Der Körper der Siegelschen Modulfunktionen

Von E. Freitag (Mainz)

Herrn Prof. Dr. E. Kähler zum 70. Geburtstag gewidmet

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt:

Der Körper der Siegelschen Modulfunktionen n-ten Grades ist im Falle

$$n = 8m + 1, \quad m \geq 2$$

nicht rein transzendent.

Ist $K \supset \mathbb{C}$ ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad n, so existiert aufgrund der Desingularisierungstheorie von Hironaka eine kompakte analytische Mannigfaltigkeit X der Dimension n, so daß K zum Körper der meromorphen Funktionen auf X isomorph ist.

Der Modul der holomorphen alternierenden Differentialformen ν-ten Grades auf X wird mit $\Omega_\nu(X)$ bezeichnet. Die Dimension dieses Vektorraumes ist endlich.

Die Invariante

$$g_\nu = g_\nu(X) = \dim \Omega_\nu(X)$$

ist von der Wahl des Modells unabhängig, wir schreiben daher auch

$$g_\nu = g_\nu(K).$$

Ist $K = \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ eine rein transzendente Erweiterung von $\mathbb{C}$, so gilt

$$g_\nu(K) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq \nu \leq n.$$

Sei nun Γ eine Gruppe von analytischen Automorphismen der Siegelschen Halbebene S_n, welche mit der Siegelschen Modulgruppe $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ kommensurabel ist.

Dann ist der Quotientenraum S_n/Γ ein Modell des Körpers der Modulfunktionen $K(\Gamma)$, welches aber i.a. weder kompakt noch singularitätenfrei ist.

Man kann dennoch erwarten, daß zwischen dem Vektorraum $\Omega_\nu(S_n)$ der Γ-invarianten holomorphen ν-Formen auf S_n und $\Omega_\nu(X)$ ein Zusammenhang besteht. (Mit X wird jetzt ein kompaktes singularitätenfreies Modell von $K(\Gamma)$ bezeichnet.) In der Tat hat man eine natürliche Restriktionsabbildung

$$\Omega_v(X) \to \Omega_v(S_n)^\Gamma.$$

Im Fall $v < N = \frac{1}{2} n(n+1)$ *ist diese sogar ein Isomorphismus!* Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz ohne explizite Kenntnis eines singularitätenfreien Modells X bewiesen werden kann.

In der Arbeit [5] wurden invariante Differentialformen vom Grad $N-1$ mit Hilfe von Modulformen vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ konstruiert. Um nicht von Multiplikatorsystemen sprechen zu müssen, setzen wir voraus, daß $n-1$ gerade ist.

In [5] wurde eine bilineare Paarung

$$\left[\Gamma, \frac{n-1}{2}\right] \times \left[\Gamma, \frac{n-1}{2}\right] \to \Omega_{N-1}(S_n)^\Gamma$$

$$(f, g) \to \{f, g\}$$

konstruiert. Dabei wird allgemein mit $[\Gamma, r]$ der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht r bezeichnet. Über die Normierung des Gewichts herrscht in der Literatur eine allgemeine Konfusion, zu der auch der Verfasser dieser Arbeit beigetragen hat.

In dieser Arbeit hat eine Form f das Gewicht r, wenn sie der Transformationsformel

$$f(MZ) = |CZ + D|^r f(Z) \quad (|A| = \det A) \tag{1}$$

genügt.

Zur Konstruktion von Modulformen vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ verwendet man Thetafunktionen.

$$\vartheta_{a,b}(Z) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i Z\left[g + \frac{1}{2}a\right] + b'g} \tag{2}$$

Wir setzen

$$f(Z) = \sum \vartheta_{a,b}(Z)^{n-1}.$$

Dabei wird über alle geraden Charakteristiken a, b summiert, d.h.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}; \quad a_j, b_j \in \{0, 1\}; \quad a'b \equiv 0 \bmod 2$$

Dies ist bekanntlich eine Modulform vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ zur vollen Siegelschen Modulgruppe, sofern $n-1$ durch 8 teilbar ist.

Eine einfache zahlentheoretische Überlegung zeigt $\{f, f\} \neq 0$, falls $n > 9$.

§ 1. Ein Kriterium für die Fortsetzbarkeit von holomorphen Differentialformen

Es sei X eine analytische Mannigfaltigkeit der Dimension n und A eine analytische Teilmenge. Wann ist eine holomorphe Differentialform von $X - A$ auf X holomorph fortsetzbar?

Der folgende Hilfssatz verallgemeinert das in [3] für n-Formen bewiesene Kriterium.

1.1. Hilfssatz: *Sei X eine n-dimensionale analytische Mannigfaltigkeit und $A \subset X$ eine analytische Teilmenge kleinerer Dimension. Außerdem sei eine holomorphe ν-Form*

$$\omega \in \Omega_\nu(X - A); \quad \nu \in \{1, \cdots, n\}$$

gegeben.

Annahme: *ω sei nicht auf X holomorph fortsetzbar.*

Dann existiert eine holomorphe Einbettung

$$\varphi : E^\nu = E \times E^{\nu-1} \to X \quad (E = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\})$$

mit folgenden Eigenschaften

a) $\varphi^{-1}(A) \subset \{0\} \times E^{\nu-1}$,

b) $\int\limits_{|z_j| \leq r \leq 1,\, 1 \leq j \leq \nu} \overset{*}{\varphi}\omega \wedge \overline{\overset{*}{\varphi}\omega} = \infty$

Beweis: Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz kann man holomorphe Differentialformen über Ausnahmemengen der Kodimension ≥ 2 fortsetzen. Wenn die vorgelegte ν-Form ω nicht auf ganz X fortgesetzt werden kann, so gibt es insbesondere einen regulären Punkt $a \in A$, in dem ω singulär ist. Es ist nun keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man nur folgende lokale Situation betrachtet.

$$X = E^\nu = E \times E^{\nu-1}, \; A \subset \{0\} \times E^{\nu-1}, \; a = 0.$$

Um Schreibarbeit zu sparen, wollen wir nur den Fall $\nu = 1$ behandeln.

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, dz_j$$

Wir nehmen an, daß das Integral in b) für alle Einbettungen $\varphi : E \to X$ mit der Eigenschaft a) endlich ist und zeigen, daß dann ω über A holomorph fortgesetzt werden kann. Wir werden sehen, daß man mit affinen Abbildungen auskommt

$$\begin{aligned} \varphi(z) = zu + v; \quad & u = (u_1, \ldots, u_n), \; u_1 \neq 0, \\ & v = (v_1, \ldots, v_n), \; v_1 = 0. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\overset{*}{\varphi}\omega = g(z)\,dz,\ g(z) = \sum_{j=1}^{n} u_j f_j(uz+v).$$

Das Integral

$$\int_{|z|\le r\le 1} \overset{*}{\varphi}\omega \wedge \overline{\overset{*}{\varphi}\omega} = -2i \int_{|z|\le r} |g(z)|^2\,dx\,dy$$

kann nur dann konvergieren, wenn $g(z)$ eine hebbare Singularität in 0 hat. Hieraus folgt, daß die Funktionen f_j in $z_1 = 0$ holomorph fortsetzbar sind.

§ 2. Ein funktionentheoretischer Hilfssatz

Die Siegelsche Halbebene S_n vom Grad n besteht aus allen n-reihigen symmetrischen komplexen Matrizen $Z = X + iY$, deren Imaginärteil positiv definit ist. Auf S_n operiert die Gruppe $Gl(n, \mathbb{R})$ aller n-reihigen reellen invertierbaren Matrizen vermöge

(3) $$Z[U] = U'ZU.$$

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis von

2.1. Satz: *Es sei*

$$\Phi : S_1 \to S_n$$

eine holomorphe Abbildung mit der Eigenschaft

$$\Phi(z+1) = \Phi(z)[U] + S$$
$$(U \in GL(n, \mathbb{Z}),\ S = S' \text{ reell})$$

Dann gilt

$$\Phi(z) = S_0 z + \Phi_0(q),\ q = e^{\frac{2\pi i z}{N}}$$

(N eine geeignete natürliche Zahl).

Die Abbildung Φ_0 hat in $q = 0$ eine hebbare Singularität. Die Matrix S_0 ist reell, symmetrisch und semipositiv.

Dem Beweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

2.2. Hilfssatz: *Die Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ seien im gelochten Einheitskreis* $(0 < |q| < 1)$ *regulär. Außerdem gelte*

$$\operatorname{Im}[f_0(q) + zf_1(q) + \cdots + z^n f_n(q)] > 0 \quad \text{für} \quad q = e^{2\pi i z},\ \operatorname{Im} z > 0.$$

Die Singularität $q = 0$ ist dann für $f_0, \ldots, f_n$ hebbar.

Zusatz: *Es gilt*

a) $f_2(q) = \ldots = f_n(q) = 0$,
b) $f_1(q)$ *ist eine Konstante* ($\geqslant 0$).

Beweis: Es sei

$$F(z) = f_0(q) + \cdots + z^n f_n(q) \tag{4}$$

Da die Matrix

$$(z+\nu)^{\mu}{}_{0 \leq \nu,\, \mu \leq n}$$

bis auf endlich viele z nicht ausgeartet ist, existieren rationale Funktionen in z

$$R_0^{(\nu)}, \cdots, R_n^{(\nu)}, \quad (0 \leq \nu \leq n)$$

mit der Eigenschaft

$$f_\nu(q) = R_0^{(\nu)}(z) \cdot F(z) + \cdots + R_n^{(\nu)}(z) \cdot F(z+n) \tag{5}$$

Wir benötigen nun einen Satz von Julia – Caratheodory – Landau – Valiron: [1].

Ist φ eine analytische Funktion, welche die obere Halbebene in sich abbildet, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} = c \geq 0$$

in jedem Winkelbereich

$$\pi - \varepsilon \leq \arg z \leq \varepsilon, \ \varepsilon > 0.$$

Diesen Satz wenden wir auf $F(z)$ an. Aus (5) folgt eine Abschätzung

$$|f_\nu(q)| \leq C_1 |z|^{C_2} \quad \text{für} \quad \operatorname{Im} z \geq C_3, \tag{6}$$

mit gewissen Konstanten C_1, C_2, C_3. Für den n-ten Fourierkoeffizienten a_n von f erhält man hieraus

$$|a_n| \leq C_1 \int_0 |z|^{C_2} e^{2\pi n y}\, dx \quad \text{für} \quad y \geq C_3. \tag{7}$$

Durch Grenzübergang $y \to \infty$ zeigt man $a_n = 0$ für $n < 0$. Wir beweisen noch den Zusatz: Mit Hilfe des Grenzübergangs

$$\lim_{k \to \infty} \frac{F(z+k)}{k^n} = f_n(q)$$

zeigt man

$$\operatorname{Im} f_n(q) \geq 0.$$

Nach dem Satz von Julia – Caratheodory – Landau – Valiron ist der Grenzwert

$$\lim_{z \to \infty} \frac{F(z)}{z^n} = f_n(0)$$

reell und im Fall $n \geq 2$ sogar Null.

Der Zusatz zu Hilfssatz 2.2 folgt nun unmittelbar aus dem Satz der Gebietstreue analytischer Funktionen.

2.3. Hilfssatz: *Es sei $F : S_1 \to S_n$ eine holomorphe Abbildung der Form*

$$\frac{dF(z)}{dz} = f_0(q) + z f_1(q) + \cdots + z^n f_n(q),$$

wobei die Abbildungen f_ν $(0 \le \nu \le n)$ im punktierten Einheitskreis holomorph seien. Dann gilt

$$f_1(q) = \cdots = f_n(q) = 0.$$

Beweis: Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, $n = 1$ anzunehmen, denn man kann $F[\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}' F \mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n)$ anstelle von F betrachten.

Durch partielle Integration gewinnt man für $F(z)$ eine Darstellung der Form

(8) $$F(z) = g_0(q) + \cdots + z^{n+1} g_{n+1}(q).$$

Dabei ist notwendigerweise $g_{n+1}(q) = c_n$ konstant und

(9) $$\frac{d}{dz} g_n(q) = f_n(q) - (n+1) c_n.$$

Die Konstante $(n+1)\,c_n$ ist demnach der 0-te Entwicklungskoeffizient in der Laurentreihe von $f_n(q)$.

Aus Hilfssatz 2.3 folgt $c_n = 0$ und im Falle $n \ge 1$ auch $f_n(q) = 0$.

Beweis von Satz 2.1: Wir nehmen zunächst einmal an, es sei schon bewiesen, daß die Ableitung von Φ periodisch ist.

(10) $$\frac{d\Phi(z+N)}{dz} = \frac{d\Phi(z)}{dz}.$$

Durch Integration der Fourierreihe erhält man für Φ eine Darstellung der Form

(11) $$\Phi(z) = S_0 z + \Phi_0(q).$$

Wendet man Hilfssatz 2.2 auf die Funktion

(12) $$f(z) = \Phi(z)[\mathfrak{a}]$$

an, wobei $\mathfrak{a}$ eine beliebige reelle Spalte sei, so sieht man, daß $\Phi_0(q)$ eine hebbare Singularität in $q = 0$ hat.

Wir zeigen nun, daß die Eigenwerte der Matrix U Einheitswurzeln sind.

Nach einem Satz von Kronecker ist eine ganz algebraische Zahl eine Einheitswurzel, wenn alle Konjugierten den absoluten Betrag Eins haben. Da U nach Voraussetzung unimodular ist, müssen wir nur zeigen, daß alle Eigenwerte von U den Betrag Eins haben. Sei λ ein Eigenwert von U und

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ ein von Null verschiedener Eigenvektor}$$

$$U\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a}.$$

Die Funktion

$$\varphi(z) = \bar{\mathfrak{a}}' \Phi(z)\mathfrak{a} \tag{13}$$

bildet die obere Halbebene in sich ab und besitzt das Transformationsverhalten

$$\varphi(z+1) = a\varphi(z) + s; \quad a = \lambda \cdot \bar{\lambda} > 0, \; s \text{ reell.} \tag{14}$$

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{d\varphi(z+1)}{dz} = a \frac{d\varphi(z)}{dz},$$

also

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = a^z \varphi_0(q), \; q = e^{2\pi i z}.$$

Wir schließen indirekt, nehmen also $a \neq 1$ an. Dann erhält man durch Integration

$$\varphi(z) = C + a^z \psi(q). \tag{15}$$

Die Funktion ψ ist im gelochten Einheitskreis holomorph. Nach dem Satz von Julia – Caratheodory – Landau – Valiron existiert der Grenzwert

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{z} = c \geq 0, \; |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt, daß die Funktion ψ eine hebbare Singularität in $q = 0$ hat. (vgl. Beweis von Hilfssatz 2.2.)

Die Funktion ψ muß sogar identisch verschwinden. Denn sonst würde der Grenzwert

$$\lim_{q \to 0} \frac{\varphi(q)}{q^m}$$

für eine geeignete ganze Zahl $m \geq 0$ existieren und von 0 verschieden sein. Wir wissen nun, daß die Funktion φ konstant sein muß

$$\varphi(z) = C, \; \operatorname{Im} C > 0.$$

Das ist aber mit (14) nicht verträglich.

Da alle Eigenwerte von U Einheitswurzeln sind, existiert eine natürliche Zahl N, so daß

$$U^N = E + A \quad (E \text{ Einheitsmatrix}) \tag{16}$$

mit einer nilpotenten Matrix A gilt.

Wir definieren

$$\begin{aligned} U^{Nz} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{z}{\nu} A^{\nu}, \\ U'^{Nz} &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{z}{\nu} A'^{\nu}. \end{aligned} \tag{17}$$

Beide Summen sind endlich. Die Koeffizienten dieser Matrizen sind Polynome in z.

Die Abbildung

$$z \to U'^{-z} \frac{d\Phi(z)}{dz} U^z \tag{18}$$

ist invariant unter der Substitution $z \to z + N$. Es gilt daher

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = U'^z \Psi(q) U^z, \quad q = e^{\frac{2\pi i z}{N}}. \tag{19}$$

Unser Ziel war es zu zeigen, daß $\frac{d\Phi(z)}{dz}$ selbst periodisch ist, also nur von q abhängt. Dies folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2.3.

§ 3. Holomorphe Differentialformen, welche unter der Siegelschen Modulgruppe invariant sind

Im folgenden sei Γ eine Gruppe von symplektischen Transformationen $S_n \to S_n$

$$Z \to MZ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R}), \tag{20}$$

welche mit der Siegelschen Modulgruppe $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ kommensurabel sei.

Wir bezeichnen mit X die Satakekompaktifizierung von S_n/Γ. Dies ist eine projektive algebraische Mannigfaltigkeit, die S_n/Γ als Zariski-offenen Teil enthält. Aufgrund HIRONAKAS Theorie über die Auflösung von Singularitäten existiert eine Desingularisierung

$$\pi : \tilde{X} \to X.$$

Ist ω eine holomorphe Differentialform auf $\tilde{X}$, so erhält man durch „Zurückziehen" eine holomorphe Γ-invariante Differentialform ω_0 auf

$S_n - A$. Dabei ist A das Urbild des Entartungsortes von π^{-1}. Die Kodimension von A in S_n ist größer als Eins, nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz kann man daher ω_0 auf ganz S_n holomorph fortsetzen. Die Zuordnung $\omega \to \omega_0$ stiftet also eine injektive lineare Abbildung

$$\Omega_\nu(X) \to \Omega_\nu(S_n)^\Gamma \quad (0 \leq \nu \leq N)$$

3.1. Satz: *Die Abbildung*

$$\Omega_\nu(X) \to \Omega_\nu(S_n)^\Gamma$$

ist im Falle $\nu = N - 1$ $\left(N = \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$ *ein Isomorphismus.*

(Tatsächlich ist diese Abbildung für $\nu < N$ ein Isomorphismus, während im Falle $\nu = N$ das Bild genau aus dem Unterraum der Spitzenformen besteht.)

Beim Beweis von Satz 3.1 darf man Γ durch eine beliebige Untergruppe von endlichem Index ersetzen (vgl. [2]).

Man kann daher annehmen, daß Γ eine Untergruppe der Siegelschen Modulgruppe ist, welche auf S_n fixpunktfrei operiert und daß die Mannigfaltigkeit S_n/Γ als Zariski-offener Teil in dem singularitätenfreien Modell $\tilde{X}$ enthalten ist.

Satz 3.1 besagt, daß jede holomorphe $(N-1)$-Form von S_n/Γ auf $\tilde{X}$ holomorph fortgesetzt werden kann. Der Beweis basiert auf Hilfssatz 1.1. Wir haben daher holomorphe Abbildungen

(21) $$\varphi : E \times E^{\nu-1} \to \tilde{X}$$

mit

$$\varphi^{-1}(A) \subset \{0\} \times E^{\nu-1} \quad (A = X - S_n/\Gamma)$$

zu untersuchen.

Die Zusammensetzung von φ und π ergibt eine Abbildung in die Satakekompaktifizierung

(22) $$\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi : E^\nu \to X.$$

Den Bildpunkt von $0 \in E^\nu$ bezeichnen wir mit

(23) $$x = \tilde{\varphi}(0).$$

Um die Abbildung φ beschreiben zu können, muß man die Satakekompaktifizierung genau kennen.

Bekanntlich existiert eine Untergruppe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Gruppe Γ_0 ist innerhalb $Sp(n, \mathbb{Z})$ zu einer Gruppe von affinen Substitutionen konjugiert, d.h., es existiert $M_0 \in Sp(n, \mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft

$$M \in \Gamma_0 \Rightarrow M_0 M M_0^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \tag{24}$$

2. Sei

$$p : S_n/\Gamma_0 \to S_n/\Gamma$$

die kanonische Projektion. Es existiert eine offene Umgebung $U = U(x)$, so daß p eine topologische Abbildung

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U \cap S_n/\Gamma$$

vermittelt.

Da man den Einheitskreis durch einen Kreis mit kleinerem Radius ersetzen kann, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen:

Es existiert eine holomorphe Abbildung

$$\varphi_0 : \dot{E} \times E^{\nu-1} \to S_n/\Gamma, \tag{25}$$

so daß folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} \dot{E} \times E^{\nu-1} \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"'] & S_n/\Gamma_0 \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{26}$$

Die universelle Überlagerung von $\dot{E}$ ist die obere Halbebene

$$H \to \dot{E}; \quad z \to e^{2\pi i z}$$

Durch Hochheben von φ_0 erhält man eine holomorphe Abbildung

$$\Phi : H \times E^{\nu-1} \to S_n$$

mit der Eigenschaft

$$\Phi(z+1, w) = M\Phi(z, w), \quad M \in \Gamma_0 \tag{27}$$

Die Substitution M hängt nicht von z und w ab, da Γ_0 diskontinuierlich und fixpunktfrei operiert.

Da man Γ durch die konjugierte Gruppe $M_0 \Gamma M_0^{-1}$ ersetzen kann, dürfen wir annehmen, daß die Substitution M affin ist, d.h.

$$\begin{gathered} \Phi(z+1, w) = \Phi(z, w)\,[U] + S \\ (U \in Gl(n, \mathbb{Z});\ S = S' \text{ ganz}) \end{gathered} \tag{28}$$

Solche Abbildungen haben wir in § 2 untersucht.

Es existiert eine natürliche Zahl N, eine symmetrische reelle semipositive Matrix S_0 und eine holomorphe Abbildung

$$\Phi_0 : E \to S_n$$

mit der Eigenschaft

$$\Phi(z, w) = S_0 z + \Phi_0(q); \quad q = e^{\frac{2\pi i z}{N}} \tag{29}$$

Man überlegt sich leicht, daß man N unabhängig von w wählen kann. Die Matrix S_0, die ja einer diskreten Gruppe angehört, hängt nicht von w ab. Natürlich ist $\Phi_0 = \Phi_0(z, w)$ eine analytische Abbildung.

Sei ω eine holomorphe Differentialform auf S_n vom Grad $N-1$, welche unter allen affinen Substitutionen $Z \to Z[U] + S$ aus invariant sei.

Wir wollen im Fall $\nu = N-1$ beweisen, daß das Integral

$$\int\limits_B \overset{*}{\Phi}\omega \wedge \overline{\overset{*}{\Phi}\omega} \tag{30}$$

konvergiert. Der Bereich $B = B_\delta \subset H \times E^{\nu-1}$ sei hierbei durch die Ungleichungen

$$\operatorname{Re} z \leq \frac{1}{\delta}, \quad \operatorname{Im} z \geq \delta; \quad |w_\nu| \leq 1 - \delta \quad (\delta > 0) \tag{31}$$

definiert.

Jede holomorphe $(N-1)$-Form ω auf S_n läßt sich in der Form

$$\omega = Sp(f \cdot \Omega) \tag{32}$$

schreiben. Dabei ist $f = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine symmetrische Matrix von holomorphen Funktionen und Ω eine symmetrische Matrix von $(N-1)$-Formen

$$\Omega_{ik} = \pm \bigwedge_{\substack{1 \leq \nu \leq \mu \leq n \\ \{\nu, \mu\} \neq \{i, k\}}} dz_{\nu\mu} \quad \text{(alternierendes Produkt)} \tag{33}$$

Das Vorzeichen wird durch die Forderung

$$\Omega_{ik} \wedge dz_{ik} = \bigwedge_{1 \leq i \leq k \leq n} dz_{ik} \tag{34}$$

festgelegt. Dabei seien die Variablen irgendwie — etwa lexikographisch — angeordnet.

Da ω unter den affinen Substitutionen von Γ invariant ist, kann man f in eine Fourierreihe entwickeln

$$f(Z) = \sum a(T)\, e^{2\pi i\, Sp(TZ)} \tag{35}$$

Dabei ist über ein gewisses Gitter von symmetrischen rationalen Matrizen T zu summieren. Die Koeffizientenmatrizen $a(T)$ genügen der Relation

$$(36) \qquad Ua(U'TU)U' = a(T),$$

wobei U alle Matrizen einer gewissen Untergruppe $\mathfrak{U}$ von endlichem Index aus $Sl(n, \mathbb{Z})$ durchläuft.

Hieraus folgt das „Koecherprinzip" (vgl. [2])

$$(37) \qquad a(T) \neq 0 \Rightarrow T \geq 0.$$

Darüber hinaus zeigen wir

$$(38) \qquad a(T) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } T \geq n-1.$$

Beweis: Zu jeder rationalen semipositiven Matrix T existiert eine rationale invertierbare Matrix $U \in Gl(n, \mathbb{Q})$ mit der Eigenschaft

$$(39) \qquad U'TU = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_1 = T_1^{(h)} > 0.$$

Wir können daher schon

$$(40) \qquad T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = T_1^{(h)} > 0$$

annehmen. Sei

$$(41) \qquad U_0 = \begin{pmatrix} E A \\ O V \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}, \quad E = E^{(h)}.$$

Dann gilt $U_0' T U_0 = T$, also

$$(41) \qquad U_0 a(T) U_0' = a(T).$$

Zerlegt man die Koeffizientenmatrix

$$(42) \qquad a(T) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1' & A_2 \end{pmatrix}; \quad A_0 = A_0^{(h)},$$

so erhält man

$$(43) \qquad A_0 = 0, \ A_1 = 0 \ \text{ und } \ A_2[V] = A_2.$$

Dabei durchläuft V eine Untergruppe von endlichem Index in $Sl(n-h, \mathbb{Z})$. Im Falle $n-h > 1$ gilt also auch $A_2 = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Konvergenz des Integrals beweisen. Sei

$$(44) \qquad \Phi^* \omega = Sp\left(f(\Phi z)\, \Phi^* \Omega\right) = F(z, w)\, dz \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{N-2}.$$

Wir haben

$$(45) \qquad \lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} F(z, w) = 0$$

zu zeigen. Jedenfalls gilt

$$(46) \qquad \lim_{\operatorname{Im} z \to \infty} f(\Phi z) = \sum_{Sp(S_0 T) = 0} a(T)\, e^{2\pi i\, Sp(T\Phi(0, w))}$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = S_2^{(n-h)} > 0 \tag{47}$$

annehmen. Aus $Sp(S_0 T) = 0$ folgt dann

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_0 = T_0^{(h)}. \tag{48}$$

Der Koeffizient $a(T)$ kann nur dann von 0 verschieden sein, wenn $h \geq n-1$ gilt.

In dem noch zu behandelnden Spezialfall

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{Q}, \tag{49}$$

gilt offenbar

$$\Phi^*(\Omega_{nn}) = \Phi_0^*(\Omega_{nn}) = qF_0(q, w)\, dz \wedge dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{n-2} \tag{50}$$

mit einer in E^{N-1} holomorphen Funktion F_0.

Beachtet man noch

$$a(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{nn}(T) \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} T_0^{(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

so wird (45) evident.

§ 4. Die Konstruktion einer nicht verschwindenden Differentialform

In [5] wurde eine bilineare Abbildung

$$\left[\Gamma_n, \frac{n-1}{2}\right] \times \left[\Gamma_n, \frac{n-1}{2}\right] \to \Omega_{N-1}(S_n)^{\Gamma_n}$$
$$(f, g) \to \{f, g\}$$

konstruiert. Wenn n ungerade ist, was wir jetzt voraussetzen wollen, so ist diese Paarung symmetrisch.

Zur Konstruktion von $\{f, g\}$ benötigt man gewisse Differentialoperatoren. Sei

$$\partial_{\nu\mu} = e_{\nu\mu}\, \partial/\partial z_{\nu\mu}; \quad e_{\nu\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = \mu, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{52}$$

Da diese Operatoren untereinander vertauschbar sind, kann man Unterdeterminanten der Matrix $\partial = (\partial_{\nu\mu})$ bilden.

Zwei Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$

$$a: 1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_p \leq n$$
$$b: 1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_p \leq n,$$

die p Elemente enthalten, wird die Unterdeterminante

(53) $$\partial_b^a = \det(\partial_{a_\nu, b_\mu})_{1 \leq \nu, \mu \leq p}$$

zugeordnet.

Wir setzen nun

(54) $$\{f, g\} = Sp(A \cdot \Omega).$$

Die Komponenten der symmetrischen Matrix $A = (A_{ik})$ sind durch folgende Formel definiert:

(55) $$(-1)^{i+k} A_{ik} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{\binom{n-1}{p-1}} \sum \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'')\, \partial_{b'}^{a'} f \cdot \partial_{b''}^{a''} g.$$

Die innere Summe bezieht sich auf alle disjunkten Zerlegungen

$$\{1, \ldots, n\} = a' \cup a'' \cup \{i\} = b' \cup b'' \cup \{k\},$$

wobei die Mengen a' und b' jeweils genau p Elemente enthalten mögen. Der Vorzeichenfaktor $\varepsilon(a', a'')$ (analog $\varepsilon(b', b'')$) ist folgendermaßen erklärt:

Man ordne die Mengen a' und a'' in natürlicher Reihenfolge an.

$$a' : a_1' < \cdots < a_p'$$
$$a'' : a_1'' < \cdots < a_q'' \qquad (p + q = n - 1)$$

Dann ist $\varepsilon(a', a'')$ das Signum der Permutation, die man benötigt, um $(a_1', \ldots, a_p', a_1'', \ldots, a_q'')$ in die natürliche Reihenfolge zu bringen.

Es kommt jetzt darauf an, Modulformen f, g vom Gewicht $\frac{n-1}{2}$ zur vollen Modulgruppe Γ_n zu finden, so daß die Differentialform $\{f, g\}$ nicht verschwindet. In der Einleitung haben wir schon darauf hingewiesen, daß wir zur Konstruktion Thetareihen verwenden.

(56) $$f(Z) = g(Z) = \sum \vartheta_{a,b}(Z)^{n-1}$$

Dies ist bekanntlich eine Modulform, wenn $n-1$ durch 8 teilbar ist, was nun vorausgesetzt werden soll. Wir untersuchen speziell die Komponente $A_{nn}(Z)$ und entwickeln diese in eine Fourierreihe

(57) $$A_{nn}(Z) = \sum_{T = T' \geq 0} a_{nn}(T)\, e^{2\pi i\, Sp(TZ)}$$

Wir nehmen nun für T eine spezielle Diagonalmatrix vom Rang $n-1$, nämlich

(58) $$T_0 = \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und zeigen

$$a_{nn}(T_0) > 0 \quad \text{für} \quad n = 8m + 1, \; m \geq 2.$$

Dazu benötigt man gewisse Information über die Fourierentwicklung von f.

(59) $$f(Z) = \sum a(T)\, e^{2\pi i\, Sp\,(TZ)}$$

Den Operator $\partial^{a'}_{b'}$ kann man gliedweise anwenden.

(60) $$\partial^{a'}_{b'} f = \sum a(T)\, T^{a'}_{b'}\, e^{2\pi i\, Sp\,(TZ)}$$

Dabei ist $T^{a'}_{b'}$ die analog zu $\partial^{a'}_{b'}$ (53) gebildete Unterdeterminante von T. Man erhält nun

(61) $$a_{nn}(T) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{\binom{n-1}{p-1}} \sum_{T_1 + T_2 = T} \varepsilon(a', a'')\, \varepsilon(b', b'')\, (T_1)^{a'}_{b'}\, (T_2)^{a''}_{b''}\, a(T_1)\, a(T_2)$$

Die innere Summe bezieht sich auf alle disjunkten Zerlegungen

$$\{1, \ldots, n-1\} = a' \cup a'' = b' \cup b'',$$

wobei a' und b' jeweils genau p Elemente enthalten.

Für den Koeffizienten $a(T)$ erhält man die Formel

(62) $$a(T) = \sum_{a,b} \sum_{g} (-1)^{b' \sum\limits_{\nu=1}^{n-1} g_\nu}.$$

Dabei durchläuft g_ν alle ganzen n-reihigen Spalten mit der Eigenschaft

(63) $$\sum_{\nu=1}^{n-1} \left(g_\nu + \frac{1}{2} a\right) \left(g_\nu + \frac{1}{2} a\right)' = T$$

Es sei noch einmal daran erinnert, daß a, b alle geraden Thetacharakteristiken durchläuft

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}; \quad a_\nu, b_\nu \in \{0, 1\}, \; a'b \equiv 0 \bmod 2$$

Wir nehmen nun an, daß die Diagonalelemente von T nicht größer als zwei sind.

Die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(g_\nu + \frac{1}{2}a\right)\left(g_\nu + \frac{1}{2}a\right)' = T$$

hat im Falle $n-1>8$ offenbar nur dann eine Lösung, wenn $a=0$ gilt. Die Formel für $a(T)$ vereinfacht sich dann zu

$$a(T) = \sum (-1)^{b' \sum_{\nu=1}^{n-1} g_\nu}. \tag{64}$$

Zu summieren ist

a) über alle Vektoren $b \in (\mathbb{Z}/2)^n$

b) über alle Systeme von ganzen Vektoren $g_1, \ldots, g_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} g_\nu g_\nu' = T. \tag{65}$$

Ist g ein ganzer Vektor mit mindestens einer ungeraden Komponente, so gilt

$$\sum_{b\in(\mathbb{Z}/2)^n} (-1)^{b'g} = 0. \tag{66}$$

Wir brauchen daher bei (64) nur unter der Nebenbedingung

$$\sum g_\nu \equiv 0 \bmod 2$$

zu summieren.

Der Koeffizient $a(T)$ ist also höchstens dann von Null verschieden, wenn T eine ganze Matrix mit geraden Diagonalelementen ist.

Wir berechnen nun den Koeffizienten $a_{nn}(T)$ mit Hilfe der Formel (61). Dazu haben wir Zerlegungen

$$T_0 = T_1 + T_2$$

zu betrachten, wobei T_1 und T_2 ganze und semipositive Matrizen sind. Sie müssen dann notwendigerweise Diagonalmatrizen sein. Wenn eine Unterdeterminante $(T_1)_b^a$ von Null verschieden ist, so gilt $a=b$. Die Formel (61) vereinfacht sich für T_0 anstelle von T wesentlich:

$$a_{nn}(T_0) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p \cdot 2^{n-1}}{\binom{n-1}{p-1}} \sum_{\substack{T_1+T_2=T_0 \\ \mathrm{Rang}\,(T_1)=p}} a(T_1)\cdot a(T_2). \tag{67}$$

Es sei nun T irgendeine Diagonalmatrix, wobei p Diagonalelemente gleich 2 und die restlichen 0 sind. Aus (62) folgt

$$a(T) = 2^n\, a(p).$$

Dabei ist $a(p)$ die Anzahl aller ganzen Vektoren $g_1, \ldots, g_p$ aus $\mathbb{Z}^n$ mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} &1)\quad g'_\nu g_\nu = 2 \\ &2)\quad g'_\nu \cdot g_\mu = 0 \quad \text{für} \quad \nu \neq \mu \\ &3)\quad \sum_{\nu=1}^{p} g_\nu \equiv 0 \bmod 2 \end{aligned} \tag{68}$$

Dieses System besitzt eine Lösung, wenn p gerade ist, nämlich

$$\begin{aligned} &g_1 : (1, 1, 0, \ldots\ldots\ldots, 0) \\ &g_2 : (1, -1, 0, \ldots\ldots, 0) \\ &g_3 : (0, 0, 1, 1, 0, \ldots\ldots, 0) \\ &g_4 : (0, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{69}$$

Man überlegt sich leicht, daß obiges System für ungerades p keine Lösung besitzt. Aus (67) folgt $a_{nn}(T_0) > 0$.

Literatur

[1] DINGHAS, Vorlesungen über Funktionentheorie (Springer-Verlag, 1961).

[2] E. FREITAG, Über die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen I. (Journal für die reine und angewandte Mathematik **247**, 97—117 (1971)).

[3] FREITAG, Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe. (Invent. math. **17**, 106—134 (1972)).

[4] FREITAG, Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades. (Erscheint in den math. Ann.).

[5] FREITAG, Holomorphe Differentialformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe. (Erscheint in den „Inventiones" (Springer-Verlag)).

Eingegangen am 1. 7. 1975

Anschrift des Autors: E. Freitag, Math. Institut der Universität, Saarstraße 21, D-6500 Mainz