Sonderdruck aus
Jber. Deutsch. Math.-Verein. 79, H.3 (1977) 79–86

Siegelsche Modulfunktionen *)

Von EBERHARD FREITAG in Mainz

Bereits in seiner berühmten Arbeit „Über die analytische Theorie der quadratischen Formen“ aus dem Jahre 1936 zeigte C. L. Siegel, daß sich der dort bewiesene Hauptsatz als eine Identität zwischen analytischen Funktionen mehrerer komplexer Variabler interpretieren läßt.

Diese Formel war der Ausgangspunkt der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen und soll daher auch an den Beginn dieses Berichts gestellt werden.

Eine symmetrische reelle m-reihige Matrix $S = S^{(m)}$ heißt positiv ($S > 0$), falls die ihr zugeordnete quadratische Form positiv definit ist,

$$g'Sg = \sum s_{ij} g_i g_j > 0 \quad \text{für} \quad g \in \mathbb{R}^m - \{0\}.$$

Sei $T = T^{(n)}$ irgendeine weitere symmetrische reelle (n-reihige) Matrix. Dann ist die Anzahl $A(S,T)$ aller ganzen Darstellungen

$$G'SG = T; \; G = G^{(m,n)} \text{ ganz}$$

endlich und sicherlich höchstens dann von 0 verschieden, wenn T semipositiv ist ($T \geqslant 0$).

Die Gesamtheit all dieser Darstellungsanzahlen zu festem S und n können in einer Thetareihe zusammengefaßt werden:

$$\vartheta_S(Z) = \sum_{G^{(m,n)} \text{ganz}} e^{\pi i \operatorname{Sp}(G'SGZ)} = \sum A(S,T) e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}.$$

Dabei sei $Z = Z^{(n)}$ eine symmetrische Matrix von komplexen Variablen. Es ist leicht zu sehen, daß die Thetareihe in der Siegelschen Halbebene

$$S_n = \{Z = Z' = Z^{(n)}, \operatorname{Im} Z > 0\}$$

absolut und lokal gleichmäßig konvergiert.

Der eingangs erwähnte Siegelsche Hauptsatz kann als Identität zwischen gewissen Linearkombinationen von Thetareihen und verallgemeinerten Eisensteinreihen interpretiert werden. Wir wollen uns hier der Einfachheit halber damit begnügen, diese Formel in einem von Witt herausgearbeiteten

*) Bericht für die DMV-Tagung 1976.

Spezialfall zu formulieren. Die Eisensteinreihen haben dann die besonders einfache Gestalt

$$E_{n,r}(Z) = \sum \det(CZ + D)^{-r}.$$

Zu summieren ist hierbei über ein Vertretersystem aller Klassen

$$\{(UC, UD), U \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})\},$$

wobei die Matrizenpaare $C = C^{(n)}, D = D^{(n)}$ folgenden Bedingungen zu genügen haben

a) $C'D = D'C$

b) die Rechteckmatrix (C, D) ist ganz und primitiv, d. h., zu einer quadratischen unimodularen Matrix ergänzbar.

In dem erwähnten Spezialfall des Siegelschen Hauptsatzes werden nur quadratische Formen $S = S^{(m)} > 0$ mit folgenden beiden Eigenschaften betrachtet:

1. S ist unimodular (d. h. S und S^{-1} ganz)
2. S ist gerade, d. h. $g'Sg \equiv 0 \bmod 2$ für $g \in \mathbb{Z}^m$.

Wie Witt[1]) gezeigt hat, existieren solche Formen dann und nur dann, wenn m ein Vielfaches von 8 ist.

Bezeichnet man mit $S_1, \ldots, S_h$ ein Vertretersystem der Klassen

$$\{U'SU, U \in \mathrm{Gl}(m,\mathbb{Z})\}$$

solcher Formen, so lautet die Siegelsche Formel

$$\sum_{\nu=1}^{h} m_\nu \vartheta_{S_\nu}(Z) = E_{n,r}(Z), m = 2r > 2(n+1),$$

$$m_\nu = \frac{A(S_\nu, S_\nu)^{-1}}{A(S_1, S_1)^{-1} + \cdots + A(S_m, S_m)^{-1}}.$$

Die in dieser Identität auftretenden Funktionen genügen gewissen Transformationsformeln, welche zum Begriff der Modulform führen.

Eine in S_n konvergente Fourierreihe der Form

$$f(Z) = \sum_{T = T^{(n)} \geq 0} a(T) e^{\pi i \mathrm{Sp}(TZ)}$$

heißt Modulform n-ten Grades vom Gewicht $r \in \mathbb{Z}$, falls

a) $f(U'ZU) = f(Z)$ *für* $U \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{Z})$

b) $f(-Z^{-1}) = (\det Z)^r f(Z)$

gilt.

---

[1]) Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. d. math. Sem. Univ. Hamburg, **14** (1941) 323–337.

Offensichtlich ist die Eisensteinreihe $E_{n,r}$ eine Modulform vom Gewicht r, aber auch die Thetareihen ϑ_S zu positiven unimodularen geraden Formen $S = S^{(m)}$ sind Modulformen vom Gewicht $r = m/2$, wie aus der allgemeinen Thetatransformationsformel

$$\vartheta_{S^{-1}}(-Z^{-1}) = \det\left(\frac{Z}{i}\right)^{m/2} \det S^{n/2}\, \vartheta_S(Z)$$

folgt. Wenn S unimodular ist, so sind die Formen S und S^{-1} äquivalent!

Die Substitutionen

$$\begin{aligned} &Z \to Z + T, \; T = T' \text{ ganz} \\ &Z \to U'ZU, \; U \text{ unimodular} \\ &Z \to -Z^{-1} \end{aligned}$$

erzeugen die Siegelsche Modulgruppe Γ_n, welche aus allen ganzen symplektischen Substitutionen

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \; M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$$

besteht.

Für Modulformen kann damit das charakteristische Transformationsverhalten

$$f((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) = \det(CZ + D)^r f(Z)$$

gefolgert werden.

Wir bezeichnen den Vektorraum aller Modulformen n-ten Grades vom Gewicht r mit $[\Gamma_n, r]$. Es gilt

$$[\Gamma_n, r] = 0 \text{ für } r < 0, \quad [\Gamma_n, 0] = \mathbb{C}$$

Das Produkt zweier Modulformen ist wieder eine Modulform. Die direkte Summe

$$A(\Gamma_n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} [\Gamma_n, r]$$

ist eine graduierte $\mathbb{C}$-Algebra.

Folgender Satz von W. Baily verschärft fundamentale Endlichkeitssätze von C. L. Siegel.

Satz 1. *Die Algebra $A(\Gamma_n)$ ist endlich erzeugt, ihre Dimension ist $N + 1$, $N = \frac{1}{2}n(n+1)$.*

Jeder endlich erzeugten graduierten Algebra A ist eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte projektive algebraische Varietät proj A zugeordnet. Die Punkte dieser Varietät können mit gewissen homogenen Primidealen $\mathfrak{m} \subset A$ identifiziert werden.

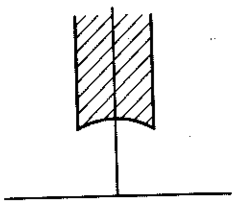
Jedem Punkt $Z \in S_n$ kann man solch ein Ideal $\mathfrak{m}(Z)$ zuordnen.

$$\mathfrak{m}(Z)_r = \{f \in [\Gamma_n, r],\ f(Z) = 0\}.$$

Modulo Γ_n äquivalente Punkte definieren dasselbe Ideal, wir erhalten eine Abbildung

$$S_n/\Gamma_n \to \operatorname{proj} A(\Gamma_n).$$

Diese Abbildung ist injektiv, wie man mit Hilfe der Theorie der Poincaréschen Reihen zeigen kann, aber sie ist nicht surjektiv. Eine projektive Varietät ist ja stets kompakt, wohingegen S_n/Γ_n nicht kompakt ist, wie die Siegelsche Konstruktion eines Fundamentalbereiches zeigt. Dieser Fundamentalbereich verallgemeinert die bekannte Modulfigur:



Einen tieferen Einblick in das Phänomen der Nichtkompaktheit von S_n/Γ_n erhält man mittels des Operators

$$\Phi : [\Gamma_n, r] \to [\Gamma_{n-1}, r],$$

welcher durch die Formeln

$$f|\Phi(Z) = \lim_{t\to\infty} f\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} = \sum_{T = T^{(n-1)} \geq 0} a\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\pi i \operatorname{Sp}(TZ)}$$

definiert ist. Der Φ-Operator ist multiplikativ, gibt also zu einem Ringhomomorphismus

$$\Phi : A(\Gamma_n) \to A(\Gamma_{n-1})$$

Anlaß. Dieser Homomorphismus ist fast surjektiv, wie der folgende Satz von H. Maaß zeigt.

Satz 2. *Der Φ-Operator $[\Gamma_n, r] \to [\Gamma_{n-1}, r]$ ist für alle geraden $r > 2n$ surjektiv.*

Man erhält insbesondere Einbettungen

$$S_j/\Gamma_j \to \operatorname{proj} A(\Gamma_j) \to \operatorname{proj} A(\Gamma_{j+1}) \to \cdots \operatorname{proj} A(\Gamma_n) \quad \text{für} \quad j < n.$$

Der Einfachheit halber wollen wir S_j/Γ_j mit seinem Bild in $\operatorname{proj} A(\Gamma_n)$ identifizieren. Das geometrische Gegenstück zu Satz 1 besagt

Satz 3. *Es gilt*

$$\operatorname{proj} A(\Gamma_n) = S_0/\Gamma_0 \cup \cdots \cup S_n/\Gamma_n \quad (\textit{disjunkte Vereinigung})\,.$$

Die Varietät $\operatorname{proj} A(\Gamma_n)$ (im Falle $n = 0$ ein Punkt) enthält somit S_n/Γ_n als Zariski-offenen Teilraum und stellt eine Kompaktifizierung von S_n/Γ_n dar (Satakekompaktifizierung).

Die genaue Struktur von $A(\Gamma_n)$ ist nur in den Fällen $n = 1$ und 2 genau bekannt.

1) Die Algebra $A(\Gamma_1)$ ist ein Polynomring, erzeugt von den Eisensteinreihen vom Gewicht 4 *und* 6.

2) Die Algebra

$$A^{(2)}(\Gamma_2) = \bigoplus_{r \equiv 0 \bmod 2} [\Gamma_2, r]$$

ist ein Polynomring, erzeugt von den Eisensteinreihen vom Gewicht 4, 6, 10, 12.

Diesen Satz hat erstmals I. Igusa bewiesen. Er hat auch gezeigt, daß man die volle Algebra der Modulformen durch Adjunktion einer Form vom Gewicht 35 erhält.

In den Fällen $n = 1,2$ ist der Körper der Modulfunktionen

$$K(\Gamma_n) = \left\{\frac{f}{g};\ f,g \in [\Gamma_n, r]\right\}$$

insbesondere rein transzendent.

Im Falle $n > 2$ ist die Struktur von $A(\Gamma_n)$ sicherlich komplizierter. Beispielsweise kann $A^{(r_0)}(\Gamma_n)$ für kein r_0 ein Polynomring sein, denn sonst müßte sich $\operatorname{proj} A(\Gamma_n)$ durch den projektiven Raum $P^N\mathbb{C}$ endlich (verzweigt) überlagern lassen. Das ist aber schon durch die Natur der Singularitäten ausgeschlossen. Zwar sind die Singularitäten im endlichen Teil $S_n/\Gamma_n \subset \operatorname{proj} A(\Gamma_n)$ einfache Quotientensingularitäten. Aber im Falle $n \geq 3$ läßt sich keine Umgebung einer Spitze, d. h. eines Punktes im Komplement von S_n/Γ_n durch eine singularitätenfreie Mannigfaltigkeit endlich überlagern.

Auch der Körper der Modulfunktionen $K(\Gamma_n)$ ist allgemein nicht rein transzendent, es treten sogenannte Irregularitäten auf. Jedem algebraischen Funktionenkörper $K \supset \mathbb{C}$ vom Transzendenzgrad N sind gewisse Invarianten $g_1, \ldots, g_N$ zugeordnet, welche für rein transzendente, allgemeiner unirationale Körper verschwinden. Die Invariante g_ν ist definitionsgemäß die Dimension des Vektorraums aller regulären alternierenden Differentialformen vom Grad ν. Ein Körper heißt regulär, wenn $g_1 = \cdots = g_{N-1} = 0$ gilt. Beispielsweise sind die in der Theorie der Hilbertschen Modulfunktionen auftretenden Körper regulär.

Im Falle der Siegelschen Modulgruppe kann man zwar stets

$$g_1 = \cdots = g_{n-1} = 0$$

beweisen, aber die Invarianten g_ν, $n \leq \nu \leq N$ brauchen nicht zu verschwinden.

Satz 4. *Im Falle* $n \equiv 1 \bmod 8$, $n \neq 1,9$ *gilt*

$$g_{N-1}(K(\Gamma_n)) > 0 .$$

Darüber hinaus ist über die Struktur der Algebra $A(\Gamma_n)$ wenig bekannt. Bemerkenswert ist noch

Satz 5. *Die Algebra* $A(\Gamma_n)$, $n \geq 8$, *ist ein faktorieller Ring.*

Wir wollen dies kurz erläutern. Jeder Modulform $f \neq 0$ ist ein Γ_n-invarianter Nullstellendivisor zugeordnet. Im Falle $n \geq 3$ ist die kanonische Projektion $S_n \to S_n/\Gamma_n$ außerhalb einer analytischen Ausnahmemenge der Kodimension ≥ 2 unverzweigt. Die Γ_n-invarianten Divisoren entsprechen daher umkehrbar eindeutig den Divisoren auf S_n/Γ_n. Jeder Divisor läßt sich in Primdivisoren zerlegen.

Die folgende Aussage impliziert offenbar Satz 5

Jeder Divisor auf S_n/Γ_n, $n \geq 8$ *ist der genaue Nullstellendivisor einer Modulform* $f \in [\Gamma_n, r]$, r *geeignet.*

Jedem Divisor auf S_n/Γ_n ist ein Element aus $H^2(S_n/\Gamma_n, \mathbb{R})$, die Chernsche Klasse, zugeordnet.

Die Bestimmung der Kohomologie arithmetischer Gruppen ist ein kompliziertes, nur teilweise gelöstes Problem. Borels Bericht[2]) gibt einen Überblick über den bisherigen Stand der Theorie, welche von Matsushima, Garland u. a. begründet wurde. Wir beschreiben diese Resultate im Spezialfall der Siegelschen Modulgruppe oder allgemeiner einer mit Γ_n kommensurablen Gruppe Γ.

Sei M^p der Vektorraum aller reellen C^∞-Differentialformen vom Grade p auf S_n, welche unter der reellen symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ invariant sind. Jede solche Differentialform ist geschlossen und definiert daher eine Kohomologieklasse in $H^p(S_n/\Gamma, \mathbb{R})$.

Die Abbildung

$$M^p \to H^p(S_n/\Gamma, \mathbb{R})$$

ist für $p \leq n/4$ *ein Isomorphismus.*

Insbesondere gilt

$$H^2(S_n/\Gamma, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \quad \text{für} \quad n \geq 8 .$$

[2]) Proc. of the Int. Congr. Math. Vancouver 1974.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann eine Modulform als Linearkombination von Thetareihen ϑ_S zu positiven unimodularen geraden quadratischen Formen dargestellt werden kann. Der lineare Teilraum von $[\Gamma_n, r]$, den diese Reihen erzeugen, werde mit

$$B_{n,r} \subset [\Gamma_n, r]$$

bezeichnet. Es ist ein bislang ungelöstes Problem, wann diese beiden Vektorräume übereinstimmen.

Man kann zeigen, daß der Ring $A^{(4)}(\Gamma_n)$ die Normalisierung von

$$B(\Gamma_n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} B_{n,r}$$

ist. Im Falle $n = 1,2$ stimmen sogar beide Ringe überein.

Es ist bemerkenswert, daß man die Teilschar $B_{n,r}$ funktionentheoretisch charakterisieren kann.

Satz 6. *Sei $n + h \geq 2r, h \geq 0$ eine ganze Zahl. Die Schar $B_{n,r}$ stimmt mit dem Bild von*

$$\Phi^h : [\Gamma_{n+h}, r] \to [\Gamma_n, r]$$

überein.

Folgerungen

1. $[\Gamma_n, r] = 0$ *für* $n > 2r, r \not\equiv 0 \bmod 4$.
2. *Der Φ-Operator $[\Gamma_n, r] \to [\Gamma_{n-1}, r]$ ist für $n > 2r$ injektiv und für $n > 2r + 1$ sogar ein Isomorphismus.*

Die Stabilität der Vektorräume $[\Gamma_n, r]$ legt es nahe, den projektiven Limes

$$A = \varprojlim A(\Gamma_n)$$

im Sinne graduierter Algebren zu betrachten, d. h.

$$A = \oplus A_r \quad A_r = \lim_n [\Gamma_n, r] = [\Gamma_n, r] \text{ für } n > 2r + 1.$$

Satz 7. *Die Algebra A ist ein Polynomring $A = \mathbb{C}[\vartheta_S]$ in abzählbar vielen Variablen ϑ_S. Dabei durchlaufe S ein Repräsentantensystem irreduzibler positiver unimodularer gerader quadratischer Formen.*

(Eine Form S heißt irreduzibel, wenn sie nicht unimodular äquivalent zu einer Form vom Typ $\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$ ist.)

Bevor wir die Untersuchungen über die Struktur von $A(\Gamma_n)$ abschließen, wollen wir auf die zahlentheoretische Signifikanz dieser Theorie hinweisen. Aus dem Endlichkeitssatz folgt schon die Existenz von algebraischen Beziehungen zwischen $N + 2$ Thetareihen.

Weitere interessante zahlentheoretische Beziehungen kann man aufgrund von Satz 6 erwarten, denn im Bild von Φ^h lassen sich mit Hilfe verallgemeinerter Thetafunktionen (z. B. mit Kugelfunktionen als Koeffizienten) mannigfach Funktionen konstruieren.

Schließlich folgt aus Satz 6, daß die Schar $B_{n,r}$ invariant ist unter den (verallgemeinerten) Heckeoperatoren. Auf deren Definition müssen wir hier aus Platzmangel leider verzichten.

Da die Schar $B_{n,r}$ wegen der Invarianz eine Basis von Eigenformen besitzen muß, existiert im Falle $r \equiv 0 \bmod 4$ insbesondere eine Eigenform $E_{n,r}$ mit von 0 verschiedenem konstanten Fourierkoeffizienten. Genau dies folgt aber auch aus dem Siegelschen Hauptsatz, denn die Eisensteinreihe $E_{n,r}(r > n + 1)$ ist bekanntlich eine Eigenform mit konstantem Fourierkoeffizienten 1. Zumindest im Falle $n = 1$ ist sie durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Es ist nicht möglich, in wenigen Seiten einen vollständigen Überblick über die Theorie der Siegelschen Modulfunktionen zu geben. Aber man mag mit Recht bemängeln, daß in diesem Bericht der Zusammenhang mit der Theorie der abelschen Funktionen unterdrückt wurde. (Die Spalten einer Matrix $Z \in S_n$ erzeugen zusammen mit den Einheitsvektoren ein Gitter in $\mathbb{C}^n$. Der Quotient S_n/Γ_n ist die Modulmannigfaltigkeit der polarisierten abelschen Varietäten vom Haupttypus.) Als Entschuldigung mag dienen, daß I. Igusa dieser Theorie ein hervorragendes Lehrbuch „theta functions" mit vollständigen Beweisen gewidmet hat.

(Eingegangen: 25. 10. 1976)

Mathematisches Institut
der Universität
Saarstraße
65 Mainz