0 \qquad \textit{für} \quad n \equiv 0 \bmod 24.$$

Vermutlich gilt dieser Hilfssatz unter der Voraussetzung $n \equiv 0 \bmod 8$, $n \geqq 24$.

Multipliziert man eine Spitzenform vom Gewicht $\frac{n}{2}+1$ mit einer beliebigen Form vom Gewicht $\frac{n}{2}$, so erhält man eine Spitzenform vom Gewicht $n+1$.

Die gewöhnlichen Thetareihen

$$\vartheta(S^{(m)}, Z^{(n)}) = \sum_{G = G^{(m,n)}} e^{\pi i Sp(S[G]Z)}, \quad S^{(m)} \text{ unimodular, gerade } > 0,$$

sind bekanntlich Modulformen vom Gewicht $\frac{m}{2}$, welche nicht identisch verschwinden. Gemäß Bemerkung 1. 4 folgt nun mit $m = n$ sofort Satz 1. 2. Dem Beweis von Satz 1. 1 dient

1. 6 Hilfssatz. *Seien $S_\nu = S_\nu^{(m_\nu)}$, $1 \leqq \nu \leqq l$, irreduzible, paarweise inäquivalente positive unimodulare. gerade Matrizen. Für genügend großes n sind die Thetareihen $\vartheta(S_\nu, Z^{(n)})$, $1 \leqq \nu \leqq l$, algebraisch unabhängig.*

Dabei heiße eine Form S irreduzibel, wenn sie nicht unimodular äquivalent mit einer Form vom Typ

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \; S_\nu = S^{(m_\nu)}, \quad m_\nu > 0 \quad \text{für } \nu = 1, 2$$

ist. Bekanntlich gibt es zu jedem $m \equiv 0 \bmod 8$ mindestens eine unimodulare gerade irreduzible Matrix $S^{(m)} > 0$.

Beweis. Die Gesamtheit aller Polynome $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l]$, welche durch

$$\vartheta(S_1, Z^{(n)}), \ldots, \vartheta(S_l, Z^{(n)})$$

annulliert werden, bildet ein Primideal

$$\mathfrak{x}_n \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l];$$

offenbar gilt

$$\mathfrak{x}_1 \supset \mathfrak{x}_2 \supset \cdots.$$

Jede Primidealkette in einem Ring endlicher Dimension bricht ab.

Wenn die Reihen $\vartheta(S, Z^{(n)})$ für jedes n algebraisch abhängig sind, so folgt nun die Existenz einer Relation

$$P(\vartheta(S_\nu, Z^{(n)}))=0, \quad P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_l] \quad P \neq 0,$$

welche für alle n gilt.

Da das Produkt von Thetareihen selbst eine Thetareihe ist, impliziert eine solche algebraische Relation eine lineare Relation

$$\sum_j c_j \vartheta(\tilde{S}_j^{(h)}, Z^{(n)})=0,$$

wobei die Matrizen $\tilde{S}_j$ paarweise inäquivalent sind ([7], II 6. 4). Wählt man $n=h$, so folgt aufgrund der Fourierentwicklung sofort $c_j=0$ für alle j. Die Fourierentwicklungen der Thetareihen (ohne Index j) haben die Gestalt

$$\vartheta(\tilde{S}, Z)=\sum_{T \geqq 0} A(\tilde{S}, T)\, e^{\pi i Sp(TZ)}.$$

Dabei ist $A(\tilde{S}, T)$ die Anzahl aller ganzen Matrizen $G^{(h)}$ mit $G'\tilde{S}G=T$. Es gilt

$$A(\tilde{S}_j, \tilde{S}_k)=0 \Leftrightarrow j=k.$$

Damit ist Satz 1. 1 bewiesen.

Die beim Beweis verwendete Methode liefert keine effektive Abschätzung für $k_1(K(\Gamma_n))$. Bessere Resultate erhält man für Kongruenzuntergruppen. Bekanntlich sind die Thetakonstanten

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i Z\left[g+\frac{1}{2}a\right]+b'g}, \quad a, b \in \mathbb{Z}^n,$$

Modulformen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ zu einer gewissen Kongruenzgruppe mit einem gewissen Multiplikatorsystem. Die Quotienten aus diesen Funktionen erzeugen einen Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $\frac{1}{2}n(n+1)$ [5]. Multipliziert man die von Maaß konstruierten Spitzenformen vom Gewicht $\frac{n}{2}+1$ mit Potenzprodukten dieser Thetakonstanten, so erhält man viele Beispiele für Spitzenformen vom Gewicht $n+1$. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, formulieren wir noch

1. 7 Satz. *Es gilt*

$$k_1(K(\Gamma_n[l]))=\frac{1}{2}n(n+1) \quad \textit{für} \quad l \equiv 0 \bmod 8.$$

§ 2. Differentialformen höheren Gewichts

Eine Differentialform vom Gewicht $r \in \mathbb{Z}$ des Funktionenkörpers $K \supset \mathbb{C}$ mit Transzendenzbasis $g_1, \ldots, g_N$ ist ein Ausdruck der Form

$$f(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_N)^r.$$

Beim Übergang zu einer Transzendenzbasis ist f mit der r-ten Potenz der Funktionaldeterminante zu multiplizieren.

(Die üblichen partiellen Ableitungen rationaler Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial g_\nu} : \mathbb{C}(g_1, \ldots, g_N) \to \mathbb{C}(g_1, \ldots, g_N), \quad 1 \leqq \nu \leqq N$$

lassen sich bekanntlich eindeutig zu Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial g_\nu} : K \to K$$

ausdehnen. Ist $g_1^*, \ldots, g_N^*$ eine weitere Transzendenzbasis, so ist $\det \frac{\partial g_\nu^*}{\partial g_\mu}$ die Funktionaldeterminante.)

Eine Stelle des Funktionenkörpers K ist ein diskreter Bewertungsring

$$\mathbb{C} \subset R \subset K$$

mit Quotientenkörper K, dessen Restklassenkörper den Transzendenzgrad $N-1$ hat. Gestattet die Differentialform ω eine Darstellung der Form

$$f(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_N)^r; \quad f, g_1, \ldots, g_N \in R,$$

so heißt ω regulär an der Stelle R.

Die Dimension des Vektorraums aller (an jeder Stelle) regulären Differentialformen wird mit

$$p_r = p_r(K); \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

bezeichnet. Diese ist endlich!

Die Menge aller Quotienten von regulären Differentialformen gleichen nicht negativen Gewichts ist ein Unterkörper K_∞ von K:

$$K_\infty = \left\{ \frac{\omega}{\omega'}; \quad \omega, \omega' \text{ regulär vom selben nicht negativen Gewicht}, \omega' \neq 0 \right\}.$$

Die Kodairadimension $k_\infty(K)$ von K ist der Transzendenzgrad von K_∞. Wenn diese maximal ist ($k_\infty(K) = N$), heißt K von allgemeinem Typ.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß eine rationale Differentialform vom Gewicht 1 genau dann regulär ist, wenn sie quadratintegrierbar ist.

Es gilt also

$$K_1 \subset K_\infty \quad \text{und daher} \quad k_1(K) \leqq k_\infty(K).$$

Satz 1. 7 besagt daher insbesondere:

Der Körper $K(\Gamma_n[l])$, $l \equiv 0 \bmod 8$, *ist von allgemeinem Typ.*

Tai hat bewiesen [8], daß der Körper der Modulfunktionen $K(\Gamma_n[l])$, l hinreichend groß, von allgemeinem Typ ist (sogar für beliebige arithmetische Gruppen Γ anstelle von Γ_n). Es ist ihm dabei gelungen, die regulären Differentialformen höheren Gewichts mit Hilfe von Modulformen exakt zu beschreiben.

Sein wesentliches Hilfsmittel ist Mumfords Desingularisierungstheorie. Wir wollen am Beispiel der Siegelschen Modulgruppe zeigen, daß seine Resultate auch ohne Desingularisierung bewiesen werden können.

Zunächst lassen sich Hilfssatz 1. 3 und die daran anschließenden Bemerkungen ohne weiteres auf Differentialformen höheren Gewichts übertragen.

2. 1 Bemerkung. Die rationalen Differentialformen von $K(\Gamma)$ vom Gewicht r entsprechen umkehrbar eindeutig den in S_n meromorphen Funktionen f mit der Eigenschaft

$$f(MZ) = \det(CZ+D)^{r(n+1)} f(Z) \quad \text{für} \quad M \in \Gamma.$$

Sei $P \subset S_n$ eine irreduzible Komponente der Polstellenmenge von f. Die Menge aller Modulfunktionen $f \in K(\Gamma)$, deren Polstellenmenge nicht P umfaßt, ist ein diskreter Bewertungsring R von $K(\Gamma)$. Da S_n/Γ algebraisch ist, hat sein Restklassenkörper den richtigen Transzendenzgrad $N-1$.

Wenn die f zugeordnete Differentialform regulär ist, so muß infolgedessen f in ganz S_n holomorph sein, d. h. $f \in [\Gamma, r(n+1)]$.

2. 2 Bemerkung. Sei X eine irreduzible quasiprojektive algebraische Varietät der Dimension n. Eine rationale Differentialform ω vom Gewicht r des Funktionenkörpers $K(X)$ ist genau dann regulär, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

Sei $X_0 \subset X$ ein offener Teil des regulären Orts von X, auf dem ω holomorph ist und $\varphi: \dot{E} \times E^{n-1} \to X_0$; E = Einheitskreis, $\dot{E} = E \setminus \{0\}$ eine holomorphe Abbildung mit außerwesentlicher Singularität. Dann ist $\varphi^* \omega$ auf E^n holomorph festsetzbar.

Die Abbildung φ hat eine außerwesentliche Singularität, wenn sie zu einer holomorphen Abbildung $E^n \to \bar{X}$ in einen projektiven Abschluß fortsetzbar ist.

Die in 2. 2 formulierte Bedingung ist offensichtlich birational invariant. Man könnte sie daher auch zur Definition der Regularität heranziehen. Aus diesem Grund wollen wir den einfachen Beweis dem Leser überlassen und lediglich darauf hinweisen, daß er nichts mit Desingularisierung zu tun hat.

In [3] wurde mit einfachen Schlüssen aus der Wertverteilungstheorie gezeigt:

2. 3 Hilfssatz. *Sei*

$$\varphi: \dot{E} \times E^{N-1} \to S_n/\Gamma_n[l]; \quad l \geqq 3, \; n > 1$$

eine holomorphe Abbildung mit außerwesentlicher Singularität.

Dann ist φ von der Form

$$\varphi(q, w) = M(Sz + \Phi(q, w)), \quad q = e^{2\pi i z},$$

$$S \equiv 0 \bmod l,\ \Phi(q, w) \text{ holomorph in } E^N, \quad M \in \Gamma_n/\Gamma_n[l].$$

(Die Gruppe $\Gamma_n/\Gamma_n[l]$ operiert in natürlicher Weise auf $S_n/\Gamma_n[l]$.)

Da die Gruppe $\Gamma_n/\Gamma_n[l]$ auch auf den Modulformen zur Gruppe $\Gamma_n[l]$ operiert, brauchen wir uns in unseren Anwendungen nur mit dem Fall $M = E$ zu befassen.

2. 4 Satz (Tai). *Sei*

$$f \in [\Gamma_n[l], (n+1)\, r]_0.$$

Die f zugeordnete rationale Differentialform ist in bezug auf den Körper $K(\Gamma_n[lr])$ regulär.

Folgerung. *Der Körper der Modulfunktionen $K(\Gamma_n[l])$ ist für hinreichend große l von allgemeinem Typ.*

Zum Beweis benutzt man die Fourierentwicklung von f:

$$f(Z) = \sum_{T = T' > 0 \text{ halbganz}} a(T)\, e^{\frac{2\pi i}{l} Sp(TZ)}$$

und beachte

$$\frac{1}{l} Sp(ST) \equiv 0 \bmod r, \qquad \text{falls} \quad S \equiv 0 \bmod lr.$$

Es folgt, daß

$$f(Sz + \Phi)\, e^{-\pi i r z}, \quad S \equiv 0 \bmod lr,$$

in $q = 0$ noch regulär ist.

Dieselbe Methode liefert auch die genauen in [8] angegebenen Regularitätskriterien.

Literatur

[1] *J. H. Conway*, A group of order 8, 315, 553, 613, 086, 720, 000, Bull. Lond. Math. Soc. **1** (1969), 79—88.

[2] *E. Freitag*, Singularitäten von Modulmannigfaltigkeiten und Körpern automorpher Funktionen, Abh. des Int. Kongr. d. Math. Vancouver (1974).

[3] *E. Freitag*, Der Körper der Siegelschen Modulfunktionen, Erscheint in den Hamb. Abh.

[4] *E. Freitag*, Stabile Modulformen, Erscheint in den Math. Ann.

[5] *J. I. Igusa*, On the graded ring of theta-constants, Amer. J. of Math. **86** (1964), 219—246.

[6] *H. Maaß*, Konstruktion von Spitzenformen beliebigen Grades mit Hilfe von Thetareihen, Math. Ann. **226** (1977), 275—284.

[7] *J. Milnor* and *D. Husemoller*, Symmetric bilinear forms, Ergebnisse der Math., Berlin-Heidelberg-New York 1973.

[8] *Y. Tai*, Smooth compactification of locally symmetric varieties, chap. IV, 1975.

Dantestraße 19, 6900 Heidelberg

Eingegangen 1. Februar 1977