Math. Z. 156, 141–155 (1977)

Mathematische Zeitschrift

Die Invarianz gewisser von Thetareihen erzeugter Vektorräume unter Heckeoperatoren

Eberhard Freitag

Fachbereich Mathematik der Universität, Saarstraße 21, D-6500 Mainz, Bundesrepublik Deutschland

§1. Einführung in den Problemkreis

Sei

$$S[g]=g'Sg=\sum_{1\leqq i,j\leqq m} s_{ij}\,g_i\,g_j$$

eine positiv definite quadratische Form. In der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen interessiert man sich für die Anzahl $A(S,t)$ aller Darstellungen

$$t=S[g], \qquad g\in\mathbb{Z}^n$$

einer gegebenen Zahl t durch S.

Im folgenden setzen wir stets voraus

1) Die Anzahl der Variablen ist gerade, $m=2r$,

2) $S[g]\equiv 0 \bmod 2$ für $g\in\mathbb{Z}^m$,

(d.h. S ist ganz und die Diagonalelemente sind sogar gerade).

Die Bedingung 2) stellt für rationale Matrizen S keine Einschränkung der Allgemeinheit dar, denn es gilt

$$A(nS,nt)=A(S,t).$$

Unter der Stufe $q(S)$ der Form S versteht man die kleinste natürliche Zahl, so daß

$$q(S)\,S^{-1}$$

gerade ist, also der obigen Bedingung 2) genügt.

Wir fixieren nun eine natürliche Zahl q und betrachten alle Formen S, deren Stufe diese Zahl teilt $(q(S)|q)$. Nach einem Satz von Hermite zerfallen diese Formen in endlich viele unimodulare Klassen

$$\{S[U]=U'SU,\ U\in\mathrm{Gl}(m,\mathbb{Z})\}.$$

Die Darstellungsanzahlen $A(S,t)$ faßt man in einer (zunächst formalen) Thetareihe

$$\vartheta(S,z)=\sum_{t=0}^{\infty} A(S,t)^{\pi i t z}=\sum_{g\in\mathbb{Z}^m} e^{\pi i S[g]z}$$

zusammen. Da die Thetareihen bezüglich unimodularer Transformation $S\to U'SU$ invariant sind, bilden die endlichen Linearkombinationen

$$\sum c_S\,\vartheta(S,z),\qquad S=S^{(m)},\qquad q(S)/q$$

einen endlichdimensionalen Vektorraum. Es ist zweckmäßig, diesen Raum noch weiter aufzuspalten. Jeder Form S, deren Stufe q teilt, kann man einen multiplikativen Charakter modulo q zuordnen:

$$\varepsilon_S\colon\ (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*\to\{1,-1\},$$

$$\varepsilon_S(d)=(\operatorname{sgn} d)^r\left(\frac{(-1)^r\det S}{d}\right).$$

Dabei ist $(-)$ das Legendresymbol.

Wir fixieren nun neben q auch noch einen multiplikativen Charakter

$$\varepsilon\colon\ (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*\to\{1,-1\}.$$

Mit $B_r(q,\varepsilon)$ wird der endlichdimensionale Vektorraum bezeichnet, der von allen Thetareihen

$$\vartheta(S,z),\qquad S=S^{(2r)},\qquad q(S)\,|\,q,\qquad \varepsilon=\varepsilon_S$$

erzeugt wird.

Definition. *Eine formale Reihe*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a(n)\,e^{2\pi i n z}$$

ist von multiplikativem Typus (in Abhängigkeit von q und ε), falls folgende Bedingungen erfüllt sind

a) $a(1)=1$,

b) $a(m)\,a(n)=\sum\limits_{d\,|\,(m,n)}\varepsilon(d)\,d^{r-1}\,a\left(\dfrac{mn}{d^2}\right)$ *für* $(m,q)=(n,q)=1$.

Das arithmetische Hauptergebnis dieser Arbeit läßt sich besonders einfach formulieren, wenn ε ein primitiver Charakter ist, wenn es also keinen echten Teiler q_0 von q gibt, so daß ε schon modulo q_0 definiert ist. Dann gilt nämlich

Der Raum $B_r(q,\varepsilon)$ (ε primitiv) wird von Reihen von multiplikativem Typus erzeugt.

Der allgemeine Fall ist komplizierter. Wenn ε nicht primitiv ist, kann in $B_r(q,\varepsilon)$ eine Reihe von 0 verschieden sein, selbst wenn alle Koeffizienten $a(n)$, $(n,q)=1$ verschwinden. Es ist daher zweckmäßig, jeder Reihe $f\in B_r(q,\varepsilon)$ die reduzierte Reihe

$$f^{\text{red}}(z)=\sum_{(n,q)=1} a(n)\,e^{2\pi i n z}$$

zuzuordnen. Dann gilt allgemein:

Der Raum

$$B_r^{\text{red}}(q,\varepsilon)=\{f^{\text{red}}, f\in B_r(q,\varepsilon)\}$$

wird von Reihen von multiplikativem Typus erzeugt.

Es ist bis heute nicht möglich, den multiplikativen Aufbau der Darstellungsanzahlen quadratischer Formen rein arithmetisch zu begründen. In diesem Zusammenhang sei auf das Buch von Eichler [3] verwiesen.

Einen funktionentheoretischen Zugang zu diesem Problemkreis verdankt man E. Hecke. Er beruht darauf, daß die Reihen $f(z)\in B_r(q,\varepsilon)$ in der oberen Halbebene $(\operatorname{Im} z>0)$ konvergieren und dem Transformationsverhalten

$$f(Mz)=\varepsilon(d)(cz+d)^r f(z)$$

für alle gebrochen linearen Substitutionen

$$Mz=\frac{az+b}{cz+d}$$

aus der Gruppe

$$\Gamma_0(q)=\{M\in Sl(2,\mathbb{Z}), c\equiv 0 \bmod q\}$$

genügen.

Allgemein heißt eine Funktion mit diesem Transformationsverhalten Modulform der Stufe q zum Charakter ε, wenn sie in der oberen Halbebene und in den Spitzen von $\Gamma_0(q)$ regulär ist. Der Vektorraum dieser Modulformen wird mit $[\Gamma_0(q), r, \varepsilon]$ bezeichnet. Er ist endlichdimensional und es gilt

$$B_r(q,\varepsilon)\subset[\Gamma_0(q), r, \varepsilon].$$

Für eine beliebige natürliche Zahl n definiert man den Heckeschen Operator

$$T(n)=T(n,q,\varepsilon):\ [\Gamma_0(q), r, \varepsilon]\to[\Gamma_0(q), r, \varepsilon]$$

durch

$$f\,|\,T(n)(z)=n^{r-1}\sum_{\substack{ad=n\\ b \bmod d\\ d>0}} \varepsilon(a)\,d^{-r} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Die Wirkung dieses Operators auf die Fourierkoeffizienten $a(\nu)$ einer Modulform f läßt sich leicht bestimmen.

$$f\,|\,T(n)(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\ \sum_{d\,|\,(\nu,n)} \varepsilon(d)\,d^{r-1}\,a\left(\frac{n\nu}{d^2}\right)e^{2\pi i\nu z}$$

Insbesondere ist $a(n)$ der erste Fourierkoeffizient von $f|T(n)$. Es gilt die fundamentale Beziehung

$$T(n)\,T(m)=\sum_{d/(m,n)}\varepsilon(d)\,d^{r-1}\,T\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Petersson hat gezeigt, daß jeder lineare Teilraum von $[\Gamma_0(q), r, \varepsilon]$, welcher unter allen Heckeoperatoren $T(n)$, $(n,q)=1$ invariant ist, eine Basis von simultanen Eigenfunktionen besitzt [7].

$$f|T(n)=\lambda(n)f \quad \text{für } (n,q)=1.$$

Offensichtlich sind die normierten Eigenfunktionen $(a(1)=1)$ multiplikativ im Sinne unserer obigen Definition.

1.1. Hauptsatz. *Der Vektorraum $B_r(q,\varepsilon)$ wird durch die Operatoren $T(n)$, $(n,q)=1$, in sich überführt.*

Interessante Hinweise zur Geschichte dieses Satzes, welcher in vielen Spezialfällen schon bekannt ist, findet man in [4], Chapter III, § 8. Besonders hervorzuheben ist der berühmte Satz von Eichler, daß im Spezialfall r gerade, q prim, $\varepsilon=\varepsilon_0$ Hauptcharakter, sogar $B_r(q,\varepsilon)=[\Gamma_0(q), r, \varepsilon]$ gilt, wenn man von den endlich vielen Primzahlen, für die der Körper der Modulfunktionen hyperelliptisch ist, absieht. In diesem Zusammenhang ist auch Siegels Theorie über positiv definite quadratische Formen von Bedeutung. Aus seinem Hauptsatz folgt, daß gewisse Eisensteinreihen, deren Entwicklungskoeffizienten ja multiplikative Eigenschaften haben, linear aus Thetareihen kombiniert werden können.

Bekanntlich muß man in der Siegelschen Theorie allgemeiner Darstellungen von semipositiven Formen $T=T^{(g)}$ durch S betrachten:

$$S[G]=G'SG=T, \quad G=G^{(m,g)} \quad \text{ganz.}$$

Ein Grund mag hierin liegen, daß erst die Gesamtheit der verallgemeinerten Darstellungsanzahlen $A(S,T)$ die unimodulare Klasse von S eindeutig bestimmt. Siegel hat in seiner Theorie der Modulformen g-ten Grades den diesen verallgemeinerten Darstellungsanzahlen entsprechenden funktionentheoretischen Apparat geschaffen.

Wir werden das Hauptergebnis dieser Arbeit auf die Thetareihen g-ten Grades verallgemeinern und durch einen Induktionsschluß von g auf $g-1$ beweisen, wobei als Induktionsbeginn ein beliebiger Grad $g>m=2r$ gewählt werden kann.

Es scheint in der Literatur nicht viele Anwendungen der Theorie der höheren Modulformen auf den klassischen Fall $g=1$ zu geben, obwohl man dies vom Ursprung dieser Theorie eigentlich erwarten könnte.

Wir geben nun die notwendigen Verallgemeinerungen der bisher verwendeten Begriffe.

1) Jeder positiv definierten quadratischen Form $S=S^{(m)}$ ist die Thetareihe g-ten Grades

$$\vartheta(S,Z)=\sum_{G=G^{(m,g)}\text{ ganz}} e^{\pi i \operatorname{Sp}(S[G]Z)}$$

zugeordnet, welche in der Siegelschen Halbebene

$$S_g = \{Z = Z' = Z^{(g)},\ \operatorname{Im} Z > 0 \text{ (positiv definit)}\}$$

konvergiert. Die Thetareihen

$$\vartheta(S, Z), \qquad S = S^{(2r)},\ q(S)\,|\,q,\ \varepsilon = \varepsilon_S$$

erzeugen einen endlich dimensionalen Vektorraum $B_r^{(g)}(q, \varepsilon)$.

2) Die Gruppe $\Gamma_0^{(g)}(q)$ besteht aus allen ganzen symplektischen Matrizen

$$M \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}) \qquad \left(M' I M = I,\ I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\right),$$

welche der Bedingung

$$C \equiv 0 \bmod q, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

genügen.

3) Eine Modulform g-ten Grades vom Gewicht r der Stufe q und zum Charakter ist eine holomorphe Funktion

$$f: S_g \to \mathbb{C}$$

mit dem Transformationsverhalten

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \varepsilon(\det D) \det(CZ+D)^r f(Z) \qquad \text{für } M \in \Gamma_0^{(g)}(q).$$

Regularitätsbedingungen in den Spitzen sind im Falle $g > 1$ nicht vonnöten. Die Gesamtheit dieser Modulformen bildet einen endlich dimensionalen Vektorraum $[\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon]$, welcher $B_r^{(g)}(q, \varepsilon)$ umfaßt [2].

4) *Verallgemeinerte Heckeoperatoren.* Sei M eine $2g$-reihige ganze Matrix mit folgenden beiden Eigenschaften

a) $M' I M = n I,\ (n, q) = 1,$

b) $C \equiv 0 \bmod q,\ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$

Die bezüglich $\Gamma^{(g)}(q)$ gebildete Doppelnebenklasse von M zerfällt in endlich viele Linksnebenklassen:

$$\Gamma^{(g)}(q) \cdot M \cdot \Gamma^{(g)}(q) = \bigcup_j \Gamma^{(g)}(q) M_j.$$

Offenbar wird durch die Zuordnung

$$f(Z) \to \sum \varepsilon(\det D_j) \det(C_j Z + D_j)^{-r} f(M_j Z)$$

eine lineare Abbildung von $[\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon]$ in sich definiert, welche nicht von der Wahl der Repräsentanten M_j abhängt.

Die von all diesen Operatoren erzeugte Algebra wird mit

$$H^{(g)} = H_r^{(g)}(q, \varepsilon)$$

bezeichnet. Die Heckeschen $T(n)$-Operatoren, $(n, q) = 1$, sind in $H^{(1)}$ enthalten.

1.2. „Verallgemeinerter Hauptsatz“. *Der Raum $B_r^{(g)}(q,\varepsilon)$ wird durch die Operatoren der Algebra $H^{(g)}$ in sich überführt.*

Beweisskizze. Der Schluß von g auf $g-1$ erfolgt mit Hilfe des Siegelschen Φ-Operators

$$[\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon] \to [\Gamma_0^{(g-1)}(q), r, \varepsilon],$$

welcher durch den Grenzprozeß

$$f/\Phi(Z) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{f}\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & \mathrm{it}\end{pmatrix}$$

definiert ist.

Dieser Operator führt Thetareihen in Thetareihen über. Um den Induktionsschluß durchführen zu können, benötigt man folgenden Satz, welcher im Falle $q=1$ von Žarkovskaya bewiesen wurde [9].

Ist $W \subset [\Gamma_g, q, \varepsilon]$ ein unter H_g invarianter Unterraum, so ist $W|\Phi$ unter H_{g-1} invariant.

Als Induktionsbeginn soll, wie schon erwähnt, eine beliebige Zahl $g>m=2r$ dienen. Die Bedeutung dieser Schranke wird sichtbar, wenn man beachtet, daß sich im Falle $g>m$ nur singuläre Matrizen $T=T^{(g)}$ durch eine Form $S=S^{(m)}$ darstellen lassen.

$$G'SG = T \Rightarrow \det T = 0.$$

Die semipositive Matrix T ist dann unimodular äquivalent zu einer Matrix vom Typ $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ und die Darstellungen von T durch S entsprechen umkehrbar eindeutig den Darstellungen von T_1 durch S.

In der Theorie der singulären Modulformen beweist man das funktionentheoretische Analogen dieses Sachverhalts [5].

Der Φ-Operator ist injektiv für $g>2r$.

Wie ich im Falle $q=1$ an anderer Stelle schon ausgeführt habe [6], folgt hieraus mit einer ganz einfachen und elementaren Schlußweise

1.3. Theorem. *Im Falle $g>2r$ gilt*

$$[\Gamma^{(g)}, r, \varepsilon] = B_r^{(g)}(q,\varepsilon).$$

§ 2. Darstellung singulärer Modulformen als Linearkombinationen von Thetareihen

Für den Beweis des am Ende der Einleitung ausgesprochenen Satzes benötigen wir

2.1. Hilfssatz. *Sei $S=S^{(m)}$ eine gerade positiv definite quadratische Form mit der Eigenschaft*

$$\vartheta(S,Z) \in [\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon].$$

Dann gilt

a) $m=2r$,

b) $q(S)|q, \varepsilon=\varepsilon_S$.

Beweis. Mit Hilfe des Φ-Operators führt man die Aussage sofort auf den Fall $g=1$ zurück. Nicht trivial ist lediglich die Teilbarkeitsaussage $q(S)|q$. Wir berechnen $\vartheta(S, Mz)$ auf zwei verschiedene Weisen für die Matrix

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -q & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Thetatransformationsformel

$$\vartheta(S, -z^{-1})=\left(\frac{z}{i}\right)^r \sqrt{\det S^{-1}}\,\vartheta(S^{-1}, z).$$

Beachtet man, daß die Substitution $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -q & 1\end{pmatrix}$ in der Gruppe $\Gamma_0(q)$ liegt, so erhält man auf der einen Seite

$$\begin{aligned}\vartheta(S, Mz)&=\vartheta\left(S, \begin{pmatrix}1 & 0\\ -q & 1\end{pmatrix}(-z^{-1})\right)=(qz^{-1}+1)^r\,\vartheta(S, -z^{-1})\\ &=\sqrt{\det S^{-1}}\left(\frac{z}{i}\right)^r (qz^{-1}+1)^r\,\vartheta(S^{-1}, z).\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\vartheta(S, Mz)=\vartheta(S, -(z+q)^{-1})=\left(\frac{z+q}{i}\right)^r \sqrt{\det S^{-1}}\,\vartheta(S^{-1}, z+q).$$

Es folgt

$$\vartheta(S^{-1}, z)=\vartheta(S^{-1}, z+q).$$

Die Matrix qS^{-1} ist daher gerade.

Wir wollen nun zeigen, daß sich eine beliebige Modulform

$$f\in[\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon], \qquad g>2r$$

als Linearkombination von Thetareihen darstellen läßt. Mit $S_1, \dots, S_h$ werde ein Vertretersystem der unimodularen Klassen aller positiven geraden Formen $S=S^{(2r)}$; $q(S)|S$, $\varepsilon=\varepsilon_S$, bezeichnet.

Ist

$$f(Z)=\sum a(T)\,e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}=\sum_{\nu=1}^{h} C_\nu\cdot\vartheta(S_\nu, Z)$$

eine Darstellung von f als Linearkombination von Thetareihen, so gilt offenbar

$$a\begin{pmatrix}S_\mu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\sum_{\nu=1}^{h} C_\nu A(S_\nu, S_\mu) \qquad \text{für } 1\leqq\nu\leqq h.$$

Zu summieren ist über alle T_0, T_1, so daß die Matrix

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix} T & T_1' \\ T_1 & T_0 \end{pmatrix}$$

gerade und semipositiv ist. Wir bestimmen die Funktion A_T im Spezialfall $T=S$. Wenn der Koeffizient

$$a(\tilde{T}), \qquad \tilde{T}=\begin{pmatrix} S & T_1' \\ T_1 & T_0 \end{pmatrix}$$

von 0 verschieden ist, so gilt nach Wahl von ρ:

$$\tilde{T}=U'\begin{pmatrix} T^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U; \qquad U\in \mathrm{Gl}(g,\mathbb{Z}),\ T^*=T^*(\rho)\geqq 0.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$S=G'T^*G; \qquad U=\begin{pmatrix} * & * \\ * & G \end{pmatrix},\ G=G^{(\rho)}.$$

Hieraus folgt $\det T^*\neq 0$. Beachtet man

$$a(\tilde{T})=a\begin{pmatrix} T^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq 0,$$

so erhält man

$$\det T^*\geqq \det S$$

wegen der geforderten Minimalität von $\det S$. Die Matrizen S und T^* sind demnach unimodular äquivalent und wir erhalten

$$\tilde{T}\sim\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Funktion A_S bestimmt

$$A_S(W)=a\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\sum_{\begin{pmatrix} S & T_1' \\ T_1 & T_0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(T_0 W)}.$$

Die in der Summationsbedingung auftretenden Matrizen kann man bestimmen. Sie sind alle von der Form

$$\begin{pmatrix} S & G' \\ G & S[G] \end{pmatrix}, \qquad G \text{ ganz.}$$

Wir erhalten schließlich

$$\frac{A_S(W)}{a\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}=\sum_{G\,\mathrm{ganz}} e^{\pi i\,\mathrm{Sp}(S[G]W)}.$$

Die Behauptung folgt nun aus Hilfssatz 2.1. Eine auf der Hand liegende Verallgemeinerung des Darstellungssatzes besagt:

2.2. Satz. *Sei $g+h>2r$ $(h\geqq 0)$. Eine Modulform $f\in[\Gamma_0^{(g)}(q),r,\varepsilon]$ ist genau dann Linearkombination von Thetareihen*

$$\vartheta(S,Z);\qquad S=S^{(2r)},\ q(S)|q,\ \varepsilon=\varepsilon_S,$$

falls sie im Bild des Operators

$$\Phi^h\colon [\Gamma_0^{(g+h)}(q),r,\varepsilon]\to[\Gamma_0^{(g)}(q),r,\varepsilon]$$

liegt.

Der Darstellungssatz bekommt einen besonders prägnanten Ausdruck, wenn man zum projektiven Limes

$$A_r(q,\varepsilon)=\varprojlim\,[\Gamma_0^{(g)}(q),r,\varepsilon]$$

übergeht.

2.3. *Bemerkung: Die kanonische Projektion stiftet Isomorphismen*

$$A_r(q,\varepsilon)\xrightarrow{\sim}[\Gamma_0^{(g)}(q),r,\varepsilon]\qquad \text{für}\ \ g>2r.$$

Die Dimension dieses Raumes ist gleich der Anzahl aller Klassen von positiven geraden Formen $S=S^{(2r)}$; $q(S)|q$, $\varepsilon=\varepsilon_S$.

Wir betrachten nun speziell den Hauptcharakter $\varepsilon=\varepsilon_0$. Die direkte Summe

$$A(q)=\bigoplus_{r=0}^{\infty}A_r(q,\varepsilon_0)$$

ist eine graduierte Algebra mit sehr einfacher Struktur.

2.4. Satz. *Die Algebra $A(q)$ ist ein Polynomring*

$$A(q)=\mathbb{C}[\vartheta_S].$$

Dabei durchlaufe S ein Vertretersystem aller Klassen irreduzibler positiver Formen

$$S;\quad q(S)|q;\qquad \varepsilon_S=\varepsilon_0.$$

Eine Form S heiße dabei irreduzibel, wenn sie nicht unimodular äquivalent zu einer Form vom Typ

$$\begin{pmatrix}S_1 & 0\\ 0 & S_2\end{pmatrix};\qquad S_\nu=S_\nu^{(r_\nu)},\ r_\nu>0\ \text{für}\ \nu=1,2$$

ist. Mit ϑ_S wird dasjenige Element von $A(q)$ bezeichnet, das durch die Folge der Thetareihen $\vartheta(S,Z^{(g)})$ definiert wird.

§3. Vertauschung von Heckeoperatoren und Φ-Operator

Wie in der Einführung schon erwähnt, stammt das gesuchte Vertauschungsgesetz im Falle $q=1$ von Žarkovskaya. Der Fall einer beliebigen Stufe läßt sich ähnlich behandeln, ein Teil der Rechnungen läßt sich sogar auf den Fall $q=1$ zurückführen. Dazu benötigt man die abstrakte Heckealgebra $\tilde{H}^{(g)}(q)$, an deren Definition wir kurz erinnern.

Zunächst betrachtet man den von der Menge aller Doppelnebenklassen

$$\Gamma_0^{(g)}(q)\, M\, \Gamma_0^{(g)}(q); \qquad M \text{ ganz, } M' I M = nI,\ (n,q)=1$$

erzeugten freien $\mathbb{C}$-Modul. Wir definieren das Produkt zweier Doppelnebenklassen, wobei wir zur Abkürzung $\Gamma=\Gamma_0^{(g)}(q)$ setzen.

$$(\Gamma M \Gamma)(\Gamma N \Gamma)=\sum n_p\, \Gamma P \Gamma.$$

Hierbei ist über die endlich vielen Doppelnebenklassen

$$\Gamma P \Gamma \subset \Gamma M \Gamma N \Gamma$$

zu summieren. Die Multiplizitäten n_p sind wie folgt erklärt:

Seien

$$\Gamma M \Gamma=\bigcup_i \Gamma M_i; \quad \Gamma N \Gamma=\bigcup_j \Gamma N_j$$

disjunkte Zerlegungen in Linksnebenklassen. Dann ist n_p die Anzahl aller Paare (i,j) mit

$$\Gamma M_i N_j=\Gamma P.$$

Diese Anzahl ist positiv, denn es gilt

$$\Gamma P \subset \Gamma P \Gamma \subset \Gamma M \Gamma N \Gamma=\bigcup \Gamma M \Gamma N_j=\bigcup \Gamma M_i M_j.$$

Auf diese Weise erhält man eine assoziative und sogar kommutative Algebra, eben die abstrakte Heckealgebra $\tilde{H}^{(g)}(q)$. Jeder Doppelnebenklasse ist durch die Formel

$$f(Z)\,|\,T(M)=\sum \varepsilon(\det D_\nu)\det(C_\nu Z+D_\nu)^{-r} f(MZ)$$

ein Operator

$$T(M)=T_r(M,q,\varepsilon)\colon\ [\Gamma_0^{(g)}(q),r,\varepsilon]\to[\Gamma_0^{(g)}(q),r,\varepsilon]$$

zugeordnet. Aus den Voraussetzungen folgt die Teilerfremdheit von q und $\det D_\nu$. Die Zuordnung $\Gamma M \Gamma \to T(M)$ stiftet einen Homomorphismus

$$\tilde{H}^{(g)}(q)\to H_r^{(g)}(q,\varepsilon)$$

auf eine Algebra von Operatoren. Jedes Element $T\in\tilde{H}^{(g)}(q)$ definiert also einen Endomorphismus von $[\Gamma_0^{(g)}(q),r,\varepsilon]$. Wenn Verwechslungen nicht zu befürchten sind, verwenden wir die Bezeichnung

$$f \to f|T \qquad \text{für } f \in [\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon].$$

3.1. Hilfssatz. *Die Zuordnung*

$$\Gamma_0^{(g)}(q) M \Gamma_0^{(g)}(q) \to \Gamma^{(g)} M \Gamma^{(g)}; \qquad \Gamma^{(g)} := \Gamma_0^{(g)}(1) = \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})$$

stiftet einen injektiven Homomorphismus

$$\tilde{H}^{(g)}(q) \to \tilde{H}^{(g)}(1).$$

Das Bild besteht aus den Linearkombinationen aller Doppelnebenklassen

$$\Gamma^{(g)} M \Gamma^{(g)}; \qquad M' I M = nI, \ (n, q) = 1, \ M \text{ ganz}.$$

Zusatz. *Ist*

$$\Gamma_0^{(g)}(q) M \Gamma_0^{(g)}(q) = \bigcup \Gamma_0^{(g)}(q) M_\nu$$

eine disjunkte Zerlegung, $(n, q) = 1$, so gilt auch

$$\Gamma^{(g)} M \Gamma^{(g)} = \bigcup \Gamma^{(g)} M_\nu \ \text{(disjunkt)}.$$

In Shimuras Buch „Arithmetic Theory of Automorphic Functions" [8] wird die Heckealgebra von Kongruenzgruppen der Gruppe $\mathrm{Sl}(g, \mathbb{Z})$ untersucht. Lemma 3.29 und Proposition 3.30 aus diesem Buch lassen sich auf die symplektische Gruppe übertragen. Neben einfachen gruppentheoretischen Argumenten wird nur der Approximationssatz verwendet, welcher ja auch für die Gruppe $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})$ gültig ist:

Die natürliche Abbildung $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ ist surjektiv.

Wir können also als bewiesen betrachten, daß die in Hilfssatz 3.1 definierte Zuordnung einen Homomorphismus definiert und daß dieser injektiv ist. Auch der Zusatz ist für die Gruppe $\mathrm{Sl}(g, \mathbb{Z})$ anstelle von $\mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})$ bei Shimura bewiesen (Lemma 3.29 (5)).

Es bleibt zu zeigen, daß jede Doppelnebenklasse $\Gamma^{(g)} M \Gamma^{(g)}$, $M' I M = nI$, $(n, q) = 1$ durch eine Matrix $M \in \Gamma_0^{(g)}(q)$ repräsentiert werden kann. Tatsächlich existiert ein Repräsentant von der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Um das Vertauschungsgesetz formulieren zu können, benötigt man die genaue Struktur der Heckealgebra. Bekanntlich wird $\tilde{H}^{(g)} = \tilde{H}^{(g)}(1)$ von den p-Komponenten erzeugt. Eine p-Komponente (p prim) ist die von allen Doppelnebenklassen

$$\Gamma^{(g)} M \Gamma^{(g)}, \qquad M' I M = p^l I$$

erzeugte Teilalgebra $\tilde{H}_p^{(g)}$. Zwischen Operatoren aus verschiedenen p-Komponenten besteht außer der Vertauschbarkeit keine Relation. Jede Familie von Homomorphismen $\varphi_p\colon \tilde{H}_p^{(g)} \to R$ in einem kommutativen Ring entsteht also durch Einschränkung eines globalen Homomorphismus $\varphi\colon \tilde{H}^{(g)} \to R$.

Wir ordnen nun jeder Linksnebenklasse

$$\Gamma^{(g)} M, \qquad M' I M = p^l I$$

eine rationale Funktion L_M in $g+1$ Unbestimmten $X_0, \ldots, X_g$ zu. Zunächst kann man einen Repräsentanten M der Form

$$M = \begin{pmatrix} p^l A'^{-1} & * \\ 0 & A \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} p^{l_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p^{l_g} \end{pmatrix}$$

finden. Die Diagonalelemente von A sind eindeutig bestimmt. Die Funktion

$$L_M(X_0, \ldots, X_g) = p^{-\sum\limits_{\nu=1}^{g} \nu l_\nu} X_0^{-1} X_1^{l_1} \ldots X_g^{l_g}$$

hängt daher nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.

Jeder Doppelnebenklasse

$$\Gamma^{(g)} M \Gamma^{(g)} = \bigcup \Gamma^{(g)} M_\nu$$

ordnet man die Funktion

$$P_M = \sum_\nu L_{M_\nu}$$

zu. Offenbar stiftet die Zuordnung $M \to P_M$ einen Homomorphismus

$$\tilde{H}_p^{(g)} \to \mathbb{C}[X_0, X_0^{-1}, \ldots, X_g, X_g^{-1}].$$

Das Bild von $\tilde{H}_p^{(g)}$ ist schon im Invariantenring einer gewissen Gruppe W_g enthalten. Diese wird erzeugt von

a) allen Permutationen der Variablen $X_1, \ldots, X_g$,

b) den Operatoren w_j $(1 \leqq j \leqq g)$.

$$w_j(X_\nu) = \begin{cases} X_0 X_j^{-1} & \text{für } \nu = 0 \\ X_j^{-1} & \text{für } \nu = j \\ X_\nu & \text{für } \nu \neq 0, j. \end{cases}$$

3.2. Satz. *Der Homomorphismus*

$$\tilde{H}_p^{(g)} \to \mathbb{C}[X_0, X_0^{-1}, \ldots, X_g, X_g^{-1}]$$

ist injektiv. Der Invariantenring $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_g^{-1}]^{W_g}$ *entsteht aus dem Bild von* $H_p^{(g)}$ *durch Lokalisierung nach dem multiplikativen System*

$$P_{p^l E} = p^{-l\frac{g(g+1)}{2}} X_0^{-2l} X_1^l \ldots X_g^l.$$

Die p-Komponenten $\tilde{H}_p^{(g)}$, $p \mid q$, sind wegen Hilfssatz 3.1 auch in $\tilde{H}^{(g)}(q)$ eingebettet und sie erzeugen diese Algebra. Der Operator $T(p^l E)$ wirkt auf $[\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon]$ einfach durch Multiplikation mit einem von 0 verschiedenen Skalar.

3.3. Satz. *Durch die Vorschrift*

$$X_\nu X X_\nu \quad \textit{für } 0 \leqq \nu < g, \qquad X_g \to \varepsilon(p^r)\, p^{g-r}$$

wird ein surjektiver Homomorphismus

$$\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_g^{-1}]^{W_g} \to \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_{g-1}^{-1}]^{W_{g-1}}$$

definiert, welcher das Bild von $\tilde{H}_p^{(g)}$ in das Bild von $\tilde{H}_p^{(g-1)}$ abbildet. Hierdurch wird ein Homomorphismus

$$\tilde{H}^{(g)}(q) \to \tilde{H}^{(g-1)}(q), \qquad T \to T^*$$

mit der Eigenschaft

$$(f\,|\,T)\,|\,\Phi = (f\,|\,\Phi)\,T^* \qquad f \in [\Gamma_0^{(g)}(q), r, \varepsilon]$$

induziert.

Da die Operatoren $T(p^l E)$ im Grundkörper der Algebra liegen, folgt insbesondere, daß die Zusammensetzung

$$\tilde{H}^{(g)}(q) \to \tilde{H}^{(g-1)}(q) \to H_r^{(g-1)}(q, \varepsilon)$$

surjektiv ist.

Zum Beweis von Satz 3.3 hat man zu beachten, daß jede Linksnebenklasse

$$\Gamma_0^{(g)}(q)\, M, \qquad M' I M = p^l M, \; p \nmid q$$

einen Repräsentanten der Form

$$M = \begin{pmatrix} p^l A^{-1} & * \\ 0 & A \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} p^{l_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p^{l_g} \end{pmatrix}$$

besitzt.

Ist $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ zunächst ein beliebiger Repräsentant, so ist der größte gemeinsame Teiler der Komponenten von C und D eine p-Potenz p^ν. Offenbar ist $(p^{-\nu} C', -p^{-\nu} A')$ ein symmetrisches primitives Paar und daher die zweite Zeile einer ganzen symplektischen Matrix.

$$N = \begin{pmatrix} * & * \\ p^{-\nu} C', & -p^{-\nu} A' \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}).$$

Da p zu q teilnehmend ist, gilt sogar $N \in \Gamma_0^{(g)}(q)$.

Man kann also insbesondere bei der Zerlegung einer Doppelnebenklasse

$$\Gamma_0^{(g)}(q)\, M\, \Gamma_0^{(g)}(q) = \bigcup \Gamma_0^{(g)} M$$

Repräsentanten M_ν von dem speziellen Typus wählen. Aus dem Zusatz von Hilfssatz 3.1 folgt

$$\Gamma^{(g)} M \Gamma^{(g)} = \bigcup \Gamma^{(g)} M_\nu.$$

Mit einer derartigen Zerlegung wird auch in [9] gearbeitet und es ist nun möglich, den dortigen Beweis nahezu wörtlich zu übernehmen.

Literatur

1. Andrianov, A.N.: Rationalitätssätze für Heckereihen und Zetafunktionen der Gruppen Gl_n und Sp_n über lokalen Körpern. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **33**, 466 – 505 (1969)
2. Andrianov, A.N., Maloletkin, G.N.: Das Verhalten von Thetareihen n-ten Geschlechts bei Modulsubstitutionen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **39**, 243 – 258 (1975)
3. Eichler, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952
4. Eichler, M.: The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators, In: Modular functions of one variable I (Antwerp 1972) pp. 75 – 152. Lecture Notes in Mathematics 320. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
5. Freitag, E.: Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe. Inventiones math. **30**, 181 – 196 (1975)
6. Freitag, E.: Stabile Modulformen. Erscheint in den Math. Ann.
7. Petersson, H.: Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung III. Math. Ann. **117**, 277 – 300 (1940/41)
8. Shimura, G.: Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Tokyo-Princeton: Iwanami Shoten Publishers and Princeton University Press 1971
9. Žarkovskaya, N.A.: Siegel-Operator und Hecke-Operatoren. Funkcional'. Analiz. Priloženija **82**, 30 – 38 (1974)

Eingegangen am 22. Oktober 1976

Math. Z. 168, 289–290 (1979)

Mathematische Zeitschrift

Berichtigung zu der Arbeit

„Die Invarianz gewisser von Thetareihen erzeugter Vektorräume unter Heckeoperatoren“

Math. Z. **156**, 141–155 (1977)

Eberhard Freitag

Mathematisches Institut, Im Neuenheimer Feld 288, D-6900 Heidelberg, Bundesrepublik Deutschland

In der Arbeit wurden Modulformen zu reellen Charakteren

$$\varepsilon\colon (\mathrm{Z}/q\mathrm{Z})^* \to \{1, -1\}$$

betrachtet. Herr Andrianov hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß der Beweis der Hauptsätze (1.1) und 1.2) eine Lücke enthält. Dies betrifft jedoch nur den Fall, daß ε nicht der Hauptcharakter ist, und nur auf diesen Fall bezieht sich die nun folgende Korrektur.

Ich gebe zunächst eine korrekte Formulierung der beiden Hauptsätze.

1.1. **Hauptsatz.** *Der Vektorraum $B_r(q,\varepsilon)$ wird durch den Operator $T(n)$, $(n,q)=1$ in sich überführt, sofern die natürliche Zahl n folgender Bedingung genügt*

Ist p eine Primzahl, welche in ungerader Potenz in n aufgeht, so gilt $\varepsilon(p)=1$.

Die analoge Einschränkung betrifft Hauptsatz 1.2:

Die Heckeoperatoren zur Siegelschen Modulgruppe sind ganzen $2g$-reihigen Matrizen mit den Eigenschaften

a) $M'IM=nI$, $(n,q)=1$,

b) $C\equiv 0 \bmod q$, $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}$

zugeordnet. Auch hier darf man nur solche natürlichen Zahlen n zulassen, welche der oben formulierten Bedingung genügen. Man erhält so eine Unteralgebra

$$\hat{H}^{(g)}=\hat{H}^{(g)}(q,\varepsilon)\subset H^{(g)}$$

der vollen Heckealgebra.

0025-5874/79/0168/0289/$01.00

1.2. **„Verallgemeinerter Hauptsatz".** *Der Baum* $B_r^{(g)}(q, \varepsilon)$ *wird durch die Operatoren der Algebra* $\hat{H}^{(g)}$ *in sich überführt, im Falle* $g > r$ *sogar durch alle Heckeoperatoren aus* $H^{(g)}$.

Der Fehler liegt in Satz 3.3. Und zwar ist die dort behauptete Surjektivität falsch im Falle

$$g = r \quad \text{und gleichzeitig } \varepsilon(p) = -1.$$

Richtig ist folgende Version:

3.3. **Satz.** *Sei*

$$A^{(g)} \subset \mathbb{C}[X_0, X_0^{-1}, \dots, X_g, X_g^{-1}]^{W_g}$$

der Unterring aller Invarianten, welche X_0 *nur in gerader Potenz enthalten. Durch die Vorschrift*

$$X_\nu \to X_\nu \quad \text{für } 0 \leqq \nu < g, \qquad X_g \to \varepsilon(p)\, p^{g-r}$$

wird ein surjektiver Homomorphismus

$$A^{(g)} \to A^{(g-1)}, \qquad T \to T^*$$

definiert.

Die Algebra $A^{(g)}$ operiert gemäß Satz 3.2 auf $[\Gamma_0^{(g)}, \mathrm{r}, \varepsilon]$. Die hierdurch definierte Operatoralgebra wird von allen Heckeoperatoren

$$T_M, \qquad M'IM = p^l M, \qquad l \text{ gerade}$$

erzeugt. Obiger Homomorphismus beschreibt das Vertauschungsgesetz dieser Operatoren mit dem Φ-Operator

$$(f|T)|\Phi = (f|\Phi)|T^* \qquad f \in [\Gamma_0^{(g)}, r, \varepsilon].$$

Satz 3.3 ergibt sich leicht aus Zarkovskajas Arbeit [9].

Eingegangen am 19. März 1979