Math. Ann. 230, 197—211 (1977)

Stabile Modulformen

E. Freitag
Mathematisches Institut der Universität, Saarstr. 21, D-6500 Mainz, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

In der Theorie der Siegelschen Modulformen spielt der Siegelsche Φ-Operator

$$\Phi:[\Gamma_n, r]\to[\Gamma_{n-1}, r],$$

welcher Modulformen n-ten Grades vom Gewicht r auf solche $(n-1)$-ten Grades abbildet, eine wichtige Rolle. Für gerade und große $r(r>2n)$ ist dieser Operator surjektiv, wie H. Maaß [7] gezeigt hat.

Aus der Theorie der singulären Modulformen [3, 11] weiß man, daß dieser Operator für $n>2r$ injektiv ist.

In der vorliegenden Arbeit wird hierauf aufbauend gezeigt, daß jede singuläre Modulform $(n>2r)$ Linearkombination von Thetareihen zu positiven geraden unimodularen quadratischen Formen ist. Insbesondere folgt

a) $[\Gamma_n, r]=0$ für $n>2r$, $r\not\equiv 0 \bmod 4$.

b) Der Φ-Operator ist für $n>2r+1$ ein Isomorphismus.

Die Anregung, mich mit diesem Problem zu beschäftigen, erhielt ich durch unveröffentlichte Manuskripte von H. Resnikoff, in denen dieser Satz unter einschränkenden Bedingungen ($n>4r$ im Falle b)) ebenfalls aufgestellt wird. Der vorliegende einfache Beweis (§ 1) entstand bei dem vergeblichen Bemühen, den Beweis in diesen Manuskripten zu verstehen. Die Untersuchungen von H. Resnikoff, welche auf der „Eichler-Entwicklung" einer Modulform basieren, sollen in den Ann. of Math. erscheinen.

Die Stabilität der Vektorräume $[\Gamma_n, r]$ für $n>2r$ legt es nahe, den projektiven Limes

$$A=\varprojlim A(\Gamma_n); \qquad A(\Gamma_n)=\bigoplus_{r=0}^{\infty}[\Gamma_n, r]$$

aller Algebren von Modulformen zu betrachten. *Diese Algebra ist ein Polynomring in abzählbar vielen Variablen, welche durch die Klassen von positiven geraden unimodalen irreduziblen quadratischen Formen repräsentiert werden* (§ 2). Dieser einfache Struktursatz entsteht nicht durch Vererbung entsprechender Sätze von $A(\Gamma_n)$. Immerhin kann man beweisen (§ 3), daß $A(\Gamma_n)$ für $n\geqq 8$ ein faktorieller Ring ist. In einem Anhang wird noch darauf hingewiesen, daß der Ring $A^{(4)}(\Gamma_n)$ die ganze Abschließung von $B(\Gamma_n)$, dem von allen Thetareihen aufgespannten Unterring ist.

1. Darstellung singulärer Modulformen durch Thetareihen

Die Siegelsche Halbebene n-ten Grades S_n besteht aus allen n-reihigen symmetrischen komplexen Matrizen $Z=Z^{(n)}=X+iY$, deren Imaginärteil Y positiv definit ist.

$$Y[g]=g'Yg=\sum_{1\leq i,j\leq n} y_{ij}g_ig_j>0 \quad \text{für} \quad g\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

Eine Modulform n-ten Grades vom Gewicht $r\in\mathbb{Z}$ ist eine holomorphe Funktion $f:S_n\to\mathbb{C}$, welche dem Transformationsverhalten

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1})=\det(CZ+D)^r f(Z) \quad \text{für} \quad M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in\Gamma_n$$

genügt. Dabei ist $\Gamma_n=\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades, welche aus allen ganzen symplektischen Matrizen $M=M^{(2n)}$ besteht

$$M'\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}M=\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrizen

$$\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad S=S'$$

symplektisch sind, folgt

$$f(Z+S)=f(Z), \qquad S=S' \text{ ganz}.$$

Daher kann man f in eine mehrfache Fourierreihe entwickeln:

$$f(Z)=\sum_{T=T'} a(T)e^{\pi i \mathrm{Sp}(TZ)}.$$

Dabei ist über gerade n-reihige Matrizen T zu summieren. Eine symmetrische Matrix T heiße gerade, falls

$$T[g]\equiv 0 \bmod 2 \quad \text{für} \quad g\in\mathbb{Z}^n$$

gilt. Dies bedeutet einfach, daß die Koeffizienten von T ganz und die Diagonalelemente sogar gerade sind.

Im Falle $n>1$ läßt sich aus dem Transformationsverhalten folgern:

$$a(T)\neq 0 \Rightarrow T\geqq 0 \quad \text{(positiv semidefinit)}.$$

Im Falle $n=1$ ist dies noch zusätzlich zu fordern.

Eine Modulform f heißt singulär, falls der Fourierkoeffizient $a(T)$ nur für singuläre T von Null verschieden sein kann:

$$a(T)\neq 0 \Rightarrow \det T=0.$$

Beispiele von Modulformen hat man in den Thetareihen

$$\vartheta_S(Z) = \sum_{G=G^{(m,n)}\text{ ganz}} e^{\pi i \operatorname{Sp}(G'SGZ)}.$$

Dabei sei $S = S^{(m)}$ eine positive Form. Die Reihe konvergiert dann in der Siegelschen Halbebene.

Bekanntlich ist ϑ_S genau dann eine Modulform n-ten Grades, falls S gerade und unimodular ($\det S = 1$) ist. Nach Witt existieren solche Formen dann und nur dann, falls $8|m$. Das Gewicht der Thetareihe ist $r = \frac{m}{2}$.

Die Fourierentwicklung der Thetareihe lautet:

$$\vartheta_S(Z) = \sum_{T=T' \geqq 0} A(S,T) e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}.$$

Dabei ist $A(S,T)$ die Anzahl aller Darstellungen $G'SG = T$; $G = G^{(m,n)}$ ganz. Im Falle $n > m = 2r$ ist also die Thetareihe eine singuläre Modulform.

In [3, 11] wurde allgemein gezeigt:

Eine Modulform $f \neq 0$ ist genau dann singulär, falls $n > 2r$ gilt.

1.1. Theorem. *Sei f eine singuläre Modulform n-ten Grades vom Gewicht r (also $n > 2r$). Dann läßt sich f als Linearkombination von Thetareihen zu positiven geraden unimodularen Formen $S = S^{(2r)}$ darstellen. Insbesondere folgt $r \equiv 0 \bmod 4$, falls f nicht identisch verschwindet.*

Zum Beweis hat man die Fourierentwicklung einer singulären Form

$$f(Z) = \sum a(T) e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

zu untersuchen. Aus der Invarianz

$$f(U'ZU) = f(Z) \quad \text{für} \quad U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$$

folgt

$$a(U'TU) = a(T).$$

Jede singuläre semipositive rationale Matrix T läßt sich bekanntlich in der Form

$$T = T^{(n)} = U' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} U, \quad U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}), \quad S = S^{(n-1)} \geqq 0$$

darstellen.

Durch

$$f|\Phi(Z) = \sum_{T=T^{(n-1)}} a\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

wird ein Operator definiert, welcher eine Modulform n-ten Grades in eine solche $(n-1)$-ten Grades vom selben Gewicht überführt.

Eine singuläre Modulform f ist also durch $f|\Phi$ eindeutig bestimmt. Da der Φ-Operator Thetareihen in Thetareihen überführt, kann man Theorem 1.1 auch folgendermaßen aussprechen:

Sei f_0 eine Modulform $2r$-ten Grades vom Gewicht r, welche sich in der Form

$$f_0 = f|\Phi$$

mit einer (singulären) Modulform f $(2r+1)$-ten Grades schreiben läßt. Dann ist f_0 als Linearkombination von Thetareihen darstellbar.

Wir bezeichnen mit

$$S_1, \ldots, S_m$$

ein Vertretersystem der unimodularen Klassen aller positiven geraden Formen $S = S^{(2r)}$ der Determinante Eins. Ist

$$f_0 = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \vartheta_{S_\nu}$$

eine Darstellung von f_0 als Linearkombination von Thetareihen und ist

$$f_0(Z) = \sum_{T = T^{(2r)} \geqq 0} a_0(T) e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

die Fourierentwicklung von f_0, so gilt offenbar

$$a_0(S_\nu) = c_\nu A(S_\nu, S_\nu) \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq n.$$

Die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m$ sind also eindeutig bestimmt. In jedem Fall kann man zum Beweis von Theorem 1.1 die Form f_0 (entsprechend f) durch

$$f_0(Z) - \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu \vartheta_{S_\nu}(Z) \quad \text{mit} \quad c_\nu = \frac{a_0(S_\nu)}{A(S_\nu, S_\nu)}$$

ersetzen. Das ergibt folgende Neuformulierung von Theorem 1.1.

Sei f_0 eine Modulform $2r$-ten Grades vom Gewicht r, welche sich in der Form

$$f_0 = f \mid \Phi$$

mit einer (singulären) Modulform $(2r+1)$-ten Grades schreiben läßt. Wenn f_0 nicht identisch verschwindet, existiert ein Fourierkoeffizient

$$a_0(T) \neq 0, \quad \det T = 1.$$

Konstruktion von T. Die Modulform f_0 ist nicht singulär. Es existiert daher ein Fourierkoeffizient

$$a(T) \neq 0, \quad \det T > 0.$$

Unter allen diesen Koeffizienten wählen wir einen mit minimaler Determinante $\det T$ und bezeichnen diesen mit

$$a(S) \neq 0; \quad \det S > 0 \textit{ minimal}.$$

Wir werden $\det S = 1$ zeigen. Zum Beweis entwickeln wir die Funktion

$$f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}, \quad z \in S_1, \quad Z \in S_{2r}$$

bei festem z in eine Fourierreihe

$$f\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \sum A_T(z) e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}.$$

Es ist leicht zu sehen und wohlbekannt, daß die Funktionen A_T elliptische Modulformen (Modulformen ersten Grades) sind.

Durch Umordnen der Fourierreihe

$$f(Z) = \sum_{T = T^{(2r+1)} \geqq 0} a(T) e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

erhält man

$$A_T(z) = \sum a \begin{pmatrix} t & \mathfrak{t}' \\ \mathfrak{t} & T \end{pmatrix} e^{\pi i t z}.$$

Zu summieren ist über alle $t, \mathfrak{t}$ so daß die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} t & \mathfrak{t}' \\ \mathfrak{t} & T \end{pmatrix}$$

gerade und semipositiv ist.

Wir bestimmen die Funktion $A_T(z)$ im Spezialfall $T = S$.

Wenn der Koeffizient

$$a(T), \qquad T = \begin{pmatrix} t & \mathfrak{t}' \\ \mathfrak{t} & S \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist, so gilt

$$T = U' \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} U, \; U \in Gl(2r+1, \mathbb{Z}), \quad T^* = T^{*(2r)} \geqq 0.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$S = G' T^* G; \qquad U = \begin{pmatrix} * & * \\ * & G \end{pmatrix}; \qquad G = G^{(2r)}.$$

Hieraus folgt $\det T^* \neq 0$. Beachtet man

$$a(T) = a \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} = a_0(T^*),$$

so erhält man

$$\det T^* \geqq \det S$$

wegen der geforderten Minimalität von $\det S$. Die Matrizen S und T^* sind demnach unimodular äquivalent und wir erhalten

$$T \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Funktion A_S bestimmt

$$A_S(z) = a_0(S) \sum e^{\pi i t z}$$
$$\begin{pmatrix} t & \mathfrak{t}' \\ \mathfrak{t} & S \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$

Die in dieser Summe auftretenden Matrizen kann man bestimmen. Sie sind alle von der Form

$$\begin{pmatrix} S[g] & g' \\ g & S \end{pmatrix}, \quad g \in \mathbb{Z}^{2r}.$$

Wir erhalten schließlich

$$\frac{A_S(z)}{a_0(S)} = \sum_{g \in \mathbb{Z}^{2r}} e^{\pi i S[g] z}.$$

Dies ist eine Thetareihe und gleichzeitig eine elliptische Modulform (zur vollen Modulgruppe!) Es gilt daher $\det S = 1$.

Wir geben eine einfache Anwendung von Theorem 1.1. Sei $S = S^{(m)}$ eine positive, rationale Form. Die Thetareihe stellt dann zwar keine Modulform zur vollen Gruppe, aber zu einer geeigneten Kongruenzuntergruppe dar. Mittels eines Symmetrisierungsoperators kann man aus $\vartheta_S(Z)$ eine Form zur vollen Gruppe konstruieren. Wenn diese nicht identisch verschwindet, erhält man mittels Theorem 1.1 Aussagen über Darstellungen durch S.

Wir wollen dies in einem besonders einfachen Fall durchführen. Sei

$$S = S^{(m)} > 0, \textit{ ganz, det } S = 1, \ m \text{ gerade}$$

Dann ist die Funktion

$$\sum_{A, B \,\mathrm{ganz\,mod}\, 2} \left(\sum_{G = G^{(m,n)} \mathrm{ganz}} e^{\pi i \operatorname{Sp}\{S[G + \frac{1}{2}A] + B'G\}} \right)^4$$

eine Modulform n-ten Grades vom Gewicht $2m$, welche nicht identisch verschwindet.

Nach Theorem 1.1 muß sich diese Funktion linear aus Thetareihen zu geraden Formen der Determinante Eins linear kombinieren lassen.

Insbesondere gibt es eine gerade unimodulare Form $S_0 = S_0^{(4m)}$, die sich in der Form

$$S_0 = \begin{pmatrix} S & & & 0 \\ & S & & \\ & & S & \\ 0 & & & S \end{pmatrix} \left[\frac{1}{2} G \right]; G \text{ ganz}$$

schreiben läßt.

In der Sprache der Gitter bedeutet dies:

Sei $L \subset \mathbb{R}^n$, n gerade, ein selbstduales Gitter (bezüglich des üblichen Skalarprodukts). Es existiert ein selbstduales *gerades* Gitter $L_0 \subset \mathbb{R}^{4n}$ mit der Eigenschaft

$$2L_0 \subset L \oplus L \oplus L \oplus L.$$

2. Stabile Modulformen

Wir bezeichnen mit $[\Gamma_n, r]$ den Vektorraum aller Modulformen n-ten Grades vom Gewicht r. Durch iterierte Anwendung des Φ-Operators erhält man

$$\Phi^h : [\Gamma_{n+h}, r] \to [\Gamma_n, r].$$

2.1. Definition. Eine Modulform $f \in [\Gamma_n, r]$ heißt stabil, falls es eine ganze Zahl $h \geqq 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt

a) $n+h>2r$

b) f liegt im Bild von Φ^h.

Eine triviale Umformulierung von Theorem 1.1 besagt

2.2. Theorem. *Eine Modulform n-ten Grades ist genau dann Linearkombination von Thetareihen zu positiven, geraden, unimodularen Formen, falls sie stabil ist.*

Durch diesen Satz erhält ein altes Problem neue Bedeutung: Wann ist der Siegelsche Φ-Operator surjektiv? H. Maaß hat mit Hilfe von Poincaréreihen bewiesen [7]. Der Φ-Operator

$$\Phi:[\Gamma_n, r] \to [\Gamma_{n-1}, r]$$

ist für $r>2n$, r gerade, surjektiv.

In dieser Arbeit wurde offensichtlich bewiesen:

Der Φ-Operator ist für $n-1>2r$ surjektiv (sogar ein Isomorphismus).

2.3. Definition. Ein Φ-Vektor vom Gewicht r ist eine Folge $f=(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ von Modulformen

$$f_n \in [\Gamma_n, r], n=0,1,2,\ldots$$

mit der Eigenschaft

$$f_n = f_{n+1}|\Phi \quad \text{für} \quad n=0,1,2,\ldots$$

Die Gesamtheit der Φ-Vektoren bildet einen Vektorraum A_r. Eine Modulform ist genau dann stabil, wenn sie in einem Φ-Vektor vorkommt. Aus Theorem 2.1 folgt

2.4. Bemerkung. Es gilt

$$\dim A_r = \dim[\Gamma_n, r] \quad \text{für} \quad n>2r$$

und diese Zahl ist gleich der Anzahl aller Klassen positiver, gerader unimodularer Formen $S=S^{(2r)}$.

Das komponenterweise gebildete Produkt zweier Φ-Vektoren ist wieder ein Φ-Vektor, die Gewichte addieren sich dabei.

Die direkte Summe

$$A = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_r$$

ist also eine graduierte Algebra. Jede positive, gerade, unimodulare Form $S=S^{(2r)}$ definiert einen Φ-Vektor ϑ_S vom Gewicht r und diese Φ-Vektoren erzeugen A als Vektorraum. Beachtet man

$$\vartheta_{S_1} \cdot \vartheta_{S_2} = \vartheta_{\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}},$$

so folgt, daß die Algebra A schon von den Thetareihen ϑ_S zu irreduziblen Formen S erzeugt wird. Eine quadratische Form S heißt dabei *irreduzibel,* falls sie nicht unimodular äquivalent zu einer Form

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, S_\nu = S^{(n_\nu)}, n_\nu > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2$$

ist.

Jede quadratische Form S ist unimodular äquivalent zu einer Form

$$\begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_m \end{pmatrix}$$

mit irreduziblen S_ν $(1 \leqq \nu \leqq m)$. Wenn S positiv ist, so sind die Klassen der Formen $S_1, \dots, S_m$ einem Satz von M. Eichler zufolge (s. [10]) bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

2.5. Theorem. *Die Algebra A ist ein Polynomring*

$$A = \mathbb{C}[\vartheta_S].$$

Dabei durchlaufe S ein Vertretersystem aller Klassen irreduzibler, positiver gerader, unimodularer Matrizen S.

2.6. Folgerung. Der homogene Quotientenkörper K von A

$$K = \left\{ \frac{f}{g}; f, g \in A_r, g \neq 0 \right\}$$

ist ein rationaler Funktionenkörper in den abzählbar vielen Variablen

$$\chi_S = \vartheta_{S_0}^{-\frac{r}{8}} \vartheta_S.$$

Dabei sei $S_0 = S_0^{(8)}$ die bis auf unimodulare Äquivalenz eindeutig bestimmte Form von 8 Variablen und $S = S^{(r)}$, $r > 8$, eine beliebige irreduzible Form:

Die Algebra A ist nichts anderes als der projektive Limes der Algebren

$$A(\Gamma_n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} [\Gamma_n, r].$$

Bekanntlich ist $A(\Gamma_n)$ eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra der Dimension $\frac{1}{2}n(n+1)+1$. Ihr homogener Quotientenkörper, der Körper der Modulfunktionen $K(\Gamma_n)$ ist ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Es erhebt sich die Frage, welche Eigenschaften der Algebra A durch Vererbung aus entsprechenden Eigenschaften der Algebren $A(\Gamma_n)$ entstehen. Sicherlich ist $A(\Gamma_n)$ im allgemeinen kein Polynomring, denn sonst wäre

$$\operatorname{proj} A(\Gamma_n) = \overline{S_n/\Gamma_n} \text{ (Satakekompaktifizierung)}$$

ein Quotientenraum des projektiven Raumes P^N; $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ nach einer endlichen Gruppe. Wie erstmals J. Igusa gezeigt hat, sind jedoch die Spitzen im Falle $n \geqq 3$ keine Quotientensingularitäten. Die Kompliziertheit der Algebren $A(\Gamma_n)$ zeigt sich auch darin, daß der Körper $K(\Gamma_n)$ im allgemeinen kein rationaler Funktionenkörper ist. (In [4] wurde dies für $n \equiv 1 \bmod 8$, $n \neq 1, 9$ gezeigt.)

3. Primfaktorzerlegung im Ring der Modulformen

Unter einem Automorphiefaktor I einer Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ versteht man eine Abbildung

$$I: S_n \times \Gamma \to \mathbb{C}^{\cdot} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

mit den Eigenschaften:

a) $I(Z, M)$ ist bei festem M holomorph.
b) $I(Z, MN) = I(NZ, M)\, I(Z, N)$.
Die trivialen Faktoren der Form

$$I(Z, M) = \frac{h(MZ)}{h(Z)}, \ h \text{ holomorph invertrierbar}$$

bilden offenbar eine Untergruppe in der Gruppe aller Automorphiefaktoren. Die Faktorgruppe wird mit Pic Γ bezeichnet. Offenbar ist

$$\operatorname{Pic} \Gamma = H^1(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)^*).$$

Dabei wird mit $\mathcal{O}(S_n)$ der Ring aller auf S_n holomorpher Funktionen und mit $\mathcal{O}(S_n)^*$ die Gruppe seiner invertierbaren Elemente bezeichnet. Die Automorphiefaktoren sind gerade die 1-Kozyklen und die trivialen Faktoren die 1-Koränder im Standardkomplex des Γ-Moduls $\mathcal{O}(S_n)^*$.

Da die Siegelsche Halbebene konvex ist, besitzt jede holomorphe invertierbare Funktion auf S_n einen holomorphen Logarithmus. Man hat also eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}(S_n) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}(S_n)^* \to 0.$$

Hierzu gehört eine lange exakte Kohomologiesequenz, von der wir ein Stück niederschreiben.

$$H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \to H^1(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)) \to \operatorname{Pic} \Gamma \to H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to H^2(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)).$$

Im folgenden setzen wir voraus, daß Γ mit der Siegelschen Modulgruppe Γ_n kommensurabel ist, daß also $\Gamma \cap \Gamma_n$ sowohl in Γ als auch in Γ_n endlichen Index hat.

3.1. *Die natürliche Abbildung*

$$\operatorname{Pic} \Gamma \to H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$$

ist im Falle $n \geqq 3$ injektiv. Insbesondere ist Pic Γ *endlich erzeugt.*

Beweis. Die Gruppe Γ ist bekanntlich endlich präsentierbar. Daher sind die Gruppen $H^i(\Gamma, \mathbb{Z})$ alle endlich erzeugt. Andererseits ist $H^i(\Gamma, \mathcal{O}(S_n))$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Die Aussage von Satz 3.1 ist daher äquivalent zu

$$H^1(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)) = 0 \qquad (n \geqq 3).$$

Bekanntlich verschwindet die Kohomologie einer endlichen Gruppe, welche auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum operiert. Ist Γ_0 ein Normalteiler von endlichem Index in Γ, so folgt

$$H^1(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)) = H^1(\Gamma_0, \mathcal{O}(S_n))^{\Gamma/\Gamma_0}.$$

Wir können daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Γ fixpunktfrei auf S_n operiert. Dann stimmt die auftretende Gruppenkohomologie mit der entsprechenden Garbenkohomologie auf dem Quotienten S_n/Γ überein.

$$H^{\cdot}(\Gamma, \mathbb{Z}) = H^{\cdot}(S_n/\Gamma, \mathbb{Z})$$

$$H^{\cdot}(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)) = H^{\cdot}(S_n/\Gamma, \mathcal{O})$$

$$H^{\cdot}(\Gamma, \mathcal{O}(S_n)^*) = H^{\cdot}(S_n/\Gamma, \mathcal{O}^*).$$

Dabei ist $\mathcal{O}$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf S_n/Γ. Die Gruppe $H^1(S_n/\Gamma, \mathcal{O}^*)$ ist isomorph zur Gruppe der Isomorphieklassen von komplex analytischen Geradenbündeln auf S_n/Γ. Es sei daran erinnert, daß Satz 3.1 gleichbedeutend ist mit jeder der beiden folgenden Aussagen

1) $H^1(S_n/\Gamma, \mathcal{O}) = 0$
2) $H^1(S_n/\Gamma, \mathcal{O}^*)$ ist endlich erzeugt.

Wir wollen diese Aussagen auf eine singularitätenfreie Kompaktifizierung von S_n/Γ zurückspielen. Zunächst weiß man, daß S_n/Γ als Zariski offener Teil in eine projektiv algebraische, normale Varietät X eingebettet werden kann. Die Kodimension der Ausnahmemenge

$$S = X - S_n/\Gamma \quad \text{ist} \quad \dim X - \dim S = n.$$

Aus einem allgemeinen Fortsetzungssatz für kohärente Garben [5] folgt, daß jedes analytische Geradenbündel auf S_n/Γ zu einer kohärenten Garbe auf ganz X fortgesetzt werden kann, sofern die Kodimension n größer als zwei ist. Insbesondere ist dann jedes analytische Geradenbündel algebraisch.

Aufgrund der Desingularisierungstheorie von Hironaka kann man S_n/Γ als Zariskioffenen Teil in eine singularitätenfreie projektive Mannigfaltigkeit $\tilde{X}$ einbetten. Jedes *algebraische* Geradenbündel auf S_n/Γ kann zu einem Geradenbündel auf $\tilde{X}$ fortgesetzt werden. Im Falle $n \geqq 3$ erhalten wir also:
Die Restriktionsabbildung

$$H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}^*) \to H^1(S_n/\Gamma, \mathcal{O}^*)$$

ist surjektiv. Wir zeigen nun, daß die Gruppe $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ (welche von der Wahl der Auflösung $\tilde{X}$ abhängt) endlich erzeugt ist. Dies wiederum ist äquivalent zu

$$H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = 0.$$

Aufgrund der Hodgetheorie ist $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ isomorph zum Vektorraum der holomorphen Differentiale auf $\tilde{X}$. Es gilt aber sogar, daß jedes holomorphe Differential auf S_n/Γ verschwindet [4]. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

Als nächstes bestimmen wir den Torsionsbestandteil von $\operatorname{Pic}\Gamma$. Ein Automorphiefaktor I definiert ein Torsionselement von $\operatorname{Pic}\Gamma$, wenn eine geeignete Potenz von I trivial ist.

$$I(Z, M)^l = \frac{h(MZ)}{h(Z)}, \; h \in \mathcal{O}(S_n)^*.$$

Die Funktion h besitzt eine holomorphe l-te Wurzel

$$h=h_0^l,\ h_0\in\mathcal{O}(S_n)^*.$$

Der Automorphiefaktor

$$I_0(Z,M)=I(Z,M)\frac{h_0(Z)}{h_0(MZ)}$$

ist äquivalent zu $I(Z,M)$ und hat die Eigenschaft

$$I_0(Z,M)^l=1.$$

Hieraus folgt aber, daß

$$I_0(Z,M)=v(M)$$

konstant ist. Offenbar ist

$$v:\Gamma\to\mathbb{C}^{\cdot}$$

ein Homomorphismus.

Bekanntlich hat Γ eine endliche Faktorkommutatorgruppe. Der Torsionsbestandteil von $\operatorname{Pic}\Gamma$ ist also isomorph zu der endlichen Gruppe

$$\Gamma_{ab}=\Gamma/[\Gamma,\Gamma].$$

Damit ist aber auch der Torsionsbestandteil von $H^2(\Gamma,\mathbb{Z})$ bestimmt. Aus der Sequenz

$$0\to\operatorname{Pic}\Gamma\to H^2(\Gamma,\mathbb{Z})\to H^2(\Gamma,\mathcal{O}(S_n))$$

folgt nämlich, daß die Torsionsbestandteile von $\operatorname{Pic}\Gamma$ und $H^2(\Gamma,\mathbb{Z})$ isomorph sind. Wir erhalten somit

3.2. Hilfssatz. *Im Falle $n\geqq 3$ gilt*

$$H^2(\Gamma,\mathbb{Z})\cong\Gamma_{ab}\oplus\mathbb{Z}^b.$$

Dabei ist

$$b=\dim H^2(\Gamma,\mathbb{C})$$

die zweite Bettizahl von Γ.

Die Bestimmung der Bettizahlen von Γ, allgemeiner eines Gitters in einer halbeinfachen Liegruppe ist ein schwieriges, nur teilweise gelöstes Problem. Im Falle eines kompakten Fundamentalbereichs wurden die Bettizahlen b_r für kleine r von Matsushima [9] bestimmt. Garland hat gezeigt, daß sich seine Methode sich auf den allgemeinen Fall übertragen läßt. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate findet man in [1, 2].

Mit M^r werde der Vektorraum aller komplexen $\mathscr{C}^\infty$-Differentialformen auf S_n vom Grade r bezeichnet, welche unter der vollen symplektischen Gruppe $\operatorname{Sp}(n,\mathbb{R})$ invariant sind. Jede solche Differentialform ist geschlossen und definiert daher eine Kohomologieklasse im de Rham-Komplex. Man hat also eine natürliche Abbildung

$$j_r:M^r\to H^r(\Gamma,\mathbb{C}).$$

Diese Abbildung ist im Falle $r \leqq \frac{n}{4}$ ein Isomorphismus! Der Raum M^2 ist eindimensional [9]. Es folgt

$$b_2(\Gamma)=1 \quad \text{für} \quad n \geqq 8.$$

Im Falle $n \geqq 8$ erhalten wir $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) = \Gamma_{ab} \oplus \mathbb{Z}$.

Die Gruppe Pic Γ ist also entweder eine endliche Gruppe oder sie hat in $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ endlichen Index. Die erste Möglichkeit scheidet aus, da die Automorphiefaktoren

$$\det(CZ+D)^r, \; r \in \mathbb{Z}$$

paarweise inäquivalent sind. Die Gruppe $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})/\text{Pic}\,\Gamma$ ist also endlich und andererseits in die torsionsfreie Gruppe $H^2(\Gamma, \mathcal{O}(S_n))$ eingebettet. Das ergibt

3.3. Satz. *Im Falle $n \geqq 8$ gilt*

$$\text{Pic}\,\Gamma \cong H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \Gamma_{ab} \oplus \mathbb{Z}.$$

Die Automorphiefaktoren der Form det $(CZ+D)^r$, $r \in \mathbb{Z}$, bilden insbesondere eine Untergruppe von endlichem Index r_0 in Pic Γ. Damit läßt sich ein beliebiger Automorphiefaktor I von Γ folgendermaßen beschreiben. Die r_0-te Potenz von I hat die Form

$$I(Z,M)^{r_0} = \det(CZ+D)^r \frac{h(MZ)}{h(Z)}, \; r \in \mathbb{Z}, h \in \mathcal{O}(S_n)^*.$$

Die Funktionen det $(CZ+D)$ und $h(Z)$ besitzen holomorphe r_0-te Wurzeln, die wir uns irgendwie festgelegt denken.

Damit erhalten wir:

Es gibt ein System $\{v(M)\}_{M \in \Gamma}$ von r_0-ten Einheitswurzeln, so daß $I(Z,M)$ zu einem Automorphiefaktor der Form

$$v(M) \det(CZ+D)^{\frac{r}{r_0}}$$

äquivalent ist.

Im Falle der vollen Siegelschen Modulgruppe gestaltet sich die Situation besonders einfach. H. Maaß hat gezeigt [8], daß I nur dann Automorphiefaktor sein kann, falls

a) $r/r_0 \in \mathbb{Z}$.
b) $v(M)=1$ für alle $M \in \Gamma_n$.

Insbesondere gilt

$$\Gamma_n = [\Gamma_n, \Gamma_n] \quad \text{für} \quad n \geqq 3.$$

3.4. Satz. *Im Falle $n \geqq 8$ hat jeder Automorphiefaktor I zur vollen Siegelschen Modulgruppe Γ_n die Form*

$$I(Z,M) = \det(CZ+D)^r \frac{h(MZ)}{h(Z)}; \; r \in \mathbb{Z}, \; h \in \mathcal{O}(S_n)^*.$$

Mit Hilfe von Satz 3.4 läßt sich die Existenz von Modulformen mit vorgegebenem Nullstellendivisor beweisen. Unter einem Divisor D auf einem komplexen

Raum X verstehen wir hier eine formale lokal endliche Summe

$$\mathscr{D}=\sum n_Y Y, n_Y \in \mathbb{Z},$$

Zu summieren ist über alle abgeschlossenen irreduziblen Unterräume der Kodimension Eins. Der Nullstellendivisor einer Modulform f ist Γ_n-invariant. Bekanntlich existiert im Falle $n \geqq 3$ eine Γ_n-invariante analytische Ausnahmemenge $A_n \subset S_n$ der Kodimension $\geqq 2$, so daß Γ_n auf $S_n - A_n$ frei operiert. Nach dem Fortsetzungssatz von Remmert-Stein entsprechen die Γ_n-invarianten Divisoren auf S_n dann umkehrbar eindeutig den Divisoren auf S_n/Γ_n. Sicherlich ist eine Modulform $f \neq 0$ Primform, falls ihr Nullstellendivisor (f) in S_n/Γ_n Primdivisor ist, also aus genau einer Komponente mit Multiplizität Eins besteht. Im Falle $n \geqq 8$ gilt hiervon auch die Umkehrung, wie der folgende Satz zeigt:

3.5. Satz. *Im Falle $n \geqq 8$ ist jeder Γ_n-invariante Divisor auf S_n der genaue Nullstellendivisor einer Modulform.*

Die Siegelsche Halbebene ist ein konvexes Gebiet. Daher ist jeder Divisor $\mathscr{D}$ auf S_n Nullstellendivisor einer holomorphen Funktion $f: S_n \to \mathbb{C}$. Wenn $\mathscr{D}$ unter Γ_n invariant ist, hat die Funktion

$$I(Z, M) = \frac{f(MZ)}{f(Z)}, \quad M \in \Gamma_n$$

weder Pole noch Nullstellen und stellt somit einen Automorphiefaktor dar. Die Behauptung folgt nun aus 3.4.

3.6. Theorem. *Die Algebra $A(\Gamma_n)$ ist im Falle $n \geqq 8$ faktoriell.*

Beweis. Ein graduierter Ring ist genau dann im üblichen Sinne ein faktorieller Ring, falls sich jedes homogene Element als Produkt von homogenen Primelementen schreiben läßt. Eine Modulform $f \in [\Gamma_n, r]$ ist genau dann Primform, falls $f | gh \Rightarrow f/g$ oder f/h. Dabei sind g, h ebenfalls (homogene) Modulformen. Eine Modulform f ist sicherlich Primform, wenn ihr Nullstellendivisor (f) in S_n/Γ_n Primdivisor ist, also aus einer einigen irreduziblen Komponente mit Multiplizität Eins besteht. Aufgrund von Satz 3.5 gilt hiervon auch die Umkehrung. Zerlegt man den Nullstellendivisor (f) einer Modulform f in irreduzible Komponenten, so erhält man mittels Satz 3.5 die Primfaktorzerlegung von f. Beispiele von Primelementen in $A(\Gamma_n)$ kann man angeben.

3.7. Bemerkung. Eine singuläre Modulform $f \in [\Gamma_n, r]$, $n \geqq 8$ ist genau dann Primelement in $A(\Gamma_n)$, falls sich f als irreduzibles Polynom $f = P(\vartheta_{S_1}, \ldots, \vartheta_{S_m})$ in Thetareihen zu paarweise inäquivalenten irreduziblen Formen $S_1, \ldots, S_m$ schreiben läßt.

Anhang

In dem Ring

$$A^{(4)}(\Gamma_n) = \bigoplus_{r \equiv 0 \bmod 4} [\Gamma_n, r]$$

stellt die lineare Hülle aller Thetareihen $\vartheta_S(Z)$ $(S>0$, gerade, unimodular) einen Unterring $B(\Gamma_n)$ dar. Diese beiden Ringe sollten nicht zu weit auseinander liegen, da nach 2.3 ihre projektiven Limiten ja übereinstimmen. Tatsächlich gilt folgendes Analogon von Igusas „Fundamentallemma" [6].

Satz. *Der Ring $A^{(4)}(\Gamma_n)$ ist die Normalisierung von $B(\Gamma_n)$.*

Die Aussage ist gleichbedeutend mit
1) Jede Modulfunktion ist rational durch Thetareihen darstellbar.
2) Die Thetareihen $\vartheta_S(Z)$ haben keine gemeinsame Nullstelle.

Zum Beweis benutzt man die Eisensteinreihen

$$E_{r,n}(Z)=\sum \det(CZ+D)^{-r}.$$

Summiert wird über ein Vertretersystem aller Linksnebenklassen der durch $C=0$ definierten Untergruppe von Γ_n. Die Eisensteinreihe konvergiert für $r>n+1$ und stellt für gerades r eine von Null verschiedene Modulform vom Gewicht r dar. Aus dem Siegelschen Hauptsatz über quadratische Formen folgt, daß $E_{r,n}(Z)$, $r\equiv 0 \bmod 4$ sogar in $B(\Gamma_n)$ enthalten ist (s. [13]).

Siegel hat in [12] gezeigt, daß sich jede Modulfunktion rational durch Eisensteinreihen ausdrücken läßt, damit ist 1) bereits bewiesen.

Es bleibt zu zeigen, daß die Eisensteinreihen keine gemeinsame Nullstelle haben. Sei Z_0 eine Nullstelle für alle Eisensteinreihen $E_{r,n}(Z)$, $r\equiv 0 \bmod 4$. Wir können annehmen, daß Z_0 im Siegelschen Fundamentalbereich der Modulgruppe Γ_n enthalten ist, das bedeutet insbesondere

$$|\det(CZ_0+D)|\geqq 1 \quad \text{für alle} \quad M\in\Gamma_n.$$

Wir nehmen in der Gleichung

$$E_{r,n}(Z_0)=0$$

den Grenzübergang $r\to\infty$ $(4|r)$ vor. Da die Eisensteinreihe konvergiert, treten in der Reihe nur endlich viele Terme $\det(CZ_0+D)$ vom Betrag 1 auf. Wir bezeichnen diese mit

$$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m.$$

Sicherlich ist $m\geqq 1$ $(C=0, D=E)$. Vollzieht man jetzt den Grenzübergang $r\to\infty$, so folgt

$$\varepsilon_1^r+\ldots+\varepsilon_m^r\to 0 \quad \text{für} \quad r\to\infty(4|r),$$

was aber unmöglich ist.

Literatur

1. Borel, A.: Stable real cohomology of arithmetic groups. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **7**, 235—272 (1974)
2. Borel, A.: Algebraic groups and discrete subgroups. Proc. of the int. cong. of math. Vancouver (1974)
3. Freitag, E.: Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe. Inv. math. **30**, 181—196 (1975)
4. Freitag, E.: Der Körper der Siegelschen Modulfunktionen. Erscheint in den Hamb. Abh.

5. Frisch, J.: Prolongement de faisceaux analytiques coherents. Actes cong. internat. meth. 1970, **2**, 619—623 (1971)
6. Igusa, J.I.: On the graded ring of theta-constants. Am. J. Math. **86**, 219—246 (1964)
7. Maaß, H.: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch Poincarésche Reihen. Math. Ann. **123**, 125—151 (1961)
8. Maaß, H.: Die Multiplikatorsysteme zur Siegelschen Modulgruppe. Nachr. der Akad. der Wiss. in Göttingen, Jahrgang 1964, Nr. 11
9. Matsushima, Y.: On Betti numbergs of compact, locally symmetric Riemannian manifolds. Osaka Math. J. **14**, 1—20 (1962)
10. Milnor, J., Husemoller, D.: Symmetric bilinear forms. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
11. Resnikoff, H.: Automorphic forms of singular weight are singular forms. Math. Ann. **215**, 173—193 (1975)
12. Siegel, C.L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939)
13. Witt, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. math. Sem. Hamburg **14**, 223—337 (1941)

Eingegangen am 16. August 1976, und in revidierter Form 5. März 1977